

WAVELETS: TEORIA, ALGORITMOS E APLICAÇÕES

Professor Paulo Cupertino Lima
Departamento de Matemática - ICEX - UFMG

28 de outubro de 2004

Sumário

1	Introdução	4
2	Transformada Discreta de Wavelets	6
2.1	A Wavelet de Haar	6
2.1.1	Cálculo Rápido dos Coeficientes de wavelets na Base de Haar	11
2.2	As wavelets de Daubechies	12
3	A Análise de Resolução Múltipla	14
3.1	Um exemplo	24
4	Algoritmos Rápidos	24
4.1	Cálculo Rápidos de Coeficientes de Wavelets	24
4.2	Cálculo Numérico de Wavelets	28
5	Aplicações	33
5.1	Compressão de Imagens Digitais	33
5.1.1	A Necessidade da Compressão	38
5.1.2	A Idéia Geral	39
6	Construindo uma ARM a Partir de uma Função Escala	42
7	A Wavelet de Meyer	47
8	Relaxando as condições na ARM	52
8.1	Seqüência de Riesz e Frames	52
8.2	Construção da <i>ARM</i> a Partir da Função Escala ϕ	58
8.3	Mais exemplos: a família de Battle-Lemariè	61
8.3.1	A spline linear por partes	61
8.3.2	Spline quadrática por partes	63
9	Wavelets B-Splines	64
9.1	Splines	64
9.2	Wavelets Splines	68
9.3	Decaimento Exponencial de Wavelets Splines	69
10	Wavelets Periódicas	76
11	Wavelets com Suportes Compactos	84
11.1	A Wavelet Daub4	89
11.2	Relação entre os suportes de h e ϕ	90
11.3	Propriedades gerais de wavelets de suportes compactos	94
11.4	Regularidade das wavelets de suportes compactos	96
11.5	A wavelet de Haar	101

12	Wavelets no Intervalo $[0, \infty)$	103
13	Fórmulas de Quadratura	111
14	Representação de Operadores em Bases Ortormais de Wavelets	115
14.1	A Representação Não-Padrão de Operadores	116
14.2	O operador $\frac{d}{dx}$ em base de wavelets	120
14.3	O operador $\frac{d^n}{dx^n}$ na base de wavelets	132
14.4	Operadores de Convolução	136
14.4.1	A Transformada de Hilbert	140
14.4.2	Derivadas Fracionárias	142
15	A Transformada de Wavelet Contínua	146
15.1	O Caso Unidimensional	146
15.1.1	Alguns Exemplos de Wavelets	148
15.1.2	A Wavelet de Haar	148
15.1.3	A Wavelet Chapéu Mexicano	148
15.1.4	A Fórmula de Inversão	149
15.2	A Transformada de Wavelet Contínua em d Dimensões	151
15.3	Interpretação Física da Transformada Contínua de Wavelet Como Um “Scanner” de Singularidades.	153
15.4	Escolha da Wavelet ψ	154
15.4.1	Wavelets Isotrópicas	154
15.4.2	Wavelets Anisotrópicas	155
15.5	Algumas Aplicações da Transformada de Wavelet Contínua em Duas Dimensões	156
15.5.1	Deteção de Contornos e Reconhecimento de Caracteres	156
15.5.2	Reconhecimento e Classificação de Padrões	157
15.5.3	Análise de Imagens Astronômicas	157
15.5.4	Algumas Aplicações de Wavelets Direcionais	157

1 Introdução

Famílias de funções $\psi_{a,b}$, definidas por

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad (1)$$

geradas a partir das operações de dilatação e translação da mesma função ψ (wavelet “mãe”) tornaram-se uma ferramenta muito importante em várias áreas da matemática pura e aplicada. Estas famílias são chamadas de “wavelets”.

A primeira menção a wavelets apareceu no apêndice de A. Haar, em 1909 [3]. Uma propriedade das wavelets de Haar é que elas têm suportes compactos; contudo, elas não são continuamente diferenciáveis, o que de certa forma limita as suas aplicações.

As wavelets de Haar ficaram no anonimato por muitos anos até que nos anos 30, vários grupos trabalhando independentemente, pesquisaram a representação de funções usando uma base variando com a escala. Naquela ocasião, usando a base de wavelets de Haar, Paul Levy investigou o movimento Browniano. Ele mostrou que as funções da base de Haar eram melhores do que as da base de Fourier para estudar os pequenos e complicados detalhes do movimento Browniano.

Por um período muito longo, as wavelets de Haar continuaram a ser a única base ortonormal de wavelets conhecida, até que, em 1985, Stephane Mallat deu às wavelets um grande impulso através de seu trabalho em processamento digital de imagens e inspirado nos resultados de Mallat, Y. Meyer construiu a primeira wavelet não-trivial (suave). Ao contrário das wavelets de Haar, as wavelets de Meyer são continuamente diferenciáveis; contudo, elas não têm suportes compactos. Poucos anos mais tarde, Ingrid Daubechies usou os trabalhos de Mallat para construir um conjunto de bases ortonormais de wavelets suaves, com suportes compactos. Os trabalhos de Daubechies são os alicerces das aplicações atuais de wavelets.

Apesar da funcionalidade da transformada de Fourier, especialmente, no que diz respeito a obtenção da análise espectral de um sinal, existem muitas falhas nesta técnica. A primeira destas é a incapacidade da transformada de Fourier em representar funções que têm componentes não periódicas que estão localizadas no tempo e no espaço, tais como pulsos breves. A outra deficiência é a sua incapacidade de fornecer qualquer informação sobre a dependência do tempo de um sinal, visto que ela faz a média sobre todo o tempo de duração do sinal. Além disso, as funções senos e cossenos, usadas na análise de Fourier não são locais e, portanto, desempenham uma tarefa muito pobre na aproximação de sinais muito localizados.

Existe frequentemente uma correlação direta entre a frequência característica de um dado segmento do sinal e a duração temporal daquele segmento: pedaços de pequenas frequências do sinal tendem a durar por um intervalo de tempo maior, enquanto que pedaços com frequências altas ocorrem, em geral, apenas durante um pequeno intervalo de tempo. Os sinais da fala humana são típicos nestes sentido: as vogais têm frequências médias relativamente baixas e duram bastante, enquanto que, as consoantes contêm um

espectro extenso de frequências muito altas, mas são muito breves. Claramente, a análise de Fourier padrão é inadequada para o tratamento de tais sinais, visto que ela perde toda a informação sobre a localização temporal de uma dada componente da frequência. Além disso, ela é muito anti-econômica: quando o sinal é praticamente constante, o que não é interessante, ainda tem-se que somar uma série alternada infinita para reproduzi-lo. Ainda pior, a análise de Fourier é altamente instável em relação à perturbação, por causa do seu caráter global. Por exemplo, se adicionarmos um termo extra, com uma amplitude muito pequena, o sinal será modificado ligeiramente, o espectro de Fourier será completamente perturbado. Por todos estes motivos, os analistas de sinais voltaram-se para representação tempo-frequência (T-F). A idéia é que precisa-se de dois parâmetros: um chamado a , caracteriza a frequência, o outro, b , indica a posição do sinal. Este conceito de representação T-F é bastante antigo e familiar. O exemplo mais simples é uma partitura de música.

Em contra-partida, a transformada de wavelet vista como um mecanismo usado para dissecar ou quebrar um sinal nas suas partes constituintes, permite-nos analisar os dados em diferentes domínios de frequências com a resolução de cada componente amarrada a sua escala.

Uma importante diferença que distingue a transformada de Fourier da transformada de wavelet, são as propriedades de localização no tempo e na frequência dessa última (via translações e dilatações da wavelet mãe, respectivamente). A análise temporal é realizada com uma versão de alta-frequência da wavelet mãe, enquanto que a análise de frequência é realizada por uma versão dilatada (frequência baixa) da mesma. Além disso, na análise de wavelets, podemos usar funções que estão contidas em regiões finitas, tornando-as convenientes na aproximação de dados com descontinuidades agudas.

Os algoritmos de wavelets processam dados em diferentes escalas ou resoluções e, independentemente da função de interesse ser uma imagem, uma curva ou uma superfície, wavelets oferecem uma técnica elegante na representação dos níveis de detalhes presentes. Elas constituem uma ferramenta matemática para decompor funções hierarquicamente, permitindo que uma função seja descrita em termos de uma forma grosseira, mais outra forma que apresenta detalhes que vão desde os menos delicados, aos mais finos. O resultado na análise de wavelets é “ver a floresta e as árvores”.

Como o sinal original ou função pode ser representado em termos de uma expansão em wavelets, as operações com dados podem ser feitas usando os coeficientes de wavelets. Se pudermos escolher as wavelets que melhor se adaptam aos dados, ou truncarmos os coeficientes menores do que um valor previamente estabelecidos, os dados são esparsamente representados. Esta “codificação esparsa” faz das wavelets uma excelente ferramenta no campo de compressão de dados.

Outros campos aplicados que estão fazendo uso de wavelets são: astronomia, acústica, engenharia nuclear, grupo de renormalização em mecânica estatística, problemas de computação gráfica, processamento de sinais e imagens, neurofisiologia, música, ressonância magnética, identificação de vozes, ótica, fractais, turbulência, previsão de terremotos, radar, visão humana, e aplicações em matemática pura tais como resolução de equações diferenciais parciais.

Como veremos, devemos distinguir duas versões diferentes da transformada de wavelet, a contínua e a discreta. A primeira é análoga à transformada de Fourier e é usada principalmente em análise e caracterização de detalhes de sinais. A segunda, é análoga a transformada de Fourier discreta e é mais apropriada para a compressão de dados e reconstrução de sinais.

2 Transformada Discreta de Wavelets

Neste caso, o parâmetro de dilatação a e o parâmetro de translação b , que aparecem em (1) tomam apenas valores discretos. Para a escolhemos potências inteiras de um parâmetro de dilatação fixo, $a_o > 1$, isto é, $a = a_o^m$ (diferentes valores de m correspondem a wavelets de diferentes larguras). A discretização do parâmetro b deve depender de m : wavelets estreitas (alta frequência) são transladadas de pequenas distâncias a fim de cobrir todo o domínio do tempo; enquanto que wavelets mais largas (frequência mais baixa), devem ser transladadas de uma distância maior. Visto que a largura de $\psi(a_o^{-m}x)$ é proporcional a a_o^m , escolhemos discretizar b por $b = nb_o a_o^m$, onde $b_o > 0$ é fixado, $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\psi_{m,n}(x) = a_o^{-\frac{m}{2}} \psi(a_o^{-m}x - nb_o)$. No que segue, faremos $a_o = 2$ e $b_o = 1$.

Definição 2.1. *Uma wavelet é uma função $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, tal que a família de funções*

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$$

onde j e k são inteiros arbitrários, seja uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

Observação 2.1. *Da definição acima, se ψ é uma wavelet, então, $\psi_{j,k}$ também o será para qualquer $j, k \in \mathbb{Z}$.*

Quando olhamos para a definição de wavelets pela primeira vez, uma pergunta surge imediatamente: será que existem wavelets? A esta pergunta daremos uma resposta afirmativa, através de um exemplo simples.

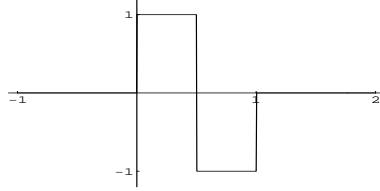
2.1 A Wavelet de Haar

Definição 2.2. *A wavelet de Haar é definida como*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

Note que a wavelet de Haar não tem boa localização tempo-frequência: a sua transformada de Fourier $\widehat{\psi}(\omega)$, decai muito lentamente, se comporta como $|\omega|^{-1}$ quando $\omega \rightarrow \infty$.

A seguir, mostraremos que a família de Haar de fato constitui uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Mostraremos que

Figura 1: A wavelet de Haar, ψ .

1. $\{\psi_{m,n}\}$ é um conjunto ortonormal;
2. $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser arbitrariamente aproximada por uma combinação linear finita de $\psi_{m,n}$.

(i) Note que $\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\| = 1$.

(ii) Para j fixo e $k \neq k'$, temos, $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = \langle \psi, \psi_{0,k'-k} \rangle = 0$, pois, $\psi(x)$ se anula fora do intervalo $[0, 1)$ e $\psi_{0,k''} = \psi(x - k'')$ se anula fora do intervalo $[k'', k'' + 1)$ e estes são disjuntos para $k'' \neq 0$.

(iii) Se $j > j'$, temos $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 2^{\frac{j-j'}{2}} \langle \psi, \psi_{j'',k''} \rangle$, onde $k'' = k' - k2^{j-j'}$ é inteiro e $j'' = j' - j < 0$. Note que ψ se anula fora do intervalo $[0, 1)$ e $\psi_{j'',k''}$ se anula fora do intervalo $[k''2^{j''}, (k'' + 1)2^{j''})$, cujo comprimento é no máximo $\frac{1}{2}$. Afirmamos que ou estes intervalos são disjuntos ou $[k''2^{j''}, (k'' + 1)2^{j''}) \subset [0, \frac{1}{2})$ ou $[k''2^{j''}, (k'' + 1)2^{j''}) \subset [\frac{1}{2}, 1)$. No primeiro caso $\psi_{j,k}\psi_{j'',k''} = 0$ e nos dois casos restantes, como ψ é constante em cada um dos subintervalos $[0, \frac{1}{2})$ ou $[\frac{1}{2}, 1)$, teremos $\psi_{j,k}\psi_{j'',k''}$ proporcional a $\psi_{j'',k''}$ e sua integral é proporcional à integral de ψ que é nula.

Suponha que os intervalos $[k''2^{j''}, (k'' + 1)2^{j''})$ e $[0, 1)$ tenham pontos em comum. Como o comprimento do primeiro é no máximo meio, temos uma das seguintes possibilidades:

(1) ou $[k''2^{j''}, (k'' + 1)2^{j''})$ está inteiramente contido em $[0, 1)$ e como não podemos ter $k''2^{j''} < \frac{1}{2} < (k'' + 1)2^{j''}$, necessariamente, teremos $[k''2^{j''}, (k'' + 1)2^{j''}) \subset [0, \frac{1}{2})$ ou $[k''2^{j''}, (k'' + 1)2^{j''}) \subset [\frac{1}{2}, 1)$;

(2) ou $[k''2^{j''}, (k'' + 1)2^{j''}) \cap [0, 1) \neq \emptyset$, que não pode acontecer, visto que não é possível que $k''2^{j''} < 0 < (k'' + 1)2^{j''}$ ou $k''2^{j''} < 1 < (k'' + 1)2^{j''}$.

De (i), (ii) e (iii), segue-se que o conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ é ortonormal. A seguir, mostraremos que ele forma uma base para $L^2(\mathbb{R})$.

Seja h_0 uma função constante por partes em intervalos da forma $[k2^{j_0}, (k + 1)2^{j_0})$, se anulando fora de $[-2^{j_1}, 2^{j_1})$, onde j_0 e j_1 , são inteiros tais que $j_0 < j_1$. Mostraremos que existe uma combinação linear finita de wavelets, g , tal que $\|h_0 - g\|$ seja arbitrariamente pequena. Como toda função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser arbitrariamente aproximada por alguma função h_0 do tipo descrito acima, isto mostrará que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ forma uma base para $L^2(\mathbb{R})$.

Seja

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que ϕ é a função característica do intervalo $[0, 1)$, também denominada função escala associada a wavelet de Haar, cujo gráfico aparece na Figura 2.

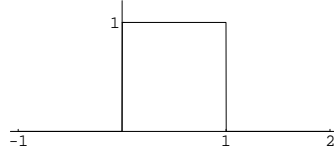


Figura 2: A função escada, ϕ , associada a wavelet de Haar.

Como $\phi(2^{-j}x - k)$ vale 1 no intervalo $[k2^j, (k+1)2^j)$ e zero, caso contrário, então, h_0 pode ser escrita como

$$h_0(x) = \sum_{k=-2^{j_1-j_0}}^{2^{j_1-j_0}-1} a_{0,k} \phi(2^{-j_0}x - k),$$

onde $a_{0,k}$ é a restrição de h_0 ao intervalo $[k2^{j_0}, (k+1)2^{j_0})$.

A seguir, escrevemos $h_0 = h_1 + \delta_1$ onde h_1 é a seguinte função constante por partes em intervalos da forma $[k2^{j_0+1}, (k+1)2^{j_0+1})$:

$$h_1(x) = \sum_{k=-2^{j_1-j_0-1}}^{2^{j_1-j_0-1}-1} a_{1,k} \phi(2^{-(j_0+1)}x - k),$$

onde

$$a_{j+1,k} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{2},$$

portanto, $a_{1,k}$ é a restrição de h_1 ao intervalo $[k2^{j_0+1}, (k+1)2^{j_0+1})$. Como $\delta_1 = h_1 - h_0$, as restrições de δ_1 aos intervalos $[k2^{j_0+1}, (k+\frac{1}{2})2^{j_0+1})$ e $[(k+\frac{1}{2})2^{j_0+1}, (k+1)2^{j_0+1})$ serão $d_{1,k}$ e $-d_{1,k}$, respectivamente, onde

$$d_{j+1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{2},$$

logo, δ_1 restrita ao intervalo $[k2^{j_0+1}, (k+1)2^{j_0+1})$ é $d_{1,k}\psi(2^{-(j_0+1)}x - k)$, pois, $\psi(2^{-j}x - k) = \phi(2^{-(j+1)}x - k) - \phi(2^{-(j+1)}x - (k+1))$. Assim, temos

$$\delta_1(x) = \sum_{k=-2^{j_1-j_0-1}}^{2^{j_1-j_0-1}-1} d_{1,k} \psi(2^{-(j_0+1)}x - k)$$

Neste procedimento passamos de h_0 para sua versão de menor resolução por um fator de 2, h_1 . O que fizemos foi substituir os valores de h_0 nos subintervalos $[2k2^{j_0}, (2k+1)2^{j_0})$ e $[(2k+1)2^{j_0}, (2k+2)2^{j_0})$, por suas médias, $a_{1,k}$, veja Figura 3.

A seguir, escrevemos $h_1 = h_2 + \delta_2$, onde h_2 é a seguinte função constante por parte em intervalos da forma $[k2^{j_0+2}, (k+1)2^{j_0+2})$:

$$h_2 = \sum_{k=-2^{j_1-j_0-2}}^{2^{j_1-j_0-2}-1} a_{2,k} \phi(2^{-(j_0+2)}x - k),$$

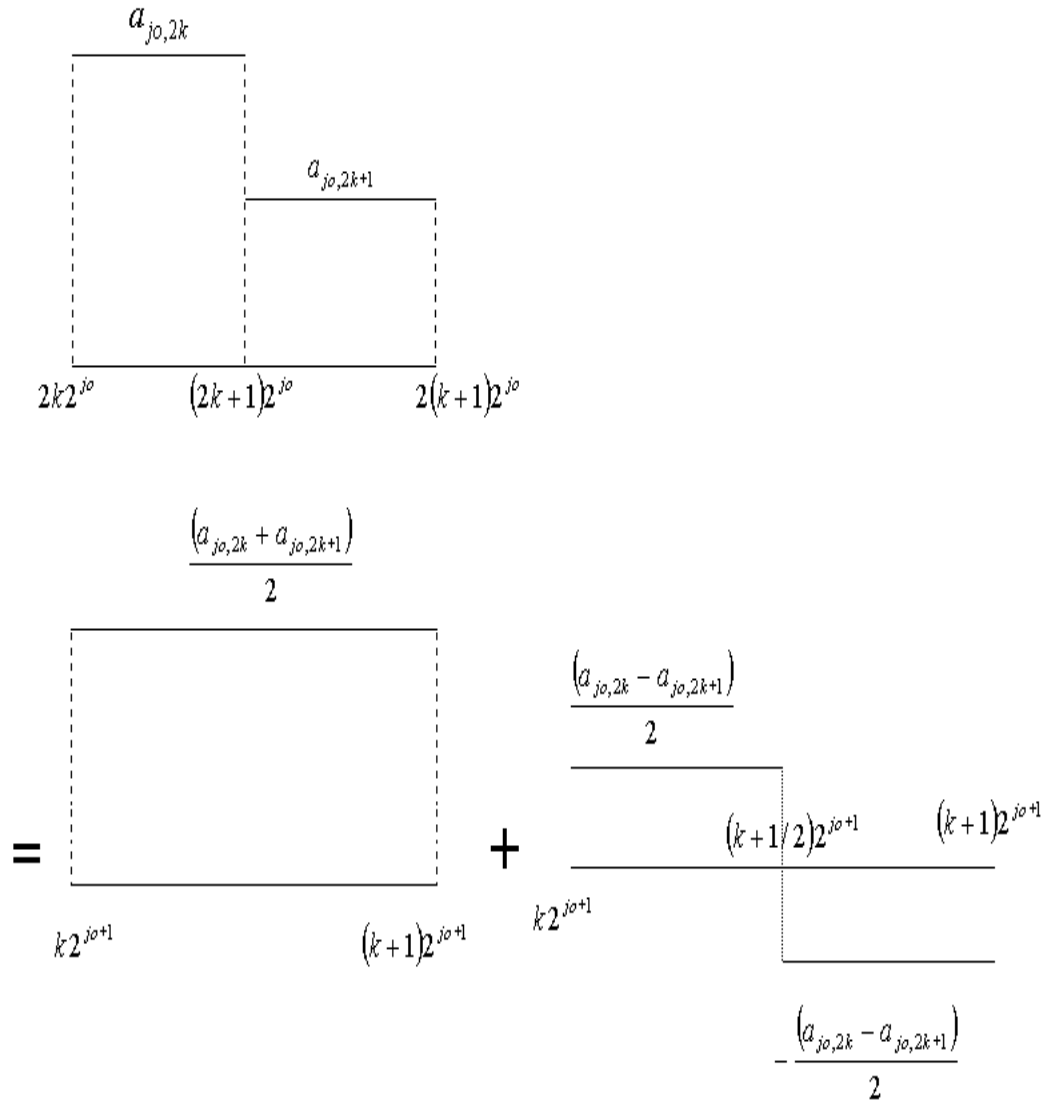


Figura 3: A passagem de j_0 para $j_0 + 1$

então,

$$\delta_2 = \sum_{k=-2^{j_1-j_0-2}}^{2^{j_1-j_0-2}-1} d_{2,k} \psi(2^{-(j_0+2)}x - k).$$

Portanto,

$$h_0 = h_2 + \sum_{j=1,2} \sum_{k=-2^{j_1-j_0-j}}^{2^{j_1-j_0-j}-1} d_{j,k} \psi(2^{-(j_0+j)}x - k).$$

Repetindo-se o procedimento acima $j_1 - j_0$ vezes, teremos

$$h_0(x) = h_{j_1-j_0}(x) + \sum_{j=1}^{j_1-j_0} \sum_{k=-2^{j_1-j_0-j}}^{2^{j_1-j_0-j}-1} d_{j,k} \psi(2^{-(j_0+j)}x - k),$$

onde $h_{j_1-j_0}(x) = a_- \phi(2^{-j_1}x) + a_+ \phi(2^{-j_1}x + 1)$, $a_- = 2^{-j_1} \sum_{k=-2^{j_1}}^{-1} a_{0,k}$ e $a_+ = 2^{-j_1} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} a_{0,k}$.

Aplicando-se o procedimento acima n vezes a $h_{j_1-j_0}$, teremos,

$$\begin{aligned} h_{j_1-j_0} &= \frac{a_-}{2^n} \phi(2^{-(j_1+n)}x + 1) + \frac{a_+}{2^n} \phi(2^{-(j_1+n)}x) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_-}{2^j} \psi(2^{-(j_1+j)}x + 1) + \frac{a_+}{2^j} \psi(2^{-(j_1+j)}x) \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$h_0(x) = \frac{a_-}{2^n} \phi(2^{-(j_1+n)}x + 1) + \frac{a_+}{2^n} \phi(2^{-(j_1+n)}x) + \Delta_n$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sum_{j=1}^{j_1-j_0} \sum_{k=-2^{j_1-j_0-j}}^{2^{j_1-j_0-j}-1} d_{j,k} \psi(2^{-(j_0+j)}x - k) \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_-}{2^j} \psi(2^{-(j_1+j)}x + 1) + \frac{a_+}{2^j} \psi(2^{-(j_1+j)}x) \right) \end{aligned}$$

é uma combinação linear finita de wavelets $\psi_{j,k}$.

Para finalizar, temos $\|h_0 - \Delta_n\| = 2^{\frac{j_1}{2}}(a_- + a_+)2^{-\frac{n}{2}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. \square

Note que as wavelets nos permitem recuperar os detalhes que seriam perdidos com a diminuição de resolução quando se passa de uma escala para a escala seguinte, ou seja, elas medem as flutuações entre duas escalas consecutivas.

A wavelet de Haar é a única wavelet com suporte compacto para a qual se tem uma forma analítica fechada. As wavelets de Daubechies [1, 4] também têm suportes compactos e podem ser tomadas tão suaves e com quantos momentos nulos quanto desejamos; entretanto, não se conhece uma forma analítica fechada para as mesmas e elas são calculadas numericamente, conforme será descrito na seção 4.2.

2.1.1 Cálculo Rápido dos Coeficientes de wavelets na Base de Haar

Note que para a wavelet de Haar temos as seguintes relações

$$\psi(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x-1) \right) \quad (3)$$

$$\phi(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x-1) \right). \quad (4)$$

Veremos na Seção 3 que uma propriedade geral das wavelets é aquela que generaliza as relações (3) e (4), ou seja,

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x-k)$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x-k),$$

veja equações (32) e (55), respectivamente.

Para a wavelet de Haar, trivialmente, temos $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g_0 = -g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h_k, g_k = 0$, para os demais valores de k .

Das relações (3) e (4), temos

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - n) = \frac{\phi_{j-1,2n} - \phi_{j-1,2n+1}}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\phi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}x - n) = \frac{\phi_{j-1,2n} + \phi_{j-1,2n+1}}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Se definirmos o coeficiente de wavelet $d_{j,k}$ e a “média” $a_{j,k}$ como as projeções de f sobre $\psi_{j,k}$ e $\phi_{j,k}$, respectivamente, ou seja, $a_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$ e $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$, ao multiplicarmos as equações (5) e (6) por $f(x)$ e as integrarmos de $-\infty$ a ∞ , teremos as seguintes relações

$$d_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j-1,2n} - a_{j-1,2n+1}) \quad (7)$$

$$a_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j-1,2n} + a_{j-1,2n+1}) \quad (8)$$

que nos permitem o cálculo rápido dos coeficientes de wavelets, $d_{j,k}$, $j > j_0$, a partir de $\{a_{j_0,k}\}_k$, onde j_0 pode ser visto como uma escala fina, tal que a projeção de f sobre o espaço das funções constantes em intervalos da forma $[k2^{j_0}, (k+1)2^{j_0})$, ou seja, $\sum_k a_{j_0,k} \phi_{j_0,k}$, seja uma boa aproximação para f .

Na Seção 4, veremos que para uma wavelet em geral, temos as seguintes relações

$$a_{j,n} = \sum_k \bar{h}_k a_{j-1,2n+k}$$

$$d_{j,n} = \sum_k \overline{g_k} a_{j-1,2n+k}.$$

Somando-se (7) e (8), temos

$$a_{j-1,2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j,n} + d_{j,n}) \quad (9)$$

Subtraindo-se (7) e (8), temos

$$a_{j-1,2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j,n} - d_{j,n}). \quad (10)$$

Na Seção 4, veremos que para uma wavelet em geral, temos as seguintes relações

$$a_{j-1,n} = \sum_k \overline{h_{n-2k}} a_{j,k} + \sum_k \overline{g_{n-2k}} d_{j,k}. \quad (11)$$

Das relações (9) e (10), podemos reconstruir a função a partir de seus coeficientes de wavelets.

Na prática, dado uma coleção arbitrária de $N = 2^n$ valores, tratamos estes como se fossem $a_{0,k}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1 = N - 1$ e através das relações (7) e (8) obtemos uma nova representação para a mesma, ou seja, $\{a_{n,0}, d_{j,k}, j = 1, \dots, n, k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1\}$ e a partir deste e das relações (9) e (10), podemos voltar aos valores iniciais. Nos problemas de interesse, a representação em termos de coeficientes de wavelets é esparsa no sentido que a maioria dos coeficientes $d_{j,k}$ são nulos ou muito pequenos e podemos ignorá-los, daí a idéia de compressão por trás da representação em bases de wavelets. Note que o procedimento descrito pelas equações (7) e (8) para se calcular os coeficientes de wavelets haar requer $\sum_{j=0}^{n-1} 2 \cdot 2^{n-j} = N - 1$ operações (somadas e multiplicações).

2.2 As wavelets de Daubechies

Na Seção 11 construiremos as wavelets de Daubechies, ${}_N\psi$. Tais wavelets possuem, todos os momentos até ordem $N - 1$ nulos, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} x^l \psi(x) dx = 0$ ($l = 0, \dots, N - 1$); além disso, $|\text{supp } {}_N\psi| = 2N - 1$, e para $N \gg 1$, ${}_N\psi \in C^{\mu N}$, onde $\mu \simeq 0.2$.

A wavelet de Haar pode ser vista como um caso particular das wavelets de Daubechies quando $N = 1$.

No caso das wavelets de Daubechies, ${}_N\psi$, os valores de ${}_N h_k$ serão diferentes de zero apenas para $2N$ valores de k , digamos $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$, eles são raízes de equações algébricas, geralmente, calculados por métodos numéricos (veja tabela 6.1 de [1]). Conforme será visto na Seção 3, os valores de g_k e h_k estão relacionados e uma possível relação entre eles é, por exemplo, $g_k = (-1)^k h_{2N-1-k}$.

Em nossas aplicações ao problema de processamento de imagens digitais, nos restringiremos a wavelet ${}_2\psi$, também conhecida na literatura por Daub4. Neste caso, os valores exatos de seus coeficientes de filtros são

$$\begin{aligned} h_0 &= (1 + \sqrt{3})/4\sqrt{2} \\ h_1 &= (3 + \sqrt{3})/4\sqrt{2} \\ h_2 &= (3 - \sqrt{3})/4\sqrt{2} \\ h_3 &= (1 - \sqrt{3})/4\sqrt{2} \end{aligned} \tag{12}$$

e $h_k = 0$, para os demais valores de k .

Os coeficientes satisfazem

$$\begin{aligned} h_3 - h_2 + h_1 - h_0 &= 0 \\ 0h_3 - 1h_2 + 2h_1 - 3h_0 &= 0, \end{aligned}$$

isto faz com que ${}_2\psi$ tenha os momentos de ordem zero e um nulos, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi(x) dx$.

Sob o ponto de vista prático, quanto mais momentos nulos uma wavelet possuir, menores serão os coeficientes correspondentes as partes de f que são suaves, ou seja, os coeficientes de wavelets serão apreciáveis onde f não for suave.

Observação 2.2. *A vantagem de uma wavelet ψ ter vários momentos nulos nos conduz a uma alta compressibilidade, porque os coeficientes de wavelets das escalas mais finas de uma função são essencialmente nulos onde a função é suave. Como $\int \phi(x) dx = 1$, o mesmo não acontecerá com $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$. Mesmo assim se $\int x^l \phi(x) dx = 0$ para $l = 1, \dots, L - 1$, se fizermos uma expansão de Taylor de $f(k2^{-J} + 2^{-J}x)$ em torno de $k2^{-J}$,*

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_{-J,k} \rangle &= 2^{-\frac{J}{2}} \int f(k2^{-J} + 2^{-J}x) \phi(x) dx \\ &= 2^{-\frac{J}{2}} f(2^{-J}k) + \frac{2^{-(M+\frac{1}{2})J}}{M!} R_L^{L+1} \|\phi\|_1 \max_{|x-2^{-J}k| \leq 2^{-J}R_L} |f^{(L)}(x)| \\ &\simeq 2^{-\frac{J}{2}} f(2^{-J}k), \end{aligned}$$

onde $\text{supp } \phi \subset [-R_L, R_L]$ e podemos concluir que para J grande e para as regiões onde f for suave o erro é desprezível. Com isto temos um método simples para ir de f para os coeficientes da sua escala mais fina $\langle f, \phi_{-J,k} \rangle$.

Em 1989, Coifman sugeriu a Daubechies a construção de uma base ortormal onde não somente ψ como também ϕ tivesse momentos nulos, mais precisamente,

$$\begin{aligned} \int x^l \psi(x) dx &= 0, \quad l = 0, \dots, L - 1 \\ \int \phi(x) dx &= 1, \quad \int x^l \phi(x) dx = 0, \quad l = 1, \dots, L - 1. \end{aligned}$$

Tais wavelets foram denominadas de coiflets e foram usadas nos algoritmos numéricos de [5]. Para uma discussão das coiflets, veja [1], Seção 8.2.

3 A Análise de Resolução Múltipla

As primeiras construções de bases ortonormais de wavelets pareciam um pouco miraculosas. A situação mudou com a chegada da análise de resolução múltipla (*ARM*), formulada em 1986 por Mallat e Meyer. A *ARM* fornece um referencial onde bases de wavelets são naturalmente compreendidas, bem como permite a construção de novas bases. Quando Mallat trabalhou com wavelets de Meyer pela primeira vez, ele estava trabalhando com análise de imagens, onde a idéia de se estudar imagens em várias escalas simultaneamente era popular. Isto o estimulou a ver bases ortonormais de wavelets como uma ferramenta para descrever matematicamente o “incremento na informação” necessário para se ir de uma aproximação grosseira para uma aproximação com maior resolução.

Definição 3.1. *Uma ARM é uma seqüência, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, de espaços fechados de $L^2(\mathbb{R})$, representando os sucessivos níveis de resoluções, tais que eles satisfaçam às seguintes condições:*

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots; \quad (13)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}; \quad (14)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}); \quad (15)$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0; \quad (16)$$

$$f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x - n) \in V_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}; \quad (17)$$

Existe $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, tal que

$$\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ constitui uma base ortonormal para } V_0. \quad (18)$$

Como veremos na Seção 6, a propriedade (18) pode ser relaxada. A propriedade (16) expressa que todos os espaços estão relacionados por escala a um mesmo espaço, V_0 (este é o aspecto da “multiresolução”). Ainda por causa desta propriedade, se $f(x) \in V_j$, então, $f(x - 2^j n) \in V_j$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. As condições (18) e (16) implicam que $\{\phi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_j para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Se definirmos P_j como o operador projeção ortogonal sobre V_j , a condição (15) assegura que $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Cada V_j pode ser interpretado como um espaço de aproximação sucessiva: a aproximação de $f \in L^2(\mathbb{R})$ na resolução 2^j é definida como a projeção de f sobre V_j e quanto menor j , mais fina é a resolução obtida. A condição (16) significa que nenhuma escala é

privilegiada. Os detalhes adicionais necessários para aumentar a resolução de 2^j para 2^{j-1} são dados pela projeção de f sobre o complemento ortogonal de V_j em relação a V_{j-1} , o qual denotamos por W_j : $V_j \oplus W_j = V_{j-1}$. Note que

$$W_j \perp W_{j'}, \quad \text{se } j \neq j'. \quad (19)$$

(Se $j > j'$, por exemplo, então $W_j \subset V_{j'} \perp W_{j'}$.) Segue-se que, para $j < J$, podemos decompor V_j como a seguinte soma direta de subespaços:

$$V_j = V_J \oplus \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{J-k}, \quad (20)$$

onde todos estes subespaços são ortogonais. Em virtude das condições (14) e (15), isto implica que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j, \quad (21)$$

(uma decomposição de $L^2(\mathbb{R})$ em subespaços mutuamente ortogonais). Além disso, os subespaços W_j herdam a propriedade de escala (16) de V_j :

$$f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_0. \quad (22)$$

Para mostrarmos (22), lembramos que $f \in W_j$ se, e somente se, $f \in V_{j-1}$ e $f \perp V_j$. Suponha que $f \in W_j$, então,

$$f(x) = \sum_k a_k \phi(2^{-(j-1)}x - k), \quad (23)$$

e

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle = 0, \quad (24)$$

para todo x .

Em (23) se fizermos $x \rightarrow 2^j x$, temos $f(2^j x) = \sum_k a_k \phi(2x - k)$, para todo x , logo,

$$f(2^j x) \in V_{-1}. \quad (25)$$

Por outro lado, de (24), temos que $\langle f(2^j \cdot), \phi_{0,k} \rangle = 2^{-\frac{j}{2}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle = 0$. Portanto,

$$f(2^j x) \perp V_0. \quad (26)$$

De (25) e (26), temos $f(2^j x) \in W_0$. De maneira análoga, mostra-se que se $f(2^j x) \in W_0$, mostra-se que $f(x) \in W_j$.

Por causa de (22), se $\{\psi(x - k)\}_k$ for uma base ortonormal para W_0 , então, $\{\psi_{j,k}(x)\}_k$ será uma base ortonormal para W_j , visto que, se $f(x) \in W_j$, então, $f(2^j x) \in W_0$, logo, $f(2^j x) = \sum_k a_k \psi(x - k)$, portanto, $f(x) = \sum_k 2^{\frac{j}{2}} a_k \psi(2^{-j}x - k)$, além disso, $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = 2^{-j/2} \langle \psi_{0,k}, \psi_{0,k'} \rangle = \delta_{k,k'}$.

Note que a decomposição (20) nos permite escrever uma função dada na escala 2^j como a soma da sua versão onde a sua resolução foi reduzida por um fator de 2^{j-J} , mais os detalhes correspondentes às escalas intermediárias entre as escalas 2^j e 2^J . Além disso, através de (21), “dissecamos” $L^2(\mathbb{R})$ em fatias correspondendo a detalhes que vão dos mais delicados aos mais grossos, sendo que fatias distintas são ortogonais. Para cada uma destas fatias, digamos, W_j , temos a família de wavelets $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ como uma base ortonormal.

No caso das wavelets de Haar, se tomarmos como ϕ a função definida na introdução e definirmos

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f|_{[2^j k, 2^j(k+1))} = \text{constante}, k \in \mathbb{Z}\},$$

as condições acima são trivialmente satisfeitas (a propriedade (15) é uma imediata consequência do fato de que as funções degraus com saltos nos racionais da forma $k 2^j$ são densas em $L^2(\mathbb{R})$).

Para a wavelet de Haar, temos

$$P_{j-1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (27)$$

A beleza da abordagem usando *ARM* é que desde que exista uma seqüência de subespaços $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ e uma função ϕ satisfazendo as condições (13)-(18), então existe uma função ψ tal que (27) ocorra.

O teorema enunciado abaixo é um dos resultados mais importantes da *ARM*.

Teorema 3.1. *Se uma seqüência de subespaços fechados $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ em $L^2(\mathbb{R})$ e ϕ satisfazem as condições (13)-(18) da Definição 3.1, então existe uma base ortonormal de wavelets $\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ para $L^2(\mathbb{R})$, tal que*

$$P_{j-1} = P_j + \sum_k \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (28)$$

Uma possível escolha de ψ é

$$\psi = \sum_n (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \phi_{-1,n} \quad (29)$$

onde $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$ (a convergência da última série é em sentido L^2).

Prova. A seguir, construiremos explicitamente ψ . Como a *AMR* é “invariante” em relação a (a) translações por inteiros no eixo do tempo e (b) dilatações por potências de 2, a fim de fazer o melhor uso desta simetria temporal, faremos a construção da wavelet mãe no “domínio de Fourier”.

A transformada de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ é definida como

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

Uma propriedade importante da transformada de Fourier é que ela perserva o produto interno, ou seja,

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle.$$

A fórmula (27) é equivalente a dizer que, para j fixo, $\{\psi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ constitui uma base ortonormal para W_j . Por causa de (21) e das condições (14), (15), isto então automaticamente implica que a coleção completa $\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Por outro lado, (22) assegura que se $\{\psi_{0,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para W_0 , então, $\{\psi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ será uma base ortonormal para W_j , para qualquer $j \in \mathbb{Z}$. Nossa tarefa, então, reduz-se a encontrar $\psi \in W_0$ tal que $\psi(\cdot - k)$ constitua uma base ortonormal para W_0 .

Para construir esta ψ , descreveremos algumas propriedades importantes de ϕ e W_0 .

I. Como $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$, e $\{\phi_{-1,n}\}$ forma uma base ortonormal para V_{-1} , temos

$$\phi = \sum_n h_n \phi_{-1,n}, \quad (30)$$

onde da ortogonormalidade de $\{\phi_{-1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, temos,

$$h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \quad e \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\phi_{0,0}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 1. \quad (31)$$

De (30), temos a seguinte relação de escala:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n). \quad (32)$$

Observação 3.1. A identidade (32) é chamada de equação de escala, ela controla toda ARM. Como veremos, o vetor dos coeficientes, h , determina ϕ de maneira única. Ele determina mais ou menos tudo: quando fazemos cálculos numéricos, não se usa a função escala ϕ nem a wavelet mãe que é construída na ARM, mas são os coeficientes h_k que aparecem nos algoritmos. A equação de escala descreve uma espécie de “auto-similaridade”. Ela pode ser comparada com a equação $K = \cup_{i=1}^r f_i(K)$ que aparece na teoria de conjuntos fractais. O fato de que ϕ tem a propriedade (32), é obviamente uma restrição muito grande nas possíveis escolhas de ϕ .

Observação 3.2. A relação $\langle \phi_{0,n}, \phi \rangle = \delta_{0n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ nos leva a seguinte relação de consistência:

$$\begin{aligned} \delta_{0n} &= \int \phi(x - n) \overline{\phi(x)} dx = 2 \sum_{k,l} h_k \overline{h_l} \int \phi(2x - 2n - k) \overline{\phi(2x - l)} dx \\ &= \sum_{k,l} h_k \overline{h_l} \int \phi(x' - 2n - k) \overline{\phi(x' - l)} dx' = \sum_{k,l} h_k \overline{h_l} \delta_{2n+k,l} \\ &= \sum_k h_k \overline{h_{2n+k}}, \end{aligned}$$

em particular, devemos ter $\sum_k |h_k|^2 = 1$.

Observação 3.3. Suponha que $h \in l^1(\mathbb{Z})$ e que $\int \phi(x) dx \neq 0$. Então,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k = \sqrt{2}. \quad (33)$$

De fato, integrando a equação de escala (32) em relação a x de $-\infty$ a ∞ , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sqrt{2} \sum_k h_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \quad (34)$$

dividindo-se a equação acima por $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$, temos o resultado desejado. \square

Como

$$\begin{aligned} \widehat{\phi(2 \cdot - n)}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} \phi(2x - n) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega n}{2}} \widehat{\phi}(\omega/2), \end{aligned}$$

temos

$$\widehat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\omega/2} \widehat{\phi}(\omega/2), \quad (35)$$

onde a convergência em ambas as somas ocorre no sentido de L^2 . A fórmula (35) pode ser reescrita como

$$\widehat{\phi}(\omega) = m_o(\omega/2) \widehat{\phi}(\omega/2), \quad (36)$$

onde

$$m_o(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\omega}. \quad (37)$$

A igualdade em (36) ocorre em quase todo ponto. Conforme mostra (31), m_o é uma função periódica com período 2π e está em $L^2([0, 2\pi])$, pois,

$$\int_0^{2\pi} |m_o(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} \sum_{n,n'} h_n \overline{h_{n'}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-n')\omega} d\omega = \pi \left(\sum_n |h_n|^2 \right) = \pi.$$

II. A ortonormalidade de $\phi(\cdot - k)$ conduz-nos a propriedades especiais de m_o . Como a transformada de Fourier preserva produto interno, ou seja, $\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\delta_{k,o} &= \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k} \rangle \\
&= \langle \hat{\phi}_{0,0}, \hat{\phi}_{0,k} \rangle \\
&= \int |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} e^{ik\omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega \\
&\equiv 2\pi c_k,
\end{aligned}$$

onde c_k é o k -ésimo coeficiente de Fourier da função $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2$. Como a série de Fourier de uma função em $L^2([0, 2\pi])$ converge em quase todos os pontos para a função,

$$\sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \quad a.e.$$

É claro que podemos repetir os argumentos acima na direção oposta e concluirmos que se (38) acontece, então $\langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k} \rangle = \delta_{k,o}$. Portanto, temos o seguinte lema.

Lema 3.1. *Translações por inteiros $\phi_{0,k}(x) = \phi(x - k)$ de uma função $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ constituem um sistema ortonormal se, e somente se,*

$$\sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \quad (38)$$

em quase todos os pontos.

Substituindo (36) em (38), conduz-nos a ($\eta = \omega/2$)

$$\sum_l |m_o(\eta + \pi l)|^2 |\hat{\phi}(\eta + \pi l)|^2 = (2\pi)^{-1},$$

em quase todos os pontos; quebrando-se esta soma em l pares e em l ímpares (o que é permitido, por causa da convergência absoluta), usando-se a periodicidade de m_o e aplicando-se (38), uma vez mais, obtemos

$$|m_o(\eta)|^2 + |m_o(\eta + \pi)|^2 = 1 \quad a.e. \quad (39)$$

Note que de (39),

$$|m_o(\omega)| \leq 1 \quad (a.e \text{ em } \mathbb{R}). \quad (40)$$

III. Agora vamos caracterizar W_0 : $f \in W_0$ é equivalente a $f \in V_{-1}$ e $f \perp V_0$. Como $f \in V_{-1}$, temos

$$f = \sum_n f_n \phi_{-1,n},$$

com $f_n = \langle f, \phi_{-1,n} \rangle$. Isto implica

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f_n e^{-in\omega/2} \hat{\phi}(\omega/2). \quad (41)$$

Introduzindo-se a função

$$m_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f_n e^{-in\omega} \quad (42)$$

a equação (41) torna-se

$$\hat{f}(\omega) = m_f\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (43)$$

A série aparecendo em (42) é convergente em quase todo ponto em \mathbb{R} . Os argumentos acima podem ser invertidos: se (43) é para alguma função $m_f \in L^2([0, 2\pi])$, então $f \in V_{-1}$.

A restrição $f \perp V_0$ implica que $f \perp \phi_{0,k}$ para todo k , isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, \phi_{0,k} \rangle \\ &= \langle \hat{f}, \hat{\phi}_{0,k} \rangle \\ &= \int \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{ik\omega} d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \sum_l \hat{f}(\omega + 2\pi l) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)} d\omega, \end{aligned}$$

portanto,

$$\sum_l \hat{f}(\omega + 2\pi l) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)} = 0, \quad (44)$$

onde a série em (44) converge absolutamente em $L^1([-\pi, \pi])$. Substituindo (36) e (43) em (44), reagrupando as somas para l pares e l ímpares, lembrando-se que m_o e m_f são 2π -periódicas e usando (38), obtemos

$$m_f(\eta) \overline{m_o(\eta)} + m_f(\eta + \pi) \overline{m_o(\eta + \pi)} = 0 \quad a.e. \quad (45)$$

Reciprocamente, se $f \in V_{-1}$ e (45) acontece, então $f \perp W_0$. Em outras palavras, $f \in V_{-1}$ e $f \perp W_0$, se e somente se, (45) for verdade.

Defina os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} M_o &= (m_o(\omega), m_o(\omega + \pi)), \\ M_f &= (m_f(\omega), m_f(\omega + \pi)) \quad e \\ M'_o &= (\overline{m_o(\omega + \pi)}, -\overline{m_o(\omega)}). \end{aligned}$$

Note que $M_o \perp M'_o$, além disso, de (39), $\det[M_o, M'_o] = -1$, $|M_o| = 1$ e $|M'_o| = 1$. Logo, M_o e M'_o formam uma base ortonormal para \mathbb{C}^2 , como de (45), M_o e M_f são ortogonais, segue-se que

$$M_f = \lambda(\omega)M'_o, \quad (46)$$

onde o coeficiente $\lambda(\omega)$ é dado por

$$\lambda(\omega) = \langle M_f, M'_o \rangle = m_f(\omega)m_o(\omega + \pi) - m_f(\omega + \pi)m_o(\omega),$$

como m_o e m_f são 2π -periódicas, a função $\omega \mapsto \lambda(\omega)$ também o será e satisfaz

$$\lambda(\eta) = -\lambda(\eta + \pi) \quad a.e. \quad (47)$$

Esta equação pode ser colocada da seguinte forma

$$\lambda(\eta) = e^{i\eta} (e^{-i\eta}\lambda(\eta)) \equiv e^{i\eta}\nu(2\eta), \quad (48)$$

onde ν é 2π -periódica. A seguir, mostraremos que $\nu \in L^2([0, 2\pi])$.

De (48) e (46), segue-se que $M_f(\omega) = e^{i\omega}\nu(2\omega)M'_o(\omega)$, como M'_o é unitário,

$$|\nu(\omega)|^2 = |\lambda(\omega/2)|^2 = |M_f(\omega/2)|^2 = |m_f(\omega/2)|^2 + |m_f(\omega/2 + \pi)|^2, \quad (49)$$

isto implica que

$$\begin{aligned} \|\nu\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\nu(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} (|m_f(\omega/2)|^2 + |m_f(\omega/2 + \pi)|^2) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (|m_f(\omega)|^2 + |m_f(\omega + \pi)|^2) d\omega \quad (\text{fizemos } \frac{\omega}{2} \rightarrow \omega) \\ &= \frac{1}{\pi} \|m_f\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 = \sum_k |f_k|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade acima usamos (49) e fizemos a mudança de variáveis $\frac{\omega}{2} \rightarrow \omega$ e na terceira escrevemos $\int_0^\pi |m_f(\omega + \pi)|^2 d\omega = \int_\pi^{2\pi} |m_f(\omega)|^2 d\omega$.

Substituindo (48) em (46) e tomando-se a primeira componente de M_f , concluímos que se $f \in W_0$, então

$$m_f(\omega) = e^{i\omega}\nu(2\omega)\overline{m_o(\omega + \pi)} \quad (50)$$

substituindo (50) em (43), temos

$$\hat{f}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{m_o(\omega/2 + \pi)} \nu(\omega) \hat{\phi}(\omega/2), \quad (51)$$

onde ν é 2π -periódica.

Reciprocamente, se existir $\nu \in L^2([0, 2\pi])$ tal que \hat{f} pode ser escrita na forma (51), então, $f \in W_0$. De fato, se (51) for verdadeiro para alguma $\nu \in L^2([0, 2\pi])$, então temos (43), com

$$m_f(\omega/2) = e^{i\omega/2} \nu(\omega) \overline{m_o(\omega/2 + \pi)}.$$

Por causa de (40) podemos concluir que $m_f \in L^2([0, 2\pi])$ e isto por sua vez implica que $f \in V_{-1}$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} M_f(\omega) &= (m_f(\omega), m_f(\omega + \pi)) = e^{i\omega} \nu(2\omega) (\overline{m_o(\omega + \pi)}, -\overline{m_o(\omega)}) \\ &= e^{i\omega} \nu(2\omega) M'_o, \end{aligned}$$

provando que o vetor M_f é ortogonal a M_o para quase todo ω . Isto mostra que (45) é verdade para quase todo ω ; por outro lado, para $f \in V_{-1}$ isto é equivalente a $f \perp W_0$.

IV. A forma geral de (51) para a transformada de Fourier de $f \in W_0$ sugere que tomemos

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{m_o(\omega/2 + \pi)} \hat{\phi}(\omega/2) \quad (52)$$

como um candidato para a wavelet (correspondente a escolha $\nu(\omega) \equiv 1$).

Afirmamos que se tomarmos ψ como aquela definida por (52), então, o sistema de funções $\{\psi_{0,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ constitui uma base ortonormal para W_0 .

Como $\nu(\omega) = 1$ está $L^2([0, 2\pi])$, segue-se que $\hat{\psi}$ tendo uma representação da forma (51), onde ν vale 1, logo, $\psi \in W_0$.

Ortogonalidade das $\psi_{0,k}$ é fácil de verificar:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{0,k}, \psi_{0,l} \rangle &= \langle \psi_{0,0}, \psi_{0,l-k} \rangle \\ &= \int \psi(x) \overline{\psi(x-k)} dx \\ &= \int e^{ik\omega} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \sum_l |\hat{\psi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Por outro lado, reagrupando-se as somas para l pares e l ímpares e usando o fato que m_o

é 2π -periódica, temos

$$\begin{aligned}
\sum_l |\hat{\psi}(\omega + 2\pi l)|^2 &= \sum_l |m_o(\omega/2 + \pi l + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi l)|^2 \\
&= |m_o(\omega/2 + \pi)|^2 \sum_n |\hat{\phi}(\omega/2 + 2\pi n)|^2 \\
&\quad + |m_o(\omega/2)|^2 \sum_n |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi + 2\pi n)|^2 \\
&= (2\pi)^{-1} [|m_o(\omega/2)|^2 + |m_o(\omega/2 + \pi)|^2] \quad \text{a.e (de (38))} \\
&= (2\pi)^{-1} \quad \text{a.e (de (39))}
\end{aligned}$$

O que mostra que $\int \psi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = \delta_{k,0}$.

Por outro lado, dado uma função arbitrária $f \in W_0$, então existe uma função 2π -periódica $\nu \in L^2([0, 2\pi])$, tal que

$$\hat{f}(\omega) = \nu(\omega) \hat{\psi}(\omega) \quad \text{a.e em } \mathbb{R}. \quad (53)$$

A função ν pode ser expandida em série de Fourier $\sum_k \nu_k e^{-ik\omega}$ a qual converge em quase todos os pontos para $\nu(\omega)$. Segue-se que podemos substituir (53) por

$$\hat{f}(\omega) = \sum_k \nu_k e^{-ik\omega} \hat{\psi}(\omega) \quad (\text{a.e em } \mathbb{R})$$

que é a transformada de Fourier de $f = \sum_k \nu_k \psi_{0,k}$. Portanto, a série $\sum_k \nu_k \psi_{0,k}$ converge em $L^2(\mathbb{R})$ para f . Tudo isto junto, mostra que as $\psi_{0,k}$ formam uma base de W_0 .

A fórmula (52) nos dá somente a transformada de Fourier de ψ . A fim de obter a função ψ devemos voltar para o domínio do tempo. Usando-se (37), temos

$$\begin{aligned}
e^{i\omega/2} \overline{m_o(\omega/2 + \pi)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \overline{h_k} e^{ik(\omega/2 + \pi)} e^{i\omega/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k (-1)^k \overline{h_k} e^{i(k+1)\omega/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k'} (-1)^{k'-1} \overline{h_{-k'-1}} e^{-ik'\omega/2},
\end{aligned}$$

onde fizemos a mudança de variáveis $k = -k' - 1$, $k' \in \mathbb{Z}$. Portanto, (52) pode ser substituído por

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}} e^{-ik\omega/2} \hat{\phi}(\omega/2). \quad (54)$$

Como $2\widehat{\phi(2x-k)}(\omega) = e^{-ik\omega/2} \hat{\phi}(\omega/2)$, de (54), temos

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}} \phi(2x-k), \quad (55)$$

com isto terminamos a demonstração do Teorema. \square

Note que ψ não é determinada de maneira única pelas propriedades (13)-(18) e por (28): se ψ satisfaz (28), o mesmo será verdade para qualquer $\tilde{\psi}$ do tipo

$$\widehat{\tilde{\psi}}(\omega) = \rho(\omega)\widehat{\psi}(\omega), \quad (56)$$

com ρ uma função 2π -periódica e $|\rho(\omega)| = 1$ em quase todos pontos. Em particular, podemos escolher $\rho(\omega) = \rho_o e^{im\omega}$, com $m \in \mathbb{Z}$, $|\rho_o| = 1$, que corresponde a uma mudança de fase de ψ por um fator de fase m . Usaremos esta liberdade para definir (fazendo $\rho(\omega) = e^{-i\omega}$), invés de (29),

$$\psi = \sum_n g_n \phi_{-1,n}, \quad (57)$$

com $g_n = (-1)^n \overline{h_{-n+1}}$, ou, ocasionalmente,

$$g_n = (-1)^n h_{-n+1+2N}, \quad (58)$$

com uma escolha conveniente de $N \in \mathbb{Z}$ (neste caso, $\rho(\omega) = e^{-i(N+1)\omega}$).

3.1 Um exemplo

Vejamos o que a receita (57) nos dá para a *ARM* de Haar. Neste caso, $\phi(x) = 1$, para $0 \leq x < 1$, 0, caso contrário; portanto,

$$\begin{aligned} h_n = \sqrt{2} \int \phi(x) \overline{\phi(2x-n)} dx &= 1/\sqrt{2}, \text{ se } n = 0, 1 \\ &= 0, \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,1} = \psi_{Haar}$, o que não é nenhuma surpresa.

Na Seção 6, veremos como associar a uma função escala, ϕ , uma *ARM*, feito isto, consideraremos mais um exemplo de base ortonormal de wavelets; ou seja, as wavelets de Meyer (veja final da seção 6).

4 Algoritmos Rápidos

4.1 Cálculo Rápidos de Coeficientes de Wavelets

Havíamos descrito um algoritmo rápido para se calcular os coeficientes de wavelets para o caso particular da wavelet de Haar. A seguir, obteremos algoritmos rápidos para se fazer a decomposição (análise) e reconstrução (síntese) de uma função, no caso de uma wavelet arbitrária, por exemplo, as wavelets de Daubechies.

A seguir transcreveremos as relações (32) e (57), ou seja,

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x - k) \quad (59)$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x - k), \quad (60)$$

onde $h_k = \langle \phi, \phi_{-1,k} \rangle$ e g_k está relacionados a h_k , por exemplo, através da relação $g_k = (-1)^k \overline{h_{-k+1}}$ (veja também (58)).

Além das relações acima, também usaremos que

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j. \quad (61)$$

Note que de (59), temos

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}(x) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n) \\ &= 2^{-(j-1)/2} \sum_k h_k \phi(2^{-(j-1)}x - 2n - k) \\ &= \sum_k h_k \phi_{j-1,2n+k}(x), \quad \forall j, n. \end{aligned} \quad (62)$$

De maneira análoga, de (60), temos

$$\psi_{j,k} = \sum_k g_k \phi_{j-1,2n+k}, \quad \forall j, n. \quad (63)$$

De (62), temos

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j,k} \rangle &= \sum_l \overline{h_l} \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j,2k+l} \rangle \\ &= \sum_l \overline{h_l} \delta_{n,2k+l} = \overline{h_{n-2k}}. \end{aligned} \quad (64)$$

De (63), temos

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j-1,n}, \psi_{j,k} \rangle &= \sum_l \overline{g_l} \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j,2k+l} \rangle \\ &= \sum_l \overline{g_l} \delta_{n,2k+l} = \overline{g_{n-2k}}. \end{aligned} \quad (65)$$

Seja P_j a projeção ortogonal sobre V_j , então,

$$P_j f = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k}. \quad (66)$$

Em virtude da ortonormalidade dos $\phi_{j,k}$, $a_{j,k} = \langle P_j f, \phi_{j,k} \rangle$. Como $1 - P_j$ é a projeção ortogonal sobre o complementar de V_j , temos que $\langle (1 - P_j)f, \phi_{j,k} \rangle = 0$, logo, $\langle f, \phi_{j,k} \rangle = \langle P_j f, \phi_{j,k} \rangle$.

A análise de wavelets agora procede na direção de j crescente. Descreveremos o passo $j - 1 \mapsto j$. Assuma que os coeficientes $\{a_{j-1,k}\}_k$ sejam conhecidos e estejam armazenados numa matriz. De (66) e (62), temos

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= \langle P_j f, \phi_{j,n} \rangle \\ &= \langle f, \phi_{j,n} \rangle \\ &= \langle f, \sum_k h_k \phi_{j-1,2n+k} \rangle \\ &= \sum_k \overline{h_k} \langle f, \phi_{j-1,2n+k} \rangle \\ &= \sum_k \overline{h_k} a_{j-1,2n+k}. \end{aligned}$$

Portanto, a passagem de $a_{j-1,\cdot} \mapsto a_j$ é dada pela seguinte relação

$$a_{j,n} = \sum_k \overline{h_k} a_{j-1,2n+k} = \sum_k \overline{h_{k-2n}} a_{j-1,k}. \quad (67)$$

Seja Q_j a projeção ortogonal sobre W_j , então, $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \langle Q_j f, \psi_{j,k} \rangle$, assim, se fizermos $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$, então,

$$Q_j f = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}. \quad (68)$$

Substituindo-se (63) em (68) e multiplicando-se o resultado escalarmente por $\psi_{j,n}$, temos

$$\begin{aligned} d_{j,k} &= \langle Q_j f, \psi_{j,n} \rangle \\ &= \langle f, \psi_{j,n} \rangle \\ &= \langle f, \sum_k g_k \phi_{j-1,2n+k} \rangle \\ &= \sum_k \overline{g_k} \langle f, \phi_{j-1,2n+k} \rangle \\ &= \sum_k \overline{g_k} a_{j-1,2n+k}, \end{aligned}$$

o que nos dá a seguinte recursão $d_{j-1,\cdot} \mapsto d_{j,\cdot}$:

$$d_{j,n} = \sum_k \overline{g_k} a_{j-1,2n+k} = \sum_k \overline{g_{k-2n}} a_{j-1,2n+k}. \quad (69)$$

Dados $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, como $\|P_j f - f\| \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow -\infty$, existe um $j_o \in \mathbb{Z}$ tal que $\|P_{j_o} f - f\|_2 < \epsilon$; assim, há uma escala mais fina, j_o , com a qual começaremos, poderíamos até mesmo supor que a função inicial $f \in V_{j_o}$. O nosso ponto de partida será a seqüência $a_{j_o,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\phi_{j_o,k}(x)} dx$, a qual poderá ser determinada, por exemplo, por integração numérica o que requer o conhecimento de ϕ (veja também Observação 2.2). Na seção seguinte veremos algoritmos rápidos para se calcular numericamente ϕ .

Das relações (67) e (69), temos graficamente o seguinte algoritmo em cascada para calcular os coeficientes de wavelets $\{d_{j,n}\}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{j_o, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_o+1, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_o+2, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_o+3, \cdot} & \dots & a_{j_o+J-1, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_o+J, \cdot} \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & d_{j_o+1, \cdot} & & d_{j_o+2, \cdot} & & d_{j_o+3, \cdot} & \dots & & & d_{j_o+J, \cdot} \end{array}$$

Observação 4.1. Na passagem $j-1 \rightarrow j$, f perde-se a resolução por um fator de 2. A nova versão de baixa resolução de f , que é a projeção de f sobre V_j , é obtida a partir dos coeficientes $a_{j,n}$ e os detalhes correspondentes a esta perda, ou seja, a diferença das projeções de f sobre V_{j-1} e V_j , respectivamente, são armazenados nos coeficientes $d_{j,n}$.

A seguir, veremos como reconstruir f a partir de seus coeficientes de wavelets. De (61), temos

$$P_{j-1} f = P_j f + Q_j f = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}. \quad (70)$$

De um lado, temos $a_{j-1,n} = \langle P_{j-1} f, \phi_{j-1,n} \rangle$. Por outro lado, de (70), (64) e (65), temos

$$\begin{aligned} \langle P_j f, \phi_{j-1,n} \rangle &= \left\langle \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \right\rangle \\ &= \sum_k a_{j,k} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle + \sum_k d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle \\ &= \sum_k a_{j,k} h_{n-2k} + \sum_k d_{j,k} g_{n-2k}, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$a_{j-1,n} = \sum_k h_{n-2k} a_{j,k} + \sum_k g_{n-2k} d_{j,k}. \quad (71)$$

Graficamente, temos o seguinte algoritmo em cascada para reconstruir f a partir de $a_{j_o+J, \cdot}, d_{j_o+J, \cdot}, d_{j_o+J-1, \cdot}, \dots, d_{j_o+2, \cdot}, d_{j_o+1, \cdot}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{j_o+J,.} & \longrightarrow & a_{j_o+J-1,.} & \longrightarrow & a_{j_o+J-2} & \cdots & a_{j_o+1,.} \longrightarrow a_{j_o,.} \\
d_{j_o+J,.} & \nearrow & d_{j_o+J-1,.} & \nearrow & & & d_{j_o+1,.} \nearrow
\end{array}$$

Observação 4.2. *Vimos que no primeiro passo do algoritmo acima precisamos dos valores de ϕ , pois, $a_{j_o,k} = \langle f, \phi_{j_o,k} \rangle$. Em muitos casos, como por exemplo, para as wavelets de Daubechies, não existe uma fórmula analítica fechada para $\phi(x)$ e $\psi(x)$ (exceto, para o caso trivial da wavelet de Haar). No entanto, conforme havíamos mencionado, existem algoritmos rápidos para se calcular ϕ com uma precisão arbitrária e em tais algoritmos, como nos descritos acima, precisamos apenas dos coeficientes h_n . No caso do processamento de imagens que descreveremos na Seção 5.1, podemos tomar $j_o = 0$ como sendo a escala mais fina e seqüência inicial $a_{0,k}$, representa os valores dos pixels da imagem.*

Como veremos na Seção 4.2, precisamos apenas de uma tabela com os valores de h_k para começarmos um trabalho numérico concreto. Nem a função escala ϕ nem a wavelet mãe ψ precisam ser armazenadas, seja numericamente ou não.

4.2 Cálculo Numérico de Wavelets

Em muitos casos, como por exemplo, as wavelets de suportes compactos de Daubechies, não existe uma fórmula analítica fechada para $\phi(x)$ e $\psi(x)$ (exceto, para o caso particular da wavelet de Haar). No entanto, se ϕ é contínua, podemos calcular $\phi(x)$ com uma precisão arbitrária para todo x . A seguir, construiremos um algoritmo numérico rápido para calcular ϕ (lembre-se que ψ está relacionado com ϕ , através da relação (60)).

Aplicaremos (71) para $f = \phi$, a qual é caracterizada pelas seguintes condições:

- (i) $\langle \phi, \phi_{0,n} \rangle = \delta_{0,n}$, $\forall n$, e
- (ii) $\langle \phi, \psi_{j,k} \rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $j < 0$.

Portanto, de (i), $a_{0,n} = \delta_{0,n}$, e de (ii), $d_{j,k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e $\forall j < 0$. Então, de (71), segue-se que $\forall j \leq 0$,

$$a_{j-1,n} = \sum_k h_{n-2k} a_{j,k}, \quad (72)$$

onde $a_{0,n} = \delta_{0,n}$.

Mostraremos na Proposição 4.1 que dado o número racional da forma $2^{-J}K$ (tais números são densos na reta), existe j_o tal que para $j \geq j_o$,

$$|\phi(2^{-J}K) - 2^{j/2} \langle \phi, \phi_{-j,2^{j-J}K} \rangle| \leq C2^{-j\alpha},$$

onde C e j_o são independentes de J e K e como $a_{j-1,n} = \langle \phi, \phi_{j-1,n} \rangle$, o problema de calcularmos $\phi(x)$ em $x = 2^{-J}k$, reduz-se ao cálculo dos $a_{j,n}$ os quais são dados por (72). Como o conjunto dos racionais da forma $2^{-J}K$ é denso em R , podemos com isso plotar o gráfico de ϕ por interpolação (linear ou por funções constantes por partes).

Desde que ϕ tenha suporte compacto e $\phi \in L^1(R)$, então, temos

Proposição 4.1. *Se f for contínua em \mathbb{R} , então para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \overline{\phi(2^j y)} dy = f(x). \quad (73)$$

Se f for uniformemente contínua, então esta convergência pontual também é uniforme. Se f é Hölder contínua com expoente α , $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, então a convergência é exponencialmente rápida em j :

$$|f(x) - 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \overline{\phi(2^j y)} dy| \leq C2^{-j\alpha}. \quad (74)$$

Prova. A função $2^j \phi(2^j \cdot)$ é “aproximadamente uma função δ ” quando $j \rightarrow \infty$. Mais precisamente, como $\int dx 2^j \phi(2^j x) = \int dx \phi(x) = 1$, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \overline{\phi(2^j y)} dy| &= 2^j \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(x+y)] \overline{\phi(2^j y)} dy \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(x+2^{-j}z)] \overline{\phi(z)} dz \right| \\ &\leq \|\phi\|_1 \sup_{|u| \leq 2^{-j}R} |f(x) - f(x+u)|, \end{aligned}$$

(onde supusemos que $\text{supp } \phi \subset [-R, R]$), se ϕ é contínua, isto pode ser feito arbitrariamente pequeno, tomando-se j suficientemente grande. Se f é uniformemente contínua, então, a escolha de j pode ser feita independentemente de x , e a convergência é uniforme. Se f é Hölder contínua, então (74) também é verdadeira. \square

Assuma que ϕ seja contínua ou mesmo Hölder contínua com expoente α . Se x for um racional da forma $x = 2^{-J}K$, então, da Proposição 4.1,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-J}K + y) \overline{\phi(2^j y)} dy \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) \overline{\phi_{-j, 2^{j-J}K}(z)} dz \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{j/2} \langle \phi, \phi_{-j, 2^{j-J}K} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi(2^{-J}K) = \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{j/2} \langle \phi, \phi_{-j, 2^{j-J}K} \rangle.$$

Além disso, para $j \geq j_0$,

$$|\phi(2^{-J}K) - 2^{j/2} \langle \phi, \phi_{-j, 2^{j-J}K} \rangle| \leq C2^{-j\alpha}, \quad (75)$$

onde C e j_0 são independentes de J e K .

Vimos que para $2^{j-J}K$ inteiros ($j \geq J$) os produtos internos $\langle \phi, \phi_{-j, 2^{j-J}K} \rangle = a_{-j, 2^{j-J}K}$ são facilmente calculados através do algoritmo dado por (71).

Se em (75) fizermos $j \geq j_o$, $j = J$ e $k = K$, temos

$$|\phi(2^{-j}k) - 2^{j/2}a_{-j,k}| = |\phi(2^{-j}k) - 2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,k} \rangle| \leq C2^{-\alpha j}.$$

Isto nos permite construir uma seqüência η_j aproximando ϕ , tal que $\eta_j(2^{-j}k) = 2^{j/2}a_{-j,k}$ e nos pontos $x \neq 2^{-j}k$, podemos interpolar estes valores.

Podemos, por exemplo, definir η_j^o como a função constante por partes em intervalos da forma $[2^{-j}(n-1/2), 2^{-j}(n+1/2))$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\eta_j^o(2^{-j}k) = 2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,k} \rangle$.

Outra possível escolha é $\eta_j^1(x)$, linear por partes em intervalos $[2^{-j}n, 2^{-j}(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\eta_j^1(2^{-j}k) = 2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,k} \rangle$.

A proposição abaixo mostra que as seqüências acima construídas convergem exponencialmente rápidas para ϕ .

Proposição 4.2. *Se ϕ for Hölder contínua com expoente α , então existe $C > 0$ e $j_o \in \mathbb{N}$ tais que, para $j \geq j_o$,*

$$\|\phi - \eta_j^o\|_\infty \leq C2^{-\alpha j}, \quad \|\phi - \eta_j^1\|_\infty \leq C2^{-\alpha j}. \quad (76)$$

Prova. Tome um número real qualquer x . Para todo j , escolha n tal que $2^{-j}n \leq x \leq 2^{-j}(n+1)$. Por definição de η_j^ϵ ($\epsilon = 0, 1$), $\eta_j^\epsilon(x)$ é necessariamente uma combinação linear convexa de $2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n} \rangle$ e $2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n+1} \rangle$, seja $\epsilon = 0$ ou 1 . Por outro lado, se j é maior do que j_o ,

$$\begin{aligned} |\phi(x) - 2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n} \rangle| &\leq |\phi(x) - \phi(2^{-j}n)| + |\phi(2^{-j}n) - 2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n} \rangle| \\ &\leq C|x - 2^{-j}n|^\alpha + C2^{-j\alpha} \leq C2^{-j\alpha} \end{aligned}$$

O mesmo é verdade se substituirmos n por $n+1$, ou seja,

$$|\phi(x) - 2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n+1} \rangle| \leq C2^{-j\alpha}.$$

Como $\eta_j^\epsilon(x) = s2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n} \rangle + (1-s)2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n+1} \rangle$, onde $0 \leq s \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \eta_j^\epsilon(x)| &= |s(\phi(x) - 2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n} \rangle) + (1-s)(\phi(x) - 2^{j/2}\langle \phi, \phi_{-j,n+1} \rangle)| \\ &\leq sC2^{-j\alpha} + (1-s)C2^{-j\alpha} = C2^{-j\alpha}. \end{aligned}$$

Aqui C é uma constante independente de x , portanto, (76) é válida. \square

No caso de ϕ ser a função escala associada a wavelet de Haar, $h_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{0,n} + \delta_{1,n})$, então, para todo $j \leq 0$ e todo $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$a_{j,n} = 2^{-\frac{|j|}{2}} \sum_{l=0}^{2^{|j|}-1} \delta_{n,l} = \begin{cases} 2^{-\frac{|j|}{2}}, & \text{se } l = 0, 1, \dots, 2^{|j|} - 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (77)$$

A prova desta relação segue-se por indução: ela é trivialmente válida para $j = 0$, visto que $a_{0,n} = \delta_{0,n}$. Suponha que ela seja válida para j , então de (72), temos

$$\begin{aligned}
a_{j-1,n} &= \sum_k h_{n-2k} a_{j,k} \\
&= \sum_k h_{n-2k} 2^{-\frac{|j|}{2}} \sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} \delta_{k,l} \\
&= 2^{-\frac{|j|}{2}} \sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} \sum_k h_{n-2k} \delta_{k,l} \\
&= 2^{-\frac{|j|}{2}} \sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} h_{n-2l} \\
&= 2^{-\frac{|j|}{2}} \sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_{n,2l} + \delta_{n,2l+1}) \\
&= 2^{-\left(\frac{|j|+1}{2}\right)} \sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} (\delta_{n,2l} + \delta_{n,2l+1}) \\
&= 2^{-\left(\frac{|j|+1}{2}\right)} \sum_{l=0}^{2^{|j|+1}-1} \delta_{n,l}
\end{aligned}$$

e concluímos a demonstração.

A seguir veremos como calcular numericamente a função escala ϕ associada a wavelet de Haar. Vimos que

$$\begin{aligned}
\phi(2^{-J}K) &= \lim_{j \rightarrow -\infty} 2^{\frac{j}{2}} a_{-j, 2^{j-J}K} \\
&= \lim_{j \rightarrow -\infty} 2^{\frac{j}{2}} 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} \delta_{K2^{j-J}, l} \\
&= \lim_{j \rightarrow -\infty} \sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} \delta_{K2^{j-J}, l}. \tag{78}
\end{aligned}$$

Tome $j > J$ fixo.

(i) Se $2^{-J}K < 0$, então, $2^{j-J}K < 0$, logo, $\sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} \delta_{K2^{j-J}, l} = 0$.

(ii) Se se $2^{-J}K > 1$, então, $2^{j-J}K > 2^j > 2^j - 1$, portanto, $\sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} \delta_{K2^{j-J}, l} = 0$.

(iii) Finalmente, se $0 < 2^{-J}K < 1$, então, $2^{j-J}K$ é um inteiro positivo satisfazendo $0 < 2^{j-J}K < 2^j$, logo, $\sum_{l=0}^{2^{|j|-1}} \delta_{K2^{j-J}, l} = 1$.

Em virtude de (78), de (i), (ii) e (iii), temos o resultado esperado:

$$\phi(2^{-J}K) = \begin{cases} 1, & \text{se } 2^{-J}K \in (0, 1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

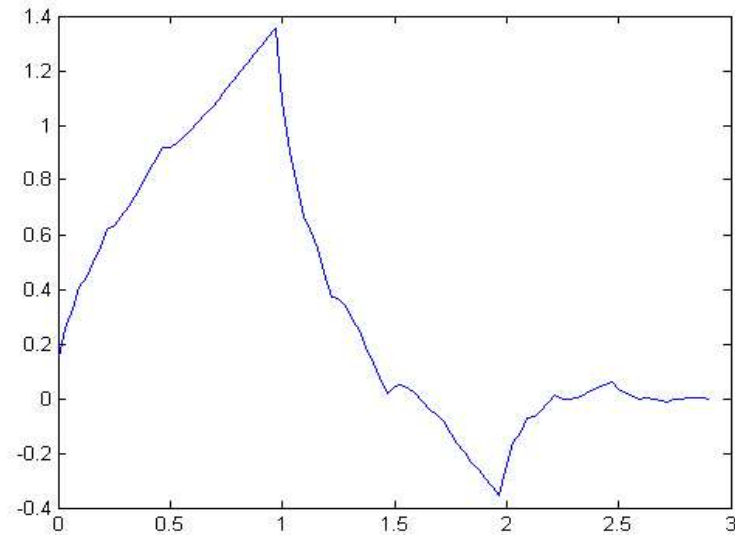


Figura 4: A partir dos valores dos coeficientes h_0, h_1, h_2 e h_3 , dados em (12), calculamos numericamente a função escala associada a Daub4.

Observação 4.3. Se quisermos calcular numericamente os valores de $\psi(x)$, devemos tomar $f = \psi$ em (4.1).

Como $d_{j,k} = \langle \psi, \psi_{j,k} \rangle = \delta_{k,0} \delta_{j,0}$ e $a_{0,n} = \langle \psi, \phi \rangle = 0$, devemos considerar o seguinte processo iterativo:

$$a_{-1,n} = (\dots, 0, 0, g_0, g_1, g_2, g_3, 0, 0, \dots),$$

$$a_{j-1,n} = \sum_k h_{n-2k} a_{j-k}, \quad j \leq -1.$$

5 Aplicações

5.1 Compressão de Imagens Digitais

No sistema *RGB*, uma imagem digital é caracterizada atribuindo-se a cada *pixel*, um vetor com três componentes, cada uma das quais representando as intensidades das cores vermelho, verde e azul, respectivamente. Os valores de cada componente é um número inteiro entre 0 e 255. No caso de uma imagem em preto e branco, as três componentes são iguais e a imagem é completamente caracterizada pelo escalar, que é o valor comum das três intensidades.

Dada uma função f em V_0 , ela pode ser escrita de maneira única como

$$f(x) = \sum_k a_{0,k} \phi(x - k) \quad (79)$$

e de (20) podemos reescrevê-la como

$$f(x) = f_J(x) + \sum_{j=1}^J \Delta_j(x), \quad (80)$$

onde $f_J \in V_J$ e $\Delta_j \in W_j$, portanto, $f_J(x) = \sum_k a_{J,k} \phi_{J,k}$ e $\Delta_j(x) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x)$, onde os coeficientes $a_{J,\cdot}$ e $d_{j,\cdot}$ são calculados recursivamente a partir de $a_{0,\cdot}$, por meio das relações (67) e (69).

De maneira análoga, se conhecermos os coeficientes $a_{J,\cdot}$ e $d_{j,\cdot}$, $j = 1, \dots, J$, podemos, a partir de (71), recursivamente, calcular os $a_{0,\cdot}$ e reconstruir a função f , dada em (79).

Dada uma imagem digital unidimensional, em preto e branco, com 2^l *pixels*, onde l é um inteiro não-negativo, sejam $\{a_{0,k}\}_{k=0,\dots,2^l-1}$ os valores de cada um dos seus *pixels*. Associamos a esta imagem a seguinte função em V_0 : $f(x) = \sum_k a_{0,k} \phi(x - k)$. Com tal definição, os algoritmos acima nos permitem calcular os coeficientes de wavelets de f , $d_{j,k}$, $j = 1, \dots, J = 2^l$ e os coeficientes $a_{J,k}$. Ao projetarmos f sobre um dos subespaços V_j , o que estamos fazendo é obter uma versão de baixa resolução de f , reduzimos a resolução por um fator de 2^j e ao passarmos de V_j para V_{j+1} perdemos a resolução por um fator de 2 e os detalhes que perderíamos são representados por Δ_j . Assim, ao decompor f de acordo com (80), o que fazemos é obter uma versão da imagem onde todos os *pixels* possuem o mesmo valor, que é a “média” de todos os *pixels*, mais detalhes correspondentes às escalas intermediárias.

Sob o ponto de vista computacional, começamos com uma imagem unidimensional com 2^l *pixels*, armazenada num vetor A , com 2^l posições. No primeiro passo passamos de V_0 para V_1 , usando-se as relações (67) e (69), geramos 2^{l-1} coeficientes $\{a_{1,k}\}_{k=0}^{2^{l-1}-1}$ e 2^{l-1} coeficientes $\{d_{1,k}\}_{k=0}^{2^{l-1}-1}$; fazemos $A[k] = a_{1,k}$, para $k = 0, \dots, 2^{l-1} - 1$ e $A[2^{l-1} + k] = d_{1,k}$, para $k = 0, \dots, 2^{l-1} - 1$. Com isso, temos uma imagem de baixa resolução, $f_1 \in V_1 \subset V_0$, com resolução diminuída por fator de dois, armazenada nas primeiras 2^{l-1} posições de A , nas posições seguintes estão os detalhes, correspondentes a passagem de V_0 para V_1 , que é a projeção de f sobre W_1 . Podemos repetir este processo a f_1 e partindo-se de

seus coeficientes $\{a_{1,k}\}_{k=0}^{2^{l-1}-1}$ e das relações (67) e (69) e encontrarmos os coeficientes $\{a_{2,k}\}_{k=0}^{2^{l-2}-1}$ e $\{d_{2,k}\}_{k=0}^{2^{l-2}-1}$; estes serão armazenados nas 2^{l-1} primeiras posições de A , sendo que $A[k] = a_{2,k}$ para $k = 0, \dots, 2^{l-2} - 1$ e $A[2^{l-2} + k] = d_{2,k}$, para $k = 0, \dots, 2^{l-2} - 1$. Nas primeiras 2^{l-2} posições de A temos a versão de f , $f_2 \in V_2 \subset V_0$, onde a resolução foi diminuída por um fator 2, em relação à versão anterior, nas posições seguintes os detalhes correspondentes às escalas intermediárias, em ordem decrescente. Repetindo-se o processo l vezes, na l -ésima vez, a partir da versão $f_{l-1} \in V_{l-1} \subset V_0$ de f e das relações (67) e (69), obtemos $a_{l,0}$ e $d_{l,0}$ que serão armazenados em $A[0]$ e $A[1]$, respectivamente. Com isso teremos passado de um vetor A para um vetor CW , sendo que neste temos os coeficientes de wavelets de f . Cada passo no processo acima pode ser implementado por uma matriz invertível (ortogonal, nos exemplos que consideraremos), o que significa que podemos a partir do vetor CW obter o vetor A e, portanto, reconstruir a imagem.

No caso de uma imagem colorida, os coeficientes acima $a_{j,k}$ e $d_{j,k}$ serão vetores com três componentes e aplicamos o procedimento acima a cada componentes, separadamente.

Imagine que tenhamos uma imagem com $2^l \times 2^l$ pixels, a qual pode ser armazenada numa matriz quadrada A , de ordem 2^l , neste caso, tratamos cada linha ou coluna como se fosse uma imagem unidimensional, aplicando-se o processo acima no cálculo dos coeficientes de wavelets.

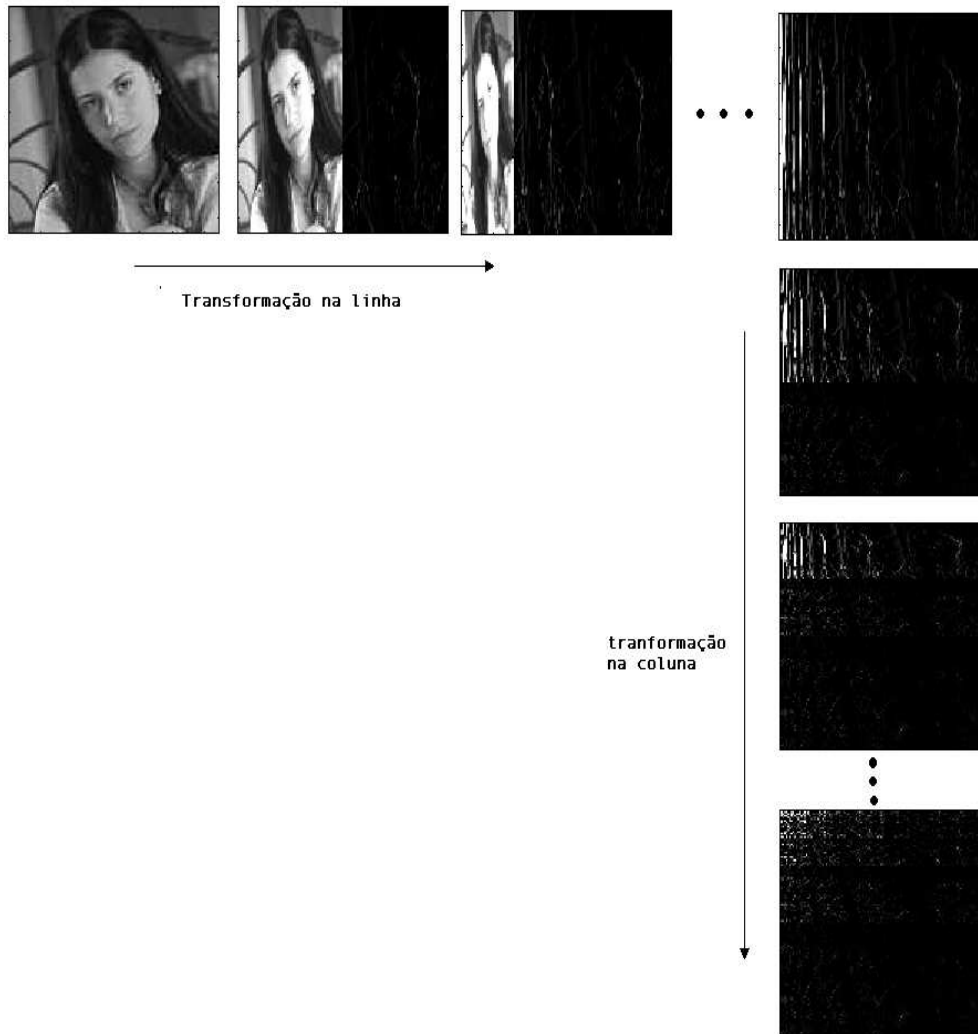


Figura 5: A *DECOMPOSIÇÃO PADRÃO*. No primeiro passo, associamos a cada linha da imagem uma função em V_0 , conforme foi descrito acima, em seguida, para cada linha calculamos os coeficientes de wavelets. A seguir, associamos a cada uma das colunas transformadas no processo anterior uma função em V_0 e aplicamos o processo acima às mesmas e obtemos os respectivos coeficientes de wavelets. Note que em $A[0,0]$ está a “media” dos pixels, nas demais posições estão armazenados os coeficientes de wavelets, propriamente ditos. Como estas operações são invertíveis, podemos inverter o processo de decomposição e reconstruir a imagem inicial.

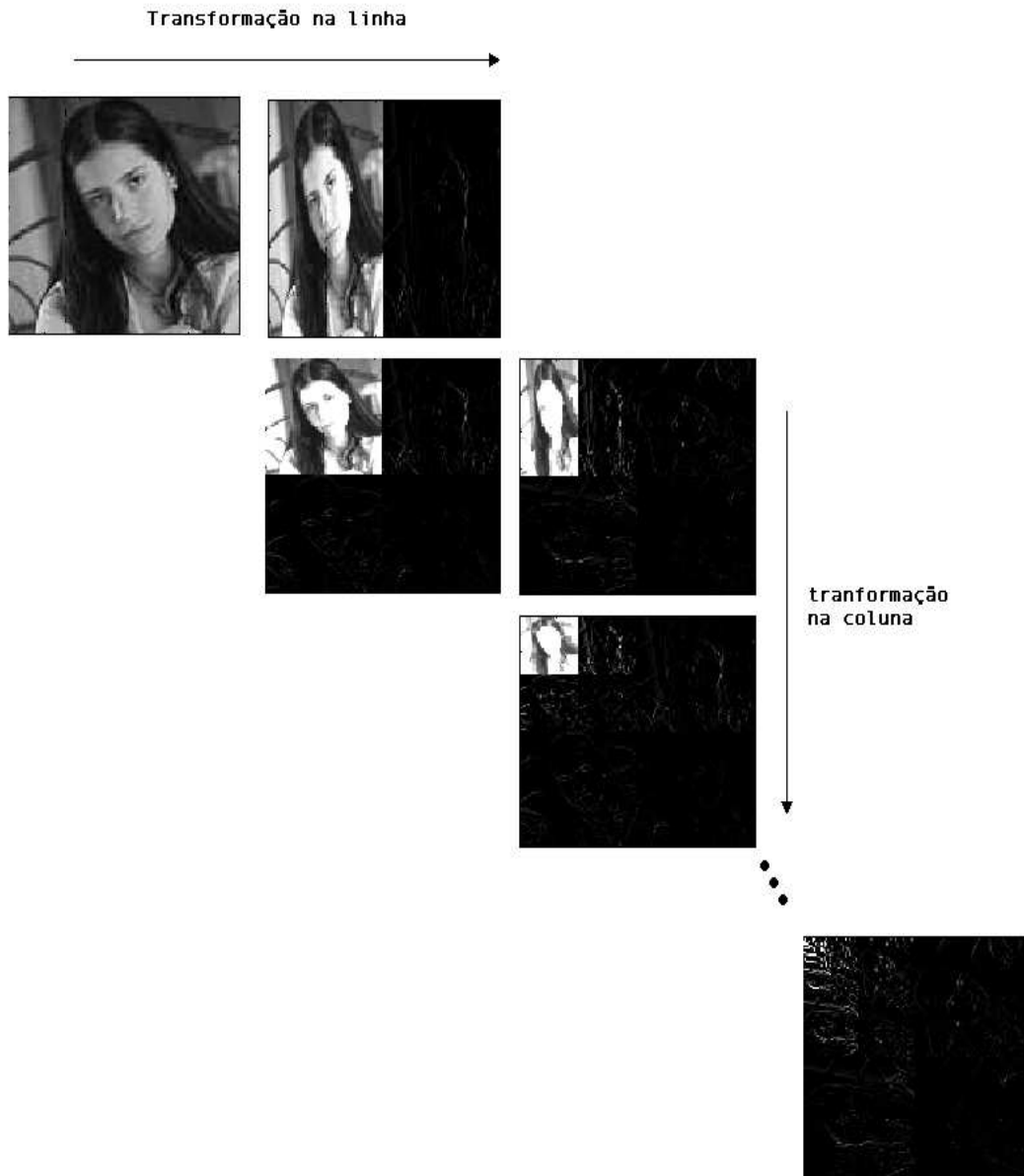


Figura 6: A DECOMPOSIÇÃO NÃO-PADRÃO. Aplica-se operações em linhas e colunas alternadamente. Associamos à cada linha da imagem uma função em V_0 ; a seguir, decompomos cada linha aplicando-se apenas um passo, o processo descrito na passagem de V_0 para $V_1 \oplus W_1$, depois, tratamos cada coluna resultante como se fosse uma função em V_0 e as decompomos, como feito no passo anterior, onde as linhas foram substituídas pelas colunas. No passo seguinte tomaremos a versão de baixa resolução da imagem original a qual está armazenada numa submatriz, de A , restrita aos $A[i, j]$ com $i, j = 0, \dots, 2^{l-1} - 1$ (nas demais posições teremos os coeficientes de wavelets). A seguir, repetimos o processo à versão de baixa resolução da imagem obtida no passo anterior e teremos uma submatriz de A , restrita a $A_1[i, j]$ com $i, j = 0, \dots, 2^{l-2} - 1$, na qual está uma nova versão de baixa resolução da imagem (nas demais posições os coeficientes de wavelets). Prosseguindo desta forma, após, l passos, encontraremos uma submatriz de A , formada por $A[0, 0]$ contendo a “média” de todos os pixels e nas demais posições estarão os coeficientes de de wavelets.

$$Q = \begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_0 & h_1 \\ h_1 & -h_0 & h_3 & -h_2 \end{pmatrix}$$

a qual é equivalente a matriz

$$Q_1 = \begin{pmatrix} h_0 + h_2 & h_1 + h_3 \\ h_1 + h_3 & -h_0 - h_2 \end{pmatrix}.$$

atuando em vetores (a, b) .

Por causa das relações $h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1$ e $h_2h_0 + h_3h_1 = 0$, as matrizes Q_m são ortogonais.

5.1.1 A Necessidade da Compressão

Como sabemos, a quantidade de informações armazenadas, transmitidas e manuseadas por computadores tem crescido exponencialmente nas últimas décadas. Dois desenvolvimentos recentes têm contribuído para este efeito, um deles é o surgimento dos sistemas de multi-mídia juntamente com suas numerosas aplicações. O tempo em que o computador manuseava apenas texto e números já se passou e foi substituído pela era dos sons, imagens, filmes e realidade virtual. Outro desenvolvimento é a crescente disponibilidade da internet que fez com que tais informações estivessem à disposição de uma quantidade enorme de usuários. Este dois desenvolvimentos resumem-se no chamado “World Wide Web”, um sistema interativo e de multi-mídia baseado na informação.

Este desenvolvimento só foi possível por causa da rápida evolução dos hardwares. O desempenho das CPU's, discos e canais de transmissão têm crescido enormemente. Mesmo assim temos alguns problemas e para entendermos melhor mencionaremos os seguintes fatos:

1. Para armazenar uma imagem moderadamente grande, digamos com 512×512 pixels e 24 bit de cor, requer cerca de 0.75 MBytes. Um vídeo de sinal tipicamente tem 30 imagens por segundo.
2. Uma fotografia padrão de 35 mm digitalizada a uma resolução de $12 \mu m$ requer 18 MBytes.
3. Um segundo de vídeo colorido NTSC requer 23 MBytes.

Isto mostra que os atuais hardwares são inadequado (ou tecnicamente ou economicamente). As técnicas de compressão fornecem uma solução.

Se pudermos representar a informação num forma comprimida, podemos obviamente: economizar espaço, tempo de cpu e tempo de transmissão.

A maioria da informação que usamos é altamente correlacionada, em outras palavras, ela inerentemente contém redundância; portanto, parece ser possível compressão sem perda de informação. O requerimento básico da compressão é que se possa mudar rapidamente dos dados originais aos comprimidos.

5.1.2 A Idéia Geral

Existem dois tipos de esquemas de compressão: com perda e sem perda.

No caso de compressão sem perda, estamos interessados em reconstruir os dados exatamente, sem qualquer perda de informação, como nos arquivos de texto.

No caso de compressão com perda, permitimos um erro, desde que a qualidade depois da compressão seja aceitável. O esquema de compressão com perda tem a vantagem que podemos atingir fatores de compressões muito maiores do que nas compressões sem perda; entretanto, ele só pode ser usado no caso em que pode-se substituir os dados originais por uma aproximação que seja fácil de se comprimir. Temos que ser específicos no que significamos uma representação “aceitável”. Por exemplo, na compressão de imagens, uma aproximação aceitável de uma imagem é uma que seja visualmente indistinguível da imagem original.

Nesta seção consideraremos a aplicação de wavelets ao problema de compressão de dados. Este, sem dúvida, é um assunto de suma importância nos dias atuais, visto que em todos momentos temos que receber ou enviar uma enorme quantidade de dados que podem, por exemplo, ser arquivos de uma imagem ou de um áudio, digitais.

A idéia por trás de qualquer esquema de compressão é a de se remover a correlação presente nos dados. Dados correlacionados são caracterizados pelo fato que a partir de uma parte dos dados, podemos preencher a parte que esteja faltando. Existem vários tipos de correlações, daremos alguns exemplos:

1. Correlação espacial: pode-se freqüentemente predizer o valor de um pixel numa imagem olhando-se para os pixels vizinhos.
2. Correlação espectral: A transformada de Fourier de um sinal é geralmente suave, isto significa que pode-se freqüentemente predizer uma componente de freqüência olhando-se para as freqüências vizinhas.
3. Correlação temporal: Num video digital, a maioria dos pixels de duas imagens mudam muito pouco na direção do tempo.

A idéia é de se representar os dados usando-se uma base matemática diferente na esperança que esta nova representação revelará ou não a correlação. Com isto queremos dizer que nesta nova base a maioria dos coeficientes são muito pequenos. Assim, a compressão é alcançada calculando-se a transformada associada a esta base, fazendo-se os coeficientes menores do que um certo limiar iguais a zero. A informação será, portanto, caracterizada por um pequeno número de coeficientes.

Na prática procura-se uma transformada que tenha as seguintes propriedades:

1. Seja independente dos dados.
2. Exista um algoritmo rápido (linear ou linear-logaritmico) para calculá-la.
3. Seja capaz de remover a correlação para um conjunto grande e geral de dados.

Um candidato possível para uma transformada é a transformada de Fourier rápida. Ela definitivamente tem as duas primeiras propriedades; entretanto, não possui a terceira propriedade. A base é perfeitamente local na frequência, mas de maneira alguma local no tempo. Portanto, ela é incapaz de revelar correlação local no tempo. A maioria dos sinais tem correlação local na frequência e no espaço. Necessitamos uma base adaptada a este comportamento. Mais precisamente, necessitamos uma base que seja local no tempo e na frequência. Existem duas maneiras de se construir tais bases:

1. Divide-se o domínio espacial em pedaços e usamos uma série de Fourier em cada pedaço separadamente. Desta forma, obtem-se uma base trigonométrica local.
2. Pode-se usar uma base de wavelets.

Ambos os métodos resultam numa transformada que é independente dos dados, rápida e que nos conduz a uma representação compacta para um enorme e geral conjunto de dados.

Para termos uma idéia de como a compressão ocorre na representação de wavelets, basta darmos uma olhada na relação (69): os coeficientes de wavelets, $d_{j,k}$, medem as flutuações locais dos valores dos “pixels” na escala j , pois, ao calcularmos estes, o fazemos uma combinação linear cuja a soma dos coeficientes é $\sum_k g_k = 0$, de modo que a referida combinação linear será nula quando os valores de “pixels” adjacentes forem iguais e pequenos quando os valores destes forem próximos (isto ocorre numa imagem típica, devido às correlações locais no espaço). Assim, os valores de $d_{j,k}$ são pequenos em regiões de suavidade de uma função, com isso eles podem ser usados para caracterizar a regularidade de uma função, localmente.

Para vermos que $\sum_k g_k = 0$, temos que usar o fato que uma wavelet ψ e a sua função escala associada, ϕ , satisfazem $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \neq 0$. Portanto, integrando-se (60) sobre a reta real, temos $0 = (\sum_k g_k) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$.

Numa imagem típica o que se vê são regiões enormes onde os valores dos pixels são iguais ou muito próximos, o que significa que os coeficientes de wavelets a elas associadas ou são nulos ou desprezíveis. Somente em regiões de transições, próximas aos contornos separando as regiões onde os valores dos “pixels” variam muito, é que teremos uma flutuação local significativa nos valores dos “pixels”, portanto, coeficientes de wavelets apreciáveis. Na projeção sobre V_j , caracterizada pelos $a_{j,k}$, veja relação (67), essencialmente estamos fazendo médias ponderadas locais de “pixels” da escala anterior, pois, os h_k são positivos; portanto, se numa escala temos regiões grandes onde os valores dos “pixels” são próximos, o mesmo acontecerá na escala seguinte.

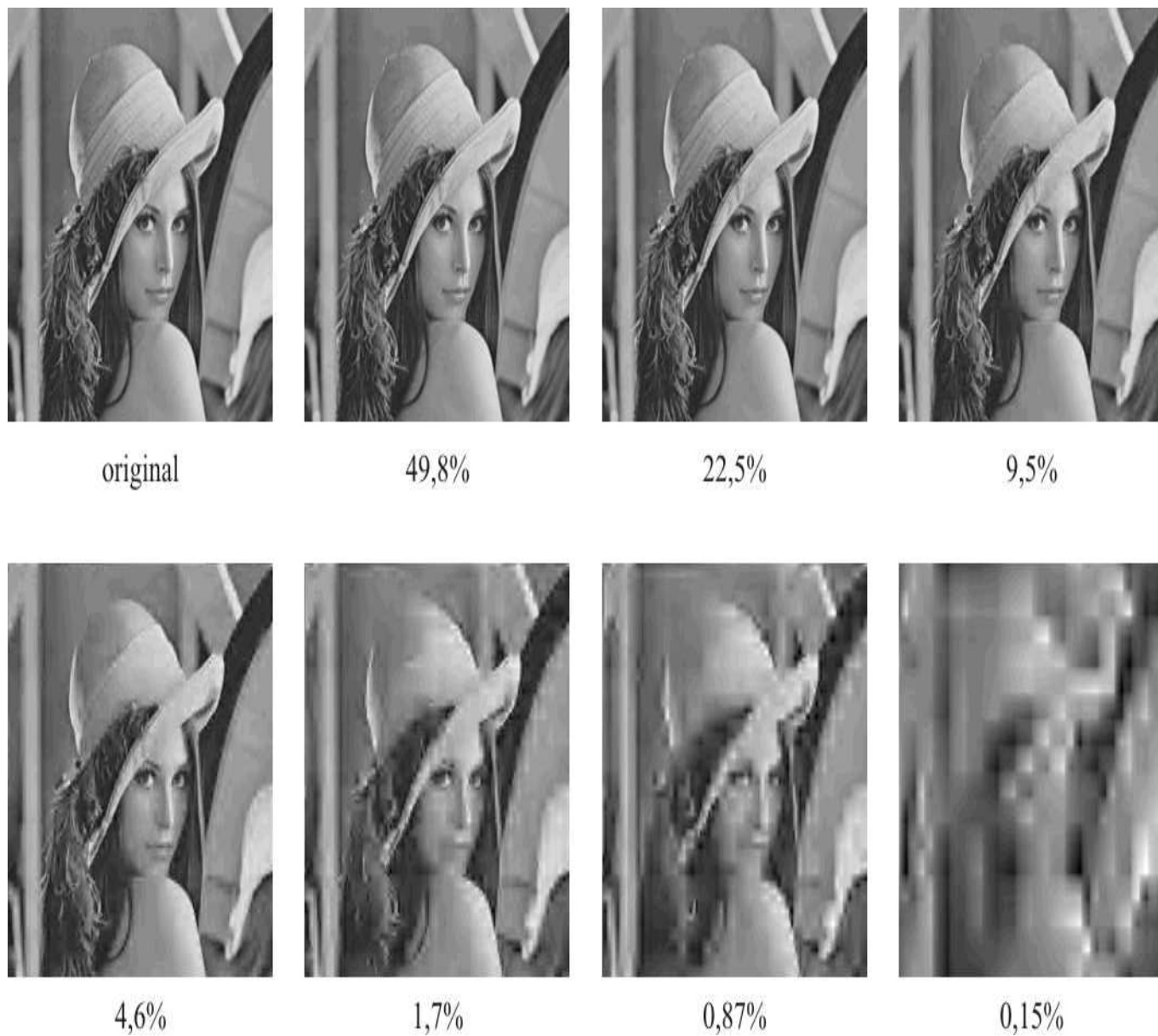


Figura 7: *Reconstrução de Imagem usando-se a wavelet Daub4, nas figuras são mostradas as percentagens de coeficientes que estão sendo usadas.*

6 Construindo uma ARM a Partir de uma Função Escala

Uma vez escolhida a função ϕ , definimos os subespaços V_j como

$$\begin{aligned} V_j &= \text{span}\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f(x) = \sum_k c_k \phi_{j,k}(x), \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}. \end{aligned} \quad (81)$$

Com a definição acima, as propriedades (16) e (17) da Definição 3.1, são automaticamente satisfeitas.

Lema 6.1. *Assuma que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tenha sido escolhida. Defina V_j a partir de (81). Se a inclusão $V_0 \subset V_{-1}$ for verdadeira, então todas as inclusões na propriedade (13) da Definição 3.1 ocorrem.*

Prova. Visto que, se $f(x) \in V_{j+1}$, então, de (16), $f(2^{j+1}x) \in V_0 \subset V_{-1}$, portanto, $f(2^j(2x)) = f(2^{j+1}x) = \sum_k a_k \phi(2x - k)$, logo, $f(2^j x) = \sum_k a_k \phi(x - k) \in V_0$ e de (16), concluímos que $f(x) \in V_j$. \square

Não é para qualquer escolha de ϕ que os V_j formarão uma ARM. Quando escolhemos $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, três condições devem ser satisfeitas:

(i) As funções $\phi_{0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, devem ser ortonormais. No Lemma 3.1, vimos $\phi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ constitui um conjunto ortonormal se, e somente se,

$$\Phi(\omega) = \sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

em quase todos os pontos. Se as translações por inteiros de ϕ não forem ortonormais, podemos “ortonormalizá-las”.

(ii) Devemos nos certificar de que as propriedades (14) e (15) da Definição 3.1 sejam satisfeitas. Mostraremos no Teorema 6.1 que sob a hipótese de $\{\phi(x - k)\}_k$ formar um conjunto ortonormal, se ϕ satisfizer uma cota do tipo

$$|\phi(x)| \leq \frac{C}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

então, a propriedade (14) da Definição 3.1 será satisfeita. Além disso, a propriedade (15) da Definição 3.1 será satisfeita se, e somente se, tivermos

$$\left| \int \phi(x) dx \right| = 1 \quad \text{ou} \quad |\hat{\phi}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(iii) Finalmente, devemos garantir que as inclusões dadas na propriedade (13), ocorram. Mostramos no Lemma 6.2 que é necessário e suficiente que

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(2x - k), \quad \text{para quase todo } x \in \mathbb{R},$$

para que $V_0 \subset V_{-1}$.

Lema 6.2. *Para que se tenha a inclusão $V_0 \subset V_{-1}$ é necessário e suficiente que uma identidade da seguinte forma*

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(2x - k), \quad \text{para quase todo } x \in \mathbb{R}, \quad (82)$$

seja válida com $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Prova. A propriedade (16), juntamente com a relação (81) implicam que

$$V_{-1} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f = \sum_k h_k \phi_{-1,k}, h \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

assim, a fim de $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ aconteça, a condição (82) é necessária. Reciprocamente, a identidade (82) implica que para $l \in \mathbb{Z}$ arbitrário, temos a seguinte identidade

$$\phi(x - l) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(2x - (k + 2l)), \quad \text{para quase todo } x \in \mathbb{R},$$

e, como uma conseqüência, temos

$$\phi_{0,l} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi_{-1,k+2l} \in V_{-1}, \quad \text{para todo } l \in \mathbb{Z}.$$

Sob estas circunstâncias, é claro que combinações lineares arbitrárias dos $\phi_{0,l}$ também estão em V_{-1} . \square

Teorema 6.1. *Assuma que a função escala $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaça uma estimativa da forma*

$$|\phi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (83)$$

e que a família $(\phi_{0,k} \mid k \in \mathbb{Z})$ seja uma base ortonormal de V_0 . Então,

$$\bigcap_j V_j = \{0\}; \quad (84)$$

e, se e somente se, $\int \phi(x) dx = q$ tiver módulo 1, também temos

$$\overline{\bigcup_j V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

Prova. Toda $f \in V_0$ tem uma representação da forma $f = \sum_k f_k \phi_{0,k}$ com $\sum_k |f_k|^2 = \|f\|_2^2 < \infty$. Por causa de (83), obtemos a seguinte estimativa $\sum_k |\phi(x-k)|^2 \leq C^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (com outra constante C), e isto implica, pela desigualdade de Schwarz, que

$$|f(x)| \leq \sum_k |f_k| |\phi(x-k)| \leq C \|f\|_2.$$

Como $f \in V_0$ foi tomado arbitrariamente, podemos dizer que $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_2, \forall f \in V_0$. Para uma função dada $g \in V_j$, a função $f = g(2^j \cdot)$ está em V_0 , portanto, podemos dizer que

$$\|g\|_\infty = \|f\|_\infty \leq C \|f\|_2 = C 2^{-j/2} \|g\|_2.$$

Se tal função g pertence a todos os V_j ($j > 0$) simultaneamente, então, isto só é possível somente se $\|g\|_\infty = 0$, portanto, $g = 0$. Isto prova (84).

O espaço $\tilde{V} = \overline{\cup_j V_j}$ é invariante a translações por $k \in \mathbb{Z}$ e dilatações $2^j, j \in \mathbb{Z}$; por outro lado, as funções degraus com saltos nos racionais da forma $k 2^j$ são densas em $L^2(\mathbb{R})$. Para provar a segunda afirmação é, portanto, suficiente provar o seguinte: A função $f = 1_{[-1,1]}$ pertence a \tilde{V} , se e somente se, $|q| = 1$.

A relação $f \in \tilde{V}$ pode ser expressa da seguinte maneira: A função f é arbitrariamente bem aproximada no sentido L^2 pelas suas projeções $P_j f$ quando $j \rightarrow -\infty$, isto é, $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f$. Isto é equivalente a

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2 = 2. \quad (85)$$

Mantenha $j < 0$ fixo por enquanto. Como

$$P_j f = \sum_k c_k \phi_{j,k},$$

onde $c_k = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$, então, $\|P_j f\|_2^2 = \sum_k |c_k|^2$. Os c_k 's podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{-1}^1 \overline{\phi_{j,k}(x)} dx = 2^{-j/2} \int_{-1}^1 \overline{\phi(2^{-j}x - k)} dx \\ &= 2^{j/2} \int_{-N-k}^{N-k} \overline{\phi(x')} dx', \end{aligned} \quad (86)$$

onde $2^{-j} = N$.

A seguir, a letra C denotará várias constantes positivas que podem depender de ϕ , mas não depende de j (ou N) e k , a letra Θ denotará vários números reais com módulo ≤ 1 . De (83), temos a seguinte estimativa

$$\int_{|x| \geq a} |\phi(x)| dx < \int_a^\infty \frac{C}{x^2} dx = \frac{C}{a}. \quad (87)$$

Dado $\epsilon \in (0, 1]$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x| \geq M} |\phi(x)| dx \leq \epsilon. \quad (88)$$

Vamos estimar a integral no lado direito de (86). Podemos assumir que $N = 2^{-j} \geq M$ e distingüiremos três casos:

(a) Se $|k| \leq N - M$, então temos $-N - k \leq -M$ e, de maneira análoga, $N - k \geq M$. Por causa de (88), podemos concluir que

$$\begin{aligned} c_k &= 2^{j/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi} dx - \left(\int_{-\infty}^{-N-k} + \int_{N-k}^{\infty} \right) \bar{\phi} dx \right) \\ &= 2^{j/2} (\bar{q} + \Theta\epsilon), \end{aligned}$$

pois, $\left| \left(\int_{-\infty}^{-N-k} + \int_{N-k}^{\infty} \right) \bar{\phi} dx \right| \leq \int_{|x| \geq M} |\bar{\phi}| dx < \epsilon$. Disso, obtemos

$$|c_k|^2 = 2^j (|q|^2 + C\Theta\epsilon).$$

(b) Se $N - M < |k| \leq N + M$, então

$$\left| \int_{-N-k}^{N-k} \bar{\phi}(x) dx \right| \leq \int |\phi(x)| dx = \|\phi\|_1 = C,$$

implica na estimativa $|c_k| \leq 2^{j/2} C$.

(c) Se $|k| > N + M$, por exemplo, $k \leq 0$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{-N+|k|}^{N+|k|} \bar{\phi} dx \right| &\leq \int_{-N+|k|}^{N+|k|} |\phi| dx \\ &\leq \int_{-N+|k|}^{\infty} |\phi| dx \\ &= \frac{C}{|k| - N}, \end{aligned}$$

onde a igualdade segue-se de (87), pois, $|k| - N \geq M$. De maneira análoga, se $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{-N-|k|}^{N-|k|} \bar{\phi} dx \right| &\leq \int_{-N-|k|}^{N-|k|} |\phi| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{N-|k|} |\phi| dx \\ &= \frac{C}{|k| + N}, \end{aligned}$$

onde a igualdade segue-se de (87), visto que $N - |k| \leq -M$.

Conseqüentemente, se $|k| > N + M$,

$$|c_k| \leq 2^{j/2} \frac{C}{k - N}.$$

Somando sobre todos tais k , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{|k| > N+M} |c_k|^2 &\leq 2 \cdot 2^j \sum_{k=N+M+1}^{\infty} \frac{C^2}{(k - N)^2} \\ &\leq 2 \cdot 2^j \sum_{k'=M+1}^{\infty} \frac{C}{k'^2} \\ &\leq C 2^j \int_{M+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= 2^j \frac{C}{M}. \end{aligned}$$

Levando em conta os respectivos números de k 's nos casos (a) e (b) e lembrando-se que $N = 2^{-j}$, obtemos a seguinte representação para $\|P_j f\|_2^2$:

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_2^2 &= \sum_k |c_k|^2 \\ &= (2 \cdot (2^{-j} - M) + 1) 2^j (|q|^2 + C\Theta\epsilon) + 2^j \Theta \left(4MC + \frac{C}{M} \right) \\ &= (2|q|^2 + C\Theta\epsilon) + 2^j \Theta \left(2M(|q|^2 + C) + 4MC + \frac{C}{M} \right). \end{aligned}$$

Fazendo $j \rightarrow -\infty$ concluímos que

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_2^2 = 2|q|^2 + C\Theta\epsilon.$$

Com $\epsilon > 0$ foi tomada arbitrariamente, vemos que (85) é válida se e somente se $|q| = 1$. \square

7 A Wavelet de Meyer

A seguir daremos um segundo exemplo de base ortonormal de wavelets, as chamadas **wavelets de Meyer**. Para a sua construção, define-se a transformada de Fourier da função escala, $\hat{\phi}$, como

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (|\omega| \leq \frac{2\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right) \quad (\frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}) \\ &= 0 \quad (|\omega| \geq \frac{4\pi}{3}),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\nu(x) &= 0 \quad (x \leq 0) \\ &= x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3) \quad (0 \leq x \leq 1) \\ &= 1 \quad (x \geq 1).\end{aligned}$$

Note que $\nu(1-x) = \nu(x)$, para todo x e que $\hat{\phi}(-\omega) = \hat{\phi}(\omega)$, para todo ω .

Da fórmula para inversão da transformada de Fourier, ou seja,

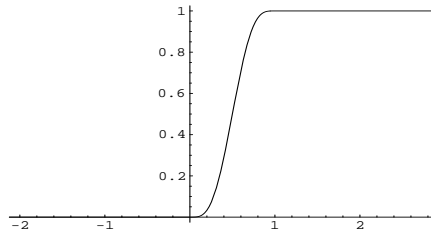
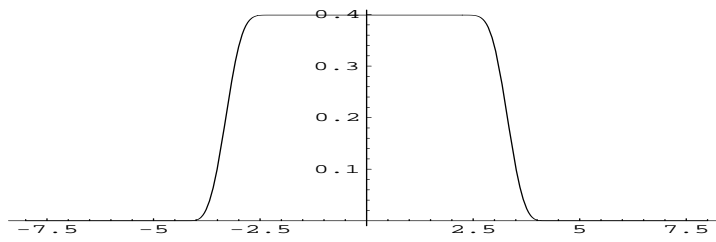
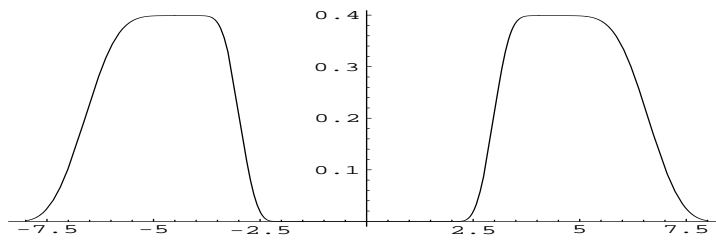
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{\phi}(\omega) d\omega,$$

temos

$$\begin{aligned}x^2\phi(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d^2}{d\omega^2} (e^{i\omega x}) \hat{\phi}(\omega) d\omega \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{4\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{d^2}{d\omega^2} (e^{i\omega x}) \hat{\phi}(\omega) d\omega \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{4\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} e^{i\omega x} \frac{d^2}{d\omega^2} (\hat{\phi}(\omega)) d\omega.\end{aligned}$$

Na passagem da segunda para a terceira linha fizemos duas integrações por partes e usamos o fato de que $\hat{\phi}$ e a sua derivada se anulam em $\pm\frac{4\pi}{3}$, fazendo com que os termos de fronteira sejam nulos. Assim,

$$\begin{aligned}(1+x^2)|\phi(x)| &= \left| -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{4\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} e^{i\omega x} \left(\frac{d^2\hat{\phi}(\omega)}{d\omega^2} - \hat{\phi}(\omega) \right) d\omega \right| \\ &= \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \max_{\omega \in [-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]} \left| \frac{d^2\hat{\phi}}{d\omega^2} - \hat{\phi} \right| \equiv C.\end{aligned}$$

Figura 8: A função ν .Figura 9: $\hat{\phi}$ Figura 10: $|\hat{\psi}|$

Portanto,

$$|\phi(x)| \leq \frac{C}{x^2 + 1}, \quad \forall x. \quad (89)$$

A seguir, mostraremos que

$$\Phi(\omega) = \sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}. \quad (90)$$

Note que

$$\begin{aligned} \Phi(-\omega) &= \sum_l |\hat{\phi}(-\omega + 2\pi l)|^2 \\ &= \sum_l |\hat{\phi}(-\omega - 2\pi l)|^2 \quad \text{fizemos } -k \rightarrow k \\ &= \sum_l |\hat{\phi}((-\omega + 2\pi l))|^2 \\ &= \sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \quad (\hat{\phi}(-\omega) = \hat{\phi}(\omega)) \\ &= \Phi(\omega). \end{aligned} \quad (91)$$

Em vista de (91), basta mostrarmos (90) para $\omega \geq 0$.

(i) Se $0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{3}$, então, $|\omega + 2k\pi| < \frac{4\pi}{3}$ se, e somente se, $k = 0$, neste caso, $\Phi(\omega) = |\hat{\phi}(\omega)|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}$.

(ii) Se $\frac{2\pi}{3} < \omega < \frac{4\pi}{3}$, então, $|\omega + 2k\pi| < \frac{4\pi}{3}$ se, e somente se, $k = 0, -1$. Neste caso, $\Phi(\omega) = |\hat{\phi}(\omega)|^2 + |\hat{\phi}(\omega - 2\pi)|^2$. Por causa da relação

$$\frac{3}{2\pi}|\omega - 2\pi| - 1 = 1 - \left(\frac{3}{2\pi}\omega - 1\right) \quad \left(\frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3}\right)$$

e

$$\nu(1 - x) = 1 - \nu(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

segue que

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} \omega - 1 \right) \right) + \frac{1}{2\pi} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} \omega - 1 \right) \right) \equiv \frac{1}{2\pi}.$$

De (i), (ii) e da paridade de ϕ , concluímos que $\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi}$ se $|\omega| \leq \frac{4\pi}{3}$.

(iii) Se $\omega > \frac{4\pi}{3} = \cup_{k \geq 0} \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2(k+1)\pi \right]$, isto implica que e-xiste exatamente um $k_o \geq 0$, tal que $\omega \in \left(2k_o\pi + \frac{4\pi}{3}, 2(k_o+1)\pi + \frac{4\pi}{3} \right]$, logo, $\omega' \equiv \omega - 2(k_o+1)\pi \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right]$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \\ &= \sum_k |\hat{\phi}(\omega - 2(k_o+1)\pi + 2\pi(k+k_o+1))|^2 \\ &= \sum_k |\hat{\phi}(\omega' + 2\pi k)|^2 \quad (\text{fizemos } \omega - 2(k_o+1)\pi = \omega' \text{ e } k+k_o+1 \rightarrow k) \\ &= \Phi(\omega') \\ &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Com isto provamos (90). □

Em vista de (90), segue-se do Lemma 3.1 que $(\phi_{0,k} | k \in \mathbb{Z})$ constitui uma base ortonormal para V_0 , isto, juntamente com (89) e o Teorema 6.1, implicam que $\cap_j V_j = \{0\}$ e $\overline{\cup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$, pois, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sqrt{2\pi} \hat{\phi}(0) = 1$. Em vista dos Lemmas 6.1 e 6.2, para concluirmos que ϕ define uma *MRA* basta mostrarmos que

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{\infty} h_k \phi(2x - k), \quad (92)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}$.

Defina a seguinte função 2π -periódica

$$m_0(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_l \hat{\phi}(2\omega + 4\pi l) \quad (93)$$

(a soma acima é, para cada $\omega \in \mathbb{R}$, uma soma finita!). Afirmamos que m_0 e ϕ estão relacionados pela equação funcional

$$\hat{\phi}(\omega) \equiv m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

o que implica que ϕ satisfaz a relação de escala (92).

De fato, a função $\omega \mapsto \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ tem suporte no intervalo $[-\frac{8\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$. Por outro lado, todas as funções $\hat{\phi}(\cdot + 4\pi l)$ correspondentes a $l \neq 0$ são identicamente nulas neste intervalo. Portanto, já sabemos que

$$m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2\pi} \sum_l \hat{\phi}(\omega + 4\pi l) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2\pi} \hat{\phi}(\omega) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (94)$$

Mas no suporte $[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ de $\hat{\phi}$ a identidade $\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é verdadeira. Isto implica o lado direito de (94) tem para todo ω o valor $\hat{\phi}(\omega)$, como havíamos afirmado.

No presente caso, a fórmula (52) nos dá a seguinte expressão para uma possível wavelet mãe:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega) &= e^{i\omega/2} \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \hat{\phi}(\omega/2) = \sqrt{2\pi} e^{i\omega/2} \sum_l \hat{\phi}(\omega + 2\pi + 4\pi l) \hat{\phi}(\omega/2) \\ &= \sqrt{2\pi} e^{i\omega/2} \left(\hat{\phi}(\omega + 2\pi) + \hat{\phi}(\omega - 2\pi) \right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

Observação 7.1. Como $\hat{\phi}$ e $\hat{\psi}$ são infinitamente diferenciáveis e têm suportes compactos, então, ϕ e ψ também são infinitamente diferenciáveis e decaem rapidamente, ou seja, $\forall N$, temos

$$|\phi(x)|, |\psi(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N}.$$

O fato de que estas têm apenas decaimento rápido faz com que elas não sejam boas para fins práticos - a cota C_N cresce com $N!$ Pode-se mostrar que não existe wavelet com decaimento exponencial e infinitamente suave, veja [1], Seção 5.5.

8 Relaxando as condições na ARM

8.1 Seqüência de Riesz e Frames

Definição 8.1. Uma seqüência de vetores, $(x_n)_{n \in A}$, num espaço de Hilbert \mathcal{H} é chamada de Riesz se existirem constantes $0 < c \leq C$, tais que

$$c \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_n a_n x_n \right\| \leq C \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (95)$$

para toda seqüência $\{a_n\}_{n \in A}$. Se $\text{span}\{x_n\}_{n \in A} = \mathcal{H}$, dizemos que $(x_n)_{n \in A}$ é uma base de Riesz.

Observação 8.1. Como todo sistema ortonormal satisfaz (95) com $c = C = 1$, o conceito de sistema de Riesz é uma generalização da noção de sistema ortonormal e uma base de Riesz é uma generalização de uma base ortonormal.

Lema 8.1.

(a) Se tivermos uma base de Riesz $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em \mathcal{H} , então, existem funcionais biortogonais $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$, i.e., vetores em \mathcal{H} , tais que $\langle x_n^*, x_m \rangle = \delta_{nm}$. A seqüência $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$ também é uma base de Riesz em \mathcal{H} .

(b) Se $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base de Riesz em \mathcal{H} , então, existem constantes $0 < c \leq C$, tais que

$$c \|x\| \leq \left(\sum_n |\langle x_n, x \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|x\|, \quad (96)$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

Observação 8.2. Um sistema de vetores $(x_n)_{n \in A}$ num espaço de Hilbert \mathcal{H} é chamado um “frame” se existirem constantes $0 < c \leq C$, tais que (96) aconteça, para todo $x \in \mathcal{H}$. Se $c = C$, o “frame” é chamado de “tight frame”. Alguns “frames” são usados como substitutos de uma base de Riesz. A importante diferença entre “frames” e bases de Riesz é que se $(x_n)_{n \in A}$ é um “frame”, os vetores $(x_n)_{n \in A}$ não precisam ser linearmente independentes; como um exemplo trivial de “tight frame”, tome como $(x_n)_{n \in A}$ a união disjunta de dois sistemas ortogonais. Por exemplo, se $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, então, (e_1, e_2, Ae_1, Ae_2) , onde $(e_i)_k = \delta_{ik}$ e A é a matriz 2×2 que gira um vetor de um ângulo de 90 graus. Neste caso, $c = C = 2$.

Prova do Lema. Seja $e_n \in l^2(\mathbb{Z})$, definido como $(e_n)_k = \delta_{nk}$. Considere o operador $I : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{H}$, definido por $I(e_n) = x_n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base de Riesz, vemos que I é um isomorfismo (ou seja, uma bijeção que é contínua e tem inversa contínua) de $l^2(\mathbb{Z})$ sobre \mathcal{H} . Portanto, o adjunto do operador $(I^{-1}), (I^{-1})^*$, de $l^2(\mathbb{Z})$ sobre \mathcal{H} também é um isomorfismo. Defina

$$x_n^* = (I^{-1})^*(e_n).$$

Logo, $\langle x_n^*, x_m \rangle = \langle (I^{-1})^*(e_n), I(e_m) \rangle = \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$, portanto, $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma seqüência de . biortogonais a $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. É uma base de Riesz, pois, $(I^{-1})^*$ é um isomorfismo, o que prova (a).

Para provar (b), usamos (a). Dado arbitrariamente $x \in \mathcal{H}$, como o sistema $\{x_n^*\}_n$ é uma base de Riesz, podemos escrever $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n^*$, logo,

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2 &= \sum_n \left| \left\langle \sum_l a_l x_l^*, x_n \right\rangle \right|^2 \\ &= \sum_n \left| \sum_l a_l \langle x_l^*, x_n \rangle \right|^2 \\ &= \sum_n \left| \sum_l a_l \delta_{l,n} \right|^2 \\ &= \sum_n |a_n|^2, \end{aligned} \tag{97}$$

além disso existem constantes $0 < c \leq C$, tais que

$$c \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| = \left\| \sum_n a_n x_n^* \right\| \leq C \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{98}$$

De (97) e (98), temos

$$C^{-1} \|x\| \leq \left(\sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c^{-1} \|x\|,$$

o que prova (b). □

Dado $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, então, a transformada de Fourier de $\sum_n a_n \phi(x-n)$ é $\sum_n a_n e^{-in\xi} \hat{\phi}(\xi)$; como a transformada de Fourier preserva norma, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_n a_n \phi(x-n) \right\|_2 &= \left\| \sum_n a_n e^{-in\xi} \hat{\phi}(\xi) \right\|_2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_n a_n e^{-in\xi} \right|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_n a_n e^{-in\xi} \right|^2 \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{99}$$

Como $\int_0^{2\pi} \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi < \infty$, a série $\sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2$ converge *a.e* para um valor finito.

A seguir, caracterizaremos $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{\phi(x-m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ seja uma seqüência de Riesz.

Proposição 8.1. *Seja $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ e $0 < a < A$ constantes. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Para toda seqüência de escalares $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, temos*

$$\begin{aligned} a \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2} &\leq \left\| \sum_n a_n \phi(x-n) \right\|_2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_n a_n \phi(x-n) \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq A \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (100)$$

(ii) *Para todo $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\frac{a^2}{2\pi} \leq \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq \frac{A^2}{2\pi}. \quad (101)$$

Prova. Suponha que (101) aconteça. Dado $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$, multiplicando-se (101) por $|\sum_n a_n e^{-in\xi}|^2$, integrando-se as desigualdades obtidas de 0 a 2π , usando-se o fato que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum_n a_n e^{-in\xi}|^2 d\xi = \sum_n |a_n|^2$ e (99), obtemos (100).

Agora suponha que (100) aconteça. Seja

$$C = \left\{ \xi \in [0, 2\pi] : \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 > \frac{A^2}{2\pi} \right\}.$$

Mostraremos que $|C| = 0$, onde $|C|$ é a medida de C . De fato, se $|C| > 0$, tomamos $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que $\mathbf{1}_C = \sum_n a_n e^{-in\xi}$, para $\xi \in [0, 2\pi]$. De (99),

$$\left\| \sum_n a_n \phi(x-n) \right\|_2 = \left(\int_C \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi \right)^{1/2} > \frac{A}{\sqrt{2\pi}} |C|^{1/2}.$$

Como

$$\left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathbf{1}_C\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |C|^{1/2}$$

temos

$$\left\| \sum_n a_n \phi(x-n) \right\|_2 > \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2} = A \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

contrariando a segunda desigualdade de (100). Logo, $|C| = 0$, ou seja,

$$\sum_n |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq \frac{A^2}{2\pi} \quad a.e.$$

Seja

$$D = \left\{ \xi \in [0, 2\pi] : \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 < \frac{a^2}{2\pi} \right\}.$$

Mostraremos que $|D| = 0$. Caso contrário,

$$\left\| \sum_n a_n \phi(x - n) \right\|_2 = \left(\int d\xi \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \right)^{1/2} < \frac{a}{\sqrt{2\pi}} |D|^{1/2},$$

como

$$\left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |D|^{1/2},$$

temos

$$\left\| \sum_n a_n \phi(x - n) \right\|_2 < a \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

contrariando a primeira desigualdade de (100). Logo, $|D| = 0$. Portanto,

$$\frac{a^2}{2\pi} \leq \sum_n |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2, \quad a.e$$

o que prova a Proposição. \square

Observação 8.3. Da Proposição 8.1, $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ é tal que $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ seja uma seqüência de Riesz se, e somente se,

$$\frac{a^2}{2\pi} \leq \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq \frac{A^2}{2\pi} \quad a.e.$$

Corolário 8.1. O sistema $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal se e somente se, $a = A = 1$, o seja, se e somente se,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}, \quad a.e. \quad (102)$$

Lema 8.2. Seja $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ um sistema de Riesz e defina

$$V = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) : g(x) = \sum_n a_n \phi(x - n) \right\}.$$

Então,

$$V = \left\{ g : g(x) = \sum_n a_n \phi(x - n), \{a_n\}_n \in L^2(\mathbb{Z}) \right\} = \text{span}\{\phi(x - n)\}_n.$$

Prova. Note que sendo $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ um sistema de Riesz, então, $g(x) = \sum_n a_n \phi(x-n)$ implica que $c(\sum_n |a_n|^2)^{1/2} \leq \|g\|_2 \leq C(\sum_n |a_n|^2)^{1/2}$, portanto, $g \in L^2(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\{a_n\}_n \in l^2(\mathbb{Z})$. Logo,

$$V = \left\{ g : g(x) = \sum_n a_n \phi(x-n), \{a_n\}_n \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Nitidamente, V contém todas as combinações finitas de $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, portanto, se mostrarmos que V é um subespaço fechado de $L^2(\mathbb{R})$, concluiremos que $V = \text{span}\{\phi(x-n)\}_n$. Seja $\{g_n \in V\}$ convergente. Por definição, $g_n(x) = \sum_k a_k^n \phi(x-k)$ e sendo ela convergente, ela é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R})$. Como a seqüência $\{\phi(x-n)\}_n$ é de Riesz, temos

$$c\|a^n - a^m\|_{l^2} \leq \|g_n - g_m\|_2 \leq C\|a^n - a^m\|_{l^2}.$$

Em particular, $\|a^n - a^m\|_{l^2} \leq C^{-1}\|g_n - g_m\|_2$, logo, $\{a^n\}_n$ é de Cauchy em $l^2(\mathbb{Z})$. Seja $\lim_n a^n = a \equiv \{a_k\}_k$ e defina $h(x) = \sum_l a_l \phi(x-l)$. Como $a \in l^2(\mathbb{Z})$, então, $h \in V$. Mostraremos que $g_n \rightarrow h$ em L^2 . Note que como $\{\phi(x-n)\}_n$ é uma seqüência de Riesz, temos, $\|g_n - h\|_2 = \|\sum_l (a_l^n - a_l) \phi(x-l)\|_2 \leq C\|a^n - a\|_{l^2} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, o que prova o lema. \square

Para futura referência, formularemos a seguinte proposição que é auto-evidente.

Proposição 8.2. *Suponha que $\{\phi(x-n)\}_m$ seja uma seqüência de Riesz satisfazendo (100). Então,*

(i) *Qualquer função $g \in \text{span}\{\phi(x-n)\}_n$ pode ser escrita como $g(x) = \sum_n a_n \phi(x-n)$ e a série converge em $L^2(\mathbb{R})$.*

(ii) *$g \in \text{span}\{\phi(x-n)\}_n$ se, e somente se,*

$$\hat{g}(\xi) = f(\xi) \hat{\phi}(\xi) \tag{103}$$

para alguma função 2π -periódica f , tal que $\int_0^{2\pi} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty$.

(iii) *Se $g(x) = \sum_n a_n \phi(x-n)$ e f é dada por (103), então, $f(\xi) = \sum_n a_n e^{-in\xi}$ e reciprocamente.*

(iv) *As normas de g e f estão relacionadas por:*

$$A^{-1}\|g\|_2 \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq a^{-1}\|g\|_2, \tag{104}$$

onde a e A são as constantes que aparecem em (100). Reciprocamente, se (104) acontece, para algum a e A e todo $g \in \text{span}\{\phi(x-n)\}_n$ e a ϕ correspondente dada por (iii) acima, então (100) acontece com constantes a e A .

Proposição 8.3. *Seja $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que o sistema $\{\phi(x-n)\}_n$ seja uma seqüência de Riesz. Então, existe $\phi_1 \in \text{span}\{\phi(x-n)\}_n$, tal que $\{\phi_1(x-n)\}_n$ seja um sistema ortogonal. Para cada tal ϕ_1 o sistema $\{\phi_1(x-n)\}_n$ é uma base ortonormal no espaço $\text{span}\{\phi(x-n)\}_n$.*

Prova. Seja $\hat{\phi}_1(\xi) = h(\xi)\hat{\phi}(\xi)$, onde h é a função 2π -periódica tal que

$$|h(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \right)^{-1/2}.$$

Da Proposição 8.1, como $\{\phi(x-n)\}_n$ é um sistema de Riesz, então,

$$\frac{a^2}{2\pi} \leq \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq \frac{A^2}{2\pi} \quad a.e$$

logo, $0 < A^{-1} \leq |h(\xi)| \leq a^{-1}$ a.e. Como $\phi_1(\xi) = h(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ e $h(\xi)$ é 2π -periódica, segue-se da Proposição 8.2 que $\phi_1(x) = \sum_n a_n \phi(x-n) \in \text{span}\{\phi(x-n)\}_n$. Além disso, $\sum_n |\phi_1(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ a.e, e pelo Corolário 8.1, o sistema $\{\phi_1(x-n)\}_n$ é ortonormal.

$$\begin{aligned} \text{span}\{\phi_1(x-n)\}_n &= \{g : g(x) = \sum_n a_n \phi_1(x-n), \{a_n\} \in l^2(\mathbb{Z})\} \\ &= \{\hat{g} : \hat{g}(\xi) = f(\xi)\hat{\phi}_1(\xi), f \text{ } 2\pi\text{-periódica}, f \in L^2([0, 2\pi])\} \\ &= \{\hat{g} : \hat{g}(\xi) = f(\xi)h(\xi)\hat{\phi}(\xi), f, h \text{ } 2\pi\text{-periódicas em } L^2([0, 2\pi])\} \\ &= \{\hat{g} : \hat{g}(\xi) = \nu(\xi)\hat{\phi}(\xi), \nu \text{ } 2\pi\text{-periódica em } L^2([0, 2\pi])\} \\ &= \{g : g(x) = \sum_m b_m \phi(x-m)\} \\ &= \text{span}\{\phi(x-n)\}_n, \end{aligned}$$

onde na segunda e quinta igualdades usamos (ii) da Proposição 8.2 e fizemos $\nu = fh$; com isto, concluímos a demonstração. \square

Observação 8.4. *Se ϕ satisfaz $\sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ a.e, então, Φ dada por $\hat{\Phi}(\xi) = m(\xi)\hat{\phi}(\xi)$, onde m é 2π -periódica e $|m(\xi)| = 1$ a.e, também a satisfará.*

8.2 Construção da ARM a Partir da Função Escala ϕ

Como havíamos visto, uma ARM consiste de uma família de subespaços fechados $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ e uma função especial $\phi \in V_0$, tais que as propriedades (13)-(18) da Definição 3.1 sejam satisfeitas. Vimos na Seção 6 que podemos começar a construção de uma ARM a partir de uma escolha apropriada da função escala ϕ no caso em que $\{\phi(x-n)\}_n$ formar um sistema ortonormal, veremos como relaxar esta condição.

Teorema 8.1. *Suponha que temos uma função ϕ em $L^2(\mathbb{R})$ tal que*

- (i) $\{\phi(x-m)\}_m$ seja uma seqüência de Riesz em $L^2(\mathbb{R})$,
- (ii) $\phi(x) = \sum_k a_k \phi(2x-k)$ com a convergência da série entendida em $L^2(\mathbb{R})$ e
- (iii) $\hat{\phi}(\xi)$ contínua em 0 e $\hat{\phi}(0) \neq 0$ ou $|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx| \neq 0$.

Então, os subespaços $V_j = \text{span}\{\phi(2^{-j}x-k)\}_k$ com $j \in \mathbb{Z}$ satisfazem as condições (13)-(17) da Definição 3.1, em particular, se $\{\phi(x-n)\}_n$ formar um conjunto ortonormal, subespaços V_j , juntamente com ϕ , formarão uma ARM.

Observação 8.5. *No Teorema 8.1, se $\{\phi(x-n)\}_n$ não formar um conjunto ortonormal, podemos considerar ϕ_1 definido por*

$$\hat{\phi}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \right)^{-1/2} \hat{\phi}(\xi).$$

Como $V_j^\# \equiv \text{span}\{\phi_1(2^{-j}x-k)\}_k = V_j \equiv \text{span}\{\phi(2^{-j}x-k)\}_k$, para todo j e o sistema $\{\phi_1(x-k)\}_k$ é ortonormal, em vista do Teorema 8.1, os subespaços $V_j^\#$, juntamente com ϕ_1 , formarão uma ARM.

Proposição 8.4. *Suponha que temos uma função $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfazendo (i) do Teorema 8.1. Então, para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_j f = 0$, em particular, $\cap_j V_j = \{0\}$.*

Proposição 8.5. *Suponha que temos uma função em $L^2(\mathbb{R})$ satisfazendo às condições (i) e (iii) do Teorema 8.1. Então, $\cup_j V_j$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, onde V_j 's são definidos no Teorema 8.1.*

Assuma para o momento que as proposições acima sejam verdadeiras. A prova do Teorema 8.1 é apenas uma questão de verificarmos as condições da Definição 3.1. Da definição de V_0 e V_j , segue-se (16) da Definição 3.1. A condição (ii) do Teorema 8.1 assegura a condição (13) da Definição 3.1. A Proposição 8.4 implica que a condição (14) da Definição 3.1 é válida e a Proposição 8.5 implica que a condição (15) da Definição 3.1 é válida. Da Proposição 8.3, concluímos que 6 da Definição 3.1 acontece (veja Observação 8.5).

Prova da Proposição 8.4. Como as funções com suportes compactos são densas em $L^2(\mathbb{R})$, é suficiente mostramos que para tais funções g , temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j g\| = 0.$$

Digamos que $\text{supp } g \subset [-R, R]$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, o sistema $\{\phi(2^{-j}x - k)\}_k$ é uma base de Riesz para V_j , com constantes independentes de g . Seja $g \in \cap_j V_j$, então, $P_j g = g$, para todo j . Portanto,

$$\begin{aligned}
c^2 \|g\|^2 &= c^2 \|P_j g\|^2 \\
&\leq \sum_k |\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle|^2, \quad \text{usamos (96)} \\
&= \sum_k |\langle g, \phi_{j,k} \rangle|^2 \\
&= \sum_k \left| \int_{-R}^R g(s) \overline{\phi_{j,k}(s)} ds \right|^2 \\
&\leq \left(\sum_k \int_{-R}^R |g(s)|^2 ds \right) \left(\int_{-R}^R |\phi_{j,k}(s)|^2 ds \right), \quad \text{usamos Cauchy-Schwartz} \\
&= \|g\|^2 \sum_k 2^{-j} \int_{-R}^R |\phi(2^{-j}s - k)|^2 ds \\
&= \|g\|^2 \sum_k \int_{-2^{-j}R-k}^{2^{-j}R-k} |\phi(u)|^2 du \\
&= \|g\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{U_j} |\phi(u)|^2 du
\end{aligned}$$

onde $U_j \equiv \cup_k [-2^{-j}R - k, 2^{-j}R - k]$ é uma união de conjuntos disjuntos se tomarmos j suficientemente grande. Como $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathbf{1}_{U_j} \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, segue-se do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $\|P_j g\|$ tende a zero. \square

Prova da Proposição 8.5. Tome $f \perp \cup_j V_j$. Seja $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{g} = \hat{f} \mathbf{1}_{[-R,R]}$, para algum R e $\|f - g\|_2 < \epsilon$. Então, $P_j f = 0$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, logo,

$$\|P_j g\| \leq \|P_j f\| + \|P_j(f - g)\| \leq \|f - g\| < \epsilon, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (105)$$

Como o sistema $\{\phi_{j,k}\}_j$ é uma base de Riesz, segue-se que

$$c \|P_j g\| \leq \left(\sum_k |\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq C \|P_j g\|,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|P_j g\|^2 &\geq C^{-2} \sum_k |\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle|^2 \\
&= C^{-2} \sum_k |\langle f, P_j \phi_{j,k} \rangle|^2 \\
&= C^{-2} \sum_k \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{\phi}_{j,k}(\xi)} d\xi \right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C^{-2} \sum_k \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) 2^{j/2} e^{ik2^j \xi} \overline{\hat{\phi}(2^j \xi)} d\xi \right|^2 \\
&= C^{-2} \sum_k \left| \int_{-2^{-j}\pi}^{2^{-j}\pi} \hat{g}(\xi) 2^{j/2} e^{ik2^j \xi} \overline{\hat{\phi}(2^j \xi)} d\xi \right|^2
\end{aligned}$$

onde na última igualdade levamos em conta que $\text{supp } \hat{g} \subset [-R, R] \subset [-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]$, desde que $2^{-j}\pi > R$.

$$\int_{-2^{-j}\pi}^{2^{-j}\pi} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{\phi}(2^j \xi)} 2^{j/2} e^{ik2^j \xi} d\xi = \int_{-2^{-j}\pi}^{2^{-j}\pi} \frac{2^{j/2} e^{-i(-k)2^j \xi}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{\phi}(2^j \xi)} d\xi = c_{-k}$$

com c_{-k} igual ao coeficiente de Fourier de $\sqrt{2\pi} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{\phi}(2^j \xi)}$, no intervalo $[-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]$, em relação ao sistema $\{\sqrt{2\pi} 2^{j/2} e^{-k2^j \xi}\}_k$ que é uma base ortonormal para $L^2([-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi])$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|P_j g\|^2 &\geq C^{-2} \sum_k |c_k|^2 \\
&\geq \frac{2\pi}{C^2} \int_{-2^{-j}\pi}^{2^{-j}\pi} |\hat{g}(\xi) \overline{\hat{\phi}(2^j \xi)}|^2 d\xi \\
&= \frac{2\pi}{C^2} \int_{-R}^R |\hat{g}(\xi) \overline{\hat{\phi}(2^j \xi)}|^2 d\xi. \tag{106}
\end{aligned}$$

Como $\hat{\phi}$ é contínua em 0, vimos que $\hat{\phi}(2^j \xi)$ tende uniformemente para $\hat{\phi}(0)$ em $[-R, R]$ quando $j \rightarrow -\infty$. De (105) e (106), temos,

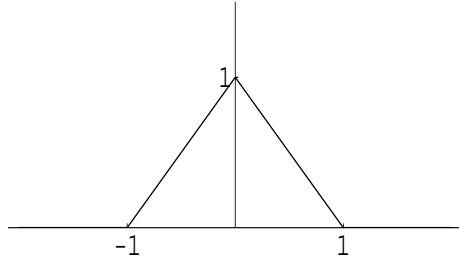
$$\epsilon^2 \geq \|P_j g\|^2 \geq 2\pi C^{-2} |\hat{\phi}(0)|^2 \|g\|^2.$$

Portanto, $\|g\| \leq \frac{C\epsilon}{\sqrt{2\pi}|\hat{\phi}(0)|}$, como ϵ é arbitrário, $\|g\| = 0$. Isto implica que $f = 0$, logo, $\cup_j V_j$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$. \square

Observação 8.6. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então, \hat{f} também está em $L^2(\mathbb{R})$ e, portanto, $\mathbf{1}_{[-R,R]}\hat{f}$, para todo $R > 0$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $\|\hat{f} - \mathbf{1}_{[-R,R]}\hat{f}\| < \epsilon$. Como a transformada de Fourier vista como uma transformação de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ é sobrejetiva, segue-se que existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{g} = \mathbf{1}_{[-R,R]}\hat{f}$, logo, $\|f - g\| \leq \|\hat{f} - \hat{g}\| = \|\hat{f} - \mathbf{1}_{[-R,R]}\hat{f}\| < \epsilon$.

Observação 8.7. Podemos escrever $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\cup_j V_j} \oplus (\cup_j V_j)^\perp$, onde usamos o fato que se M é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert, \mathcal{H} , então, $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$. Além disso, para qualquer subespaço, A , de \mathcal{H} , $\overline{A}^\perp = A^\perp$. Assim, a Proposição 8.5, nos diz que $\overline{\cup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Corolário 8.2. Suponha que $L^2(\mathbb{R})$ seja uma função escala de uma ARM e que $\hat{\phi}(\xi)$ seja contínua em 0. Então, $|\hat{\phi}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Em particular, se $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, $|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Figura 11: *Spline linear por partes.*

Prova. De fato, seja P_j a projeção ortogonal sobre V_j e g uma função não-nula fixa em $L^2(\mathbb{R})$ tal que $\text{supp } \hat{g} \subset [-1, 1]$. Como $\{\phi(x - k)\}_k$ forma um sistema ortogonal, usando os mesmos argumentos da prova da Proposição 8.5, teremos igualdade (com $C = 1$ e $R = 1$)

$$\|P_j g\|^2 = 2\pi \int_{-1}^1 |\hat{g}(\xi) \overline{\hat{\phi}(2^j \xi)}|^2 d\xi, \quad j < 0.$$

Como $j \rightarrow -\infty$ o lado esquerdo da equação acima tende para $\|g\|^2$ (os V_j 's são densos), enquanto que o lado direito tende para

$$2\pi |\hat{\phi}(0)|^2 \int_{-1}^1 |\hat{g}(\xi)|^2 dx = 2\pi |\hat{\phi}(0)|^2 \|\hat{g}\|^2$$

(como $\hat{\phi}$ é contínua em 0, $\hat{\phi}(2^j \xi)$ tende para $\hat{\phi}(0)$ uniformemente em $[-1, 1]$). \square

8.3 Mais exemplos: a família de Battle-Lemariè

A seguir veremos como construir wavelets a partir da função escala ϕ quando translações por inteiros das mesmas não formam um sistema ortonormal, mas sim um sistema de Riesz. Nos exemplos considerados, as funções de escala serão splines. A teoria geral da construção de wavelets a partir destas será tratada na Seção 9.

8.3.1 A spline linear por partes

Seja

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

veja Figura 11.

Note que ϕ satisfaz

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x + 1) + \phi(2x) + \frac{1}{2}\phi(2x - 1) \quad (107)$$

e sua transformada de Fourier é

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{sen}\xi/2}{\xi/2} \right)^2,$$

e

$$0 < \alpha < 2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \xi = \frac{1}{3} \left(1 + 2\cos^2 \frac{\xi}{2} \right) < \beta < \infty. \quad (108)$$

Como temos (107), (108), $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \neq 0$, os subespaços V_j formam uma análise de multiresolução (consistindo das funções lineares por partes com nódulos em $(2^j \mathbb{Z})$). Como ϕ não é ortogonal às suas translações, precisamos do truque da ortogonalização e definimos

$$\hat{\phi}^{\#}(\xi) = \sqrt{3} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{4\text{sen}^2 \xi/2}{\xi^2 [1 + 2\cos^2 \xi/2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (109)$$

Ao contrário de ϕ , $\phi^{\#}$ não tem suporte compacto. Para desenhamos $\phi^{\#}$, o procedimento mais simples é calcular os coeficientes de Fourier de $[1 + 2\cos^2 \xi/2]^{-\frac{1}{2}}$,

$$[1 + 2\cos^2 \xi/2]^{-\frac{1}{2}} = \sum_n c_n e^{-in\xi},$$

e escrever $\phi^{\#}(x) = \sqrt{3} \sum_n c_n \phi(x - n)$. O $m_0^{\#}$ correspondente é

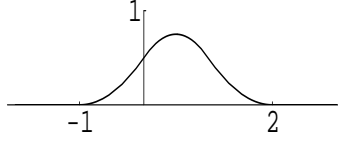
$$m_0^{\#}(\xi) = \cos^2 \xi/2 \left[\frac{1 + 2\cos^2 \xi/2}{1 + 2\cos^2 \xi} \right]^{\frac{1}{2}}$$

e $\hat{\psi}$ é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= e^{i\xi/2} \text{sen}^2 \xi/4 \left[\frac{1 + 2\text{sen}^2 \xi/4}{1 + 2\cos^2 \xi/2} \right]^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}^{\#}(\xi/2) \\ &= \sqrt{3} e^{i\xi/2} \text{sen}^2 \xi/4 \left[\frac{1 + 2\text{sen}^2 \xi/4}{(1 + 2\cos^2 \xi/2)(1 + 2\cos^2 \xi/4)} \right]^{\frac{1}{2}} \hat{\phi}(\xi/2). \end{aligned}$$

Novamente, podemos calcular os coeficientes de Fourier, d_n , de $[(1 - \text{sen}^2 \xi/4)(1 + \cos^2 \xi/2)^{-1}(1 + \cos^2 \xi/4)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$ e escrevemos

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_n (d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1}) \phi(2x - n).$$

Figura 12: *B-spline quadrática por partes.*

8.3.2 Spline quadrática por partes

Seja

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{4} - (x - \frac{1}{2})^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

veja Figura 12. Note que ϕ satisfaz

$$\phi(x) = \frac{1}{4}\phi(2x+1) + \frac{3}{4}\phi(2x) + \frac{3}{4}\phi(2x-1) + \frac{1}{4}\phi(2x-2). \quad (110)$$

Além disso,

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} e^{-i\xi/2} \left(\frac{\text{sen}\xi/2}{\xi/2} \right)^3$$

e

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 2\pi \sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 &= \frac{11}{20} + \frac{13}{30} \cos \xi + \frac{1}{60} \cos 2\xi \\ &= \frac{8}{15} + \frac{13}{30} \cos \xi + \frac{1}{30} \cos^2 \xi < \beta < \infty. \end{aligned} \quad (111)$$

Por causa das relações (110), (111), o fato que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \neq 0$, os subespaços associados V_j formam uma análise de resolução múltipla (consistindo de funções quadráticas por partes, com nódulos em $2^j\mathbb{Z}$). Como $\phi(x-k)$ não ortogonais, usamos o truque da ortogonalização para encontrar $\phi^\#$ e $m_0^\#$, antes de construirmos ψ .

Nos dois exemplos acima consideramos as splines de ordem 1 e 2, respectivamente. A spline de ordem zero, corresponde a ϕ igual à função característica do intervalo $[0, 1)$ (neste caso, $\phi(x-k)$ são ortonormais e não precisamos aplicar o truque da diagonalização). Na seção 9 consideraremos splines de ordens arbitrárias. O resultado é que o suporte de $\phi^\# = \mathbb{R} = \text{suporte de } \psi$ para todas as wavelets de Battle-Lemariè. Conforme será visto no Teorema 9.6, tem decaimento exponencial, embora o seu suporte de ψ seja a reta toda.

9 Wavelets B-Splines

9.1 Splines

Nesta seção introduziremos as splines e, a partir delas, construiremos wavelets utilizando-se a *ARM*.

Definição 9.1. *Seja a um número real positivo e $n \in \mathbb{N}$. Uma spline de ordem n com “nodes” em $a\mathbb{Z}$, é uma função f definida em \mathbb{R} que é de classe C^{n-1} e é um polinômio de grau no máximo n quando restrita a cada intervalo $[ja, (j+1)a]$ para $j \in \mathbb{Z}$. O espaço de todas as splines de ordem n com “nodes” em $a\mathbb{Z}$ será denotado por $S^n(a\mathbb{Z})$.*

Dado um número real h , definimos o operador translação T_h , por $(T_h f)(x) = f(x-h)$. Dado um inteiro positivo s , definimos o operador dilatação J_s , por $(J_s f)(x) = f(2^s x)$. Note que $J_s(S^n(a\mathbb{Z})) = S^n(2^{-s}a\mathbb{Z})$ e $T_{ka}(S^n(a\mathbb{Z})) = S^n(a\mathbb{Z})$.

Definição 9.2. *Para $n \in \mathbb{N}$, defina as funções $N_n(x)$, chamada de B-splines de ordem n , como*

(i) $N_0 = \mathbf{1}_{[0,1]}$.

(ii) Para $n > 0$, definimos N_n indutivamente como $N_{n+1} = N_n * N_0$, onde

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

É claro que N_n é uma convolução de um produto $N_0 * \dots * N_0$ com $n+1$ fatores.

Teorema 9.1. *Para $n \in \mathbb{N}$, as funções $N_n(x)$ têm as seguintes propriedades:*

$$N_n(x) > 0, \quad \text{para } x \in (0, n+1) \quad (112)$$

$$\text{supp } N_n = [0, n+1] \quad (113)$$

$$N_n \in S^n(\mathbb{Z}) \quad (114)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} N_n(x-k) = 1, \quad (115)$$

$$N_n\left(\frac{n+1}{2} - x\right) = N_n\left(\frac{n+1}{2} + x\right), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \quad (116)$$

$$N'_{n+1}(x) = N_n(x) - N_n(x-1). \quad (117)$$

Prova. Observe que (112)-(116) valem para $n=0$; assim, procederemos por indução. Da definição,

$$\begin{aligned} N_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} N_n(x-t)N_0(t)dt \\ &= \int_0^1 N_n(x-t)dt = \int_{x-1}^x N_n(u)du. \end{aligned} \quad (118)$$

De (118), vemos imediatamente que se (112) e (113) valem para n , elas também valem para $n + 1$. A equação (118) também mostra que se $N_n \in C^{m-1}$, então, $N_{n+1} \in C^m$. Para ver que N_{n+1} é um polinômio em qualquer intervalo $[k, k + 1]$, tome $x \in (k, k + 1)$ e use (118) para escrever

$$N_{n+1}(x) = \int_{k-1}^k N_n(u)du + \int_k^x N_n(u)du - \int_{k-1}^{x-1} N_n(u)du. \quad (119)$$

Como $N_n(u)$ é um polinômio de grau no máximo n nos intervalos $[k - 1, k]$ e $[k, k + 1]$, vemos que $N_{n+1}(x)$ é um polinômio de grau no máximo $n + 1$ no intervalo $(k, k + 1)$, o que nos dá (114). Para obter (115), usamos (118) e a hipótese de indução e obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_{n+1}(x - k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 N_n(x - k - t)dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_n(x - t - k)dt \\ &= \int_0^1 1dt = 1. \end{aligned}$$

A propriedade (116) é uma propriedade geral de convolução. Usando mudança de variáveis e a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} N_{n+1}\left(\frac{n+2}{2} - x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} N_n(u)N_0\left(\frac{n+2}{2} - x - u\right)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N_n\left(\frac{n+1}{2} + v\right)N_0\left(\frac{1}{2} - x - v\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N_n\left(\frac{n+1}{2} - v\right)N_0\left(\frac{1}{2} + x + v\right)dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N_n(u)N_0\left(\frac{n+2}{2} + x - u\right)du \\ &= N_{n+1}\left(\frac{n+2}{2} + x\right). \end{aligned}$$

Diferenciando-se (119), obtemos (117). □

Lema 9.1. *Suponha que $f \in S^n(\mathbb{Z})$ e $f|[-1, 0] = 0$, então, $f|[0, 1] = ct^n$, para alguma constante c .*

Prova. Nitidamente, todas as derivadas à esquerda de f em 0 são 0, como $f \in S^n(\mathbb{Z})$, inferimos que as primeiras $(n - 1)$ derivadas de f em 0 existem, logo, elas são 0. Isto significa que $f|[0, 1]$ é um polinômio de grau no máximo n , cujas $(n - 1)$ derivadas são nulas em 0, o que prova o lema. □

Observação 9.1. Seguindo os argumentos do Lema 9.1, se $f|_{[0,1]} = 0$, então, $f|_{[-1,0]} = ct^n$. Em particular, fazendo-se $f = N_n$, como $\text{supp } N_n = [0, n+1]$, temos, $N_n|_{[-1,0]} = 0$, logo, $N_n|_{[0,1]} = \alpha_1 t^n$. Em geral, para todo $k \geq 1$, temos

$$N_n(t-k)|_{[k, k+1]} = \alpha_k(t-k)^n \quad (120)$$

e

$$N_n(t+n+k)|_{[-k-2, -k-1]} = \alpha_{-k}(t+k-1)^n \quad (121)$$

onde α_k e α_{-k} são diferentes de zero. Para provarmos (120), basta lembrarmos que $\text{supp } N_n(t-k) = [k, n+k+1]$, logo, se fizermos $f(t) = N_n(t-k)$, então, $f(t+k)|_{[-1,0]} = N_n(t)|_{[-1,0]} = 0$, portanto, $f(t+k)|_{[0,1]} = \alpha_k t^n$, ou seja, $f(t)|_{[k, k+1]} = \alpha_k(t-k)^n$. De maneira análoga, como $\text{supp } N_n(t+n+k) = [-n-k, -k+1]$, se fizermos $f(t) = N_n(t+n+k)$, então, $f(t-k+1) = N_n(t+n+1)$, logo, $f(t-k+1)|_{[0,1]} = 0$, portanto, $f(t-k+1)|_{[-1,0]} = \alpha_{-k} t^n$, portanto, $f(t)|_{[-k-2, -k-1]} = \alpha_{-k}(t+k-1)^n$, o que prova (121).

Teorema 9.2. Se $f \in S^n(\mathbb{Z})$ e $\text{supp } f \subset [0, n+1]$, então, $f = cN_n(t-k)$, para algum $c \in \mathbb{R}$, para algum $k \in [0, n]$.

Prova. Procederemos por indução. O teorema é nitidamente válido para $n = 0$; assim, assumiremos que ele seja verdadeiro para $(n-1)$. Transladando f à esquerda por inteiro se necessário, podemos assumir que $f|_{[0,1]}$ não é identicamente zero. Do Lema 9.1, vemos que $f|_{[0,1]} = c_1 t^n$ para algum $c_1 \neq 0$ e também $N_n|_{[0,1]} = c_2 t^n$ para algum $c_2 \neq 0$. Fazendo-se $\alpha = \frac{c_1}{c_2}$, temos $(f - \alpha N_n)|_{[0,1]} = 0$. Se $f - \alpha N_n = 0$, a prova está concluída; caso contrário, $f' - \alpha N'_n \in S^{n-1}(\mathbb{Z})$ e $\text{supp } (f' - \alpha N'_n) \subset [1, n+1]$, portanto, $\text{supp } (f' - \alpha N'_n)(t+1) \subset [0, n]$. Da hipótese de indução, obtemos que $(f' - \alpha N'_n)(t+1) = c_3 N_{n-1}(t)$ para alguma constante $c_3 \neq 0$, ou seja, $(f' - \alpha N'_n)(t) = c_3 N_{n-1}(t-1)$, mas isto é impossível, visto que $\int_{-\infty}^{\infty} (f'(x) - \alpha N'_n(x)) dx = 0$, mas segue-se de (112) e (113) que $\int_{-\infty}^{\infty} c_3 N_{n-1}(x+1) dx \neq 0$. \square

Observação 9.2. Note que uma consequência simples do Teorema 9.2 é o seguinte: se $f \in S^n(\mathbb{Z})$ e $\text{supp } f \subset I$ para algum intervalo I com $|I| < n+1$, então, $f \equiv 0$.

Teorema 9.3. Suponha que ϕ seja um polinômio de grau no máximo n . Então, existe uma única spline $f \in S^n(\mathbb{Z})$ tal que

$$f = \sum_{k=-n}^0 a_k N_n(x-k)$$

e $f|_{[0,1]} = \phi|_{[0,1]}$. Em particular, $\text{supp } f \subset [-n, n+1]$.

Prova. Seja $X_n = \text{span}\{N_n(x - k)\}_{k=-n}^0$. De (113), vemos facilmente que as funções $\{N_n(x - k)\}_{k=-n}^0$ são linearmente independentes, logo, $\dim X_n = n + 1$. Seja P_n o espaço dos polinômios de grau no máximo n considerados como funções em $[0, 1]$. O mapeamento restrição $T : X_n \rightarrow P_n$ definido como $T(f) = f|_{[0, 1]}$ é claramente linear. Mostraremos que ele é 1-1. Assuma o contrário, que para alguma seqüência não-nula $(a_k)_{k=-n}^0$, temos $T(g) = 0$ onde $g = \sum_{k=-n}^0 a_k N_n(x - k)$. Isto significa que

$$\sum_{k=-n}^0 a_k N_n(x - k)|_{[0, 1]} = 0, \quad (122)$$

mas segue-se de (113) que $\text{supp } g \subset [-n, n + 1]$, e de (122) obtemos $\text{supp } g \subset [-n, 0] \cup [1, n + 1]$. Da definição de spline, vemos que a função g_1 , definida como

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g(x), & x \leq 0 \\ &= 0, & x > 0 \end{aligned}$$

pertence a $S^n(\mathbb{Z})$. Da observação 9.2, inferimos que $g_1 = 0$. Portanto, $\text{supp } g \subset [1, n]$ e o mesmo argumento nos conduz a $g = 0$. Isto significa que T é 1-1, como $\dim X_n = \dim P_n = n + 1$, inferimos que T é um isomorfismo de X_n sobre P_n . \square

Corolário 9.1. *Se para alguma escolha de $\{a_k\}_{k=-n}^0$ tivermos $\sum_{k=-n}^0 a_k N_n(x - k)|_{[0, 1]} = 0$, então, $a_k = 0, \forall k$.*

Teorema 9.4. *Suponha que $f \in S^n(\mathbb{Z})$. Então f pode ser escrita de maneira única como*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k N_n(x - k).$$

Note que para cada $x \in \mathbb{R}$, existem no máximo $(n + 1)$ parcelas não nulas na soma acima, assim, não há problema algum de convergência.

Prova. Do Teorema 9.3, existe uma única spline

$$\phi = \sum_{k=-n}^0 \beta_k N_n(x - k) \quad (123)$$

tal que $\phi|_{[0, 1]} = f|_{[0, 1]}$, logo, $f - \phi|_{[0, 1]} = 0$. Do Lema 9.1 e da Observação 9.1, existem constantes c_1 e c_{-1} , tais que $f - \phi|_{[1, 2]} = c_1(t - 1)^n$ e $f - \phi|_{[-1, 0]} = c_{-1}t^n$. Por outro lado, $N_n(t + n + 1)|_{[1, 0]} = \alpha_{-1}t^n$, $N_n(t - 1)|_{[1, 2]} = \alpha_{-1}(t - 1)^n$, $N_n(t + n + 1)|_{[0, 2]} = 0$ e $N_n(t - 1)|_{[-1, 0]} = 0$, então, fazendo-se $c_1 = \frac{b_1}{\alpha_a}$ e $c_{-1} = \frac{b_{-1}}{\alpha_{-1}}$, teremos

$$f - \phi - c_1 N_n(x - 1) - c_{-1} N_n(x + n + 1)|_{[-1, 2]} = 0.$$

Vimos que $N_n(t - 2)|_{[2, 3]} = \alpha_2(t - 2)^n$ e $N_n(t + n + 1)|_{[-2, -1]} = \alpha_{-2}(t + 1)^n$, como $f - \phi - c_1 N_n(x - 1) - c_{-1} N_n(x + n + 1) \in S^n(\mathbb{Z})$ e $f - \phi - c_1 N_n(x - 1) - c_{-1} N_n(x + n + 1)|_{[-1, 2]} =$

0, suas restrições aos intervalos $[2, 3]$ e $[-2, -1]$, são $b_2(t-2)^n = \frac{b_2}{\alpha_2} N_n(t-2) | [2, 3]$ e $b_{-2}(t+1)^n = \frac{b_{-2}}{\alpha_{-2}} N_n(t+n+1) | [-2, -1]$, respectivamente. Como $N_n(t-2) | [-3, 2] = 0$ e $N_n(t+n+2) | [-1, 3] = 0$, fazendo-se $c_2 = \frac{b_2}{\alpha_2}$ e $c_{-2} = \frac{b_{-2}}{\alpha_{-2}}$, temos

$$f - \phi - c_1 N_n(t-1) - c_{-1} N_n(t+n+1) - c_2 N_n(t-2) - c_{-2} N_n(t+n+2) | [-2, 3] = 0.$$

Continuando desta maneira, obteremos uma seqüência de coeficientes $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}}$ tal que

$$\begin{aligned} f(t) &= \phi(t) + \sum_{k \geq 1} c_k N_n(t-k) + \sum_{k \geq 1} c_{-k} N_n(t+n+k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k N_n(t-k), \end{aligned}$$

que é (123).

Se a representação não fosse única, existiria uma seqüência não-nula $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, tal que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k N_n(x-k) = 0$. Transladando, podemos assumir que $a_0 \neq 0$ (no argumento abaixo, se $a_{k_0} \neq 0$, tomaríamos o intervalo $[k_0, k_0 + 1]$, invés de $[0, 1]$). Olhando para os suportes de $N_n(x-k)$, inferimos de (113) que (como $\text{supp } N_n(t-k) = [k, n+k+1]$, $N_n(t-k) | [0, 1] = 0$, para todo $k > 0$ ou $k < -n-1$)

$$0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k N_n(x-k) | [0, 1] = \sum_{k=-n}^0 a_k N_n(x-k) | [0, 1],$$

o que pelo Corolário 9.1 implicaria $a_k = 0$, $\forall k = -n, \dots, 0$, contrariando a hipótese de $a_0 \neq 0$. \square

9.2 Wavelets Splines

Agora construiremos wavelets que são splines. Faremos isto mostrando que os espaços de splines $S^n(2^{-j}\mathbb{Z})$ (n fixo) formam uma *ARM*.

Proposição 9.1. *Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, o sistema $\{N_n(t-m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é um sistema de Riesz em $L^2(\mathbb{R})$.*

Prova. Calcularemos a transformada de Fourier de N_0 . Temos

$$\begin{aligned} \hat{N}_0(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \cos(x\xi) dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \text{sen}(x\xi) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} \int_0^\xi \cos(u) du - \frac{i}{\sqrt{2\pi}\xi} \int_0^\xi \text{sen}(u) du \\ &= \frac{\text{sen}\xi}{\sqrt{2\pi}\xi} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}\xi} (\cos\xi - 1), \quad \xi \neq 0 \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \text{ se } \xi = 0 \right). \end{aligned} \quad (124)$$

Seja $M_n = \min_{\xi \in [-\pi, \pi]} |\hat{N}_0(\xi)|^{2n} > 0$. Dado $\xi \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\xi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Se $\xi = 2k\pi$, então, $\xi - 2k\pi = 0$, portanto, $\sum_l |\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^{2n} \geq |\hat{N}_0(\xi - 2\pi k)|^{2n} = |\hat{N}_0(0)|^{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2n}$. De maneira análoga, se $\xi = 2(k+1)\pi$, então, $\xi - 2(k+1)\pi = 0$ e concluímos que $\sum_l |\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^{2n} \geq |\hat{N}_0(\xi - 2(k+1)\pi)|^{2n} = |\hat{N}_0(0)|^{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2n}$. Se $\xi \in (2k\pi, 2(k+1)\pi)$, então, $\xi - 2k\pi \in (0, 2\pi)$. Se $0 < \xi - 2k\pi < \pi$, então, $\sum_l |\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^{2n} \geq |\hat{N}_0(\xi - 2\pi k)|^{2n} \geq M_n$. Se $\pi < \xi - 2k\pi < 2\pi$, então, $-\pi < \xi - 2(k+1)\pi < \pi$, então, $\sum_l |\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^{2n} \geq |\hat{N}_0(\xi - 2(k+1)\pi)|^{2n} \geq M_n$. Seja $A_n = \min\{M_n, \frac{1}{(2\pi)^n}\}$, então,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^{2n} \geq A_n. \quad (125)$$

Claramente, $\{N_0(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é ortonormal, logo, $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$, a.e, portanto, $|\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}$, para todo l e quase todo ξ . Como pelo Teorema da Convolução, $\hat{N}_n(\xi) = (2\pi)^{n/2} (\hat{N}_0(\xi))^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \sum_l |\hat{N}_n(\xi + 2\pi l)|^2 &= (2\pi)^n \sum_l |\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^{2n+2} \\ &\leq (2\pi)^n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sum_l |\hat{N}_0(\xi + 2\pi l)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}, \quad a.e. \end{aligned}$$

portanto,

$$A_n \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_n(\xi + 2\pi l)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}, \quad (126)$$

e concluímos que o sistema $\{N_n(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é de Riesz. \square

Teorema 9.5. *Para cada $n = 0, 1, \dots$ os espaços $S^n(2^{-j}\mathbb{Z})$ com $j \in \mathbb{Z}$ formam uma ARM.*

Prova. Já fizemos todos os pedaços. A condição (18) da Definição 3.1 segue-se da Proposição e 9.1 e da Proposição 8.3. As demais condições são fáceis de serem verificadas, exceto, talvez (14), mas isto segue-se da Proposição 8.5. \square

9.3 Decaimento Exponencial de Wavelets Splines

Proposição 9.2. *Suponha que $g(x)$ seja uma função em \mathbb{R} , satisfazendo $|g(x)| \leq ce^{-\gamma|x|}$, onde c e γ são constantes positivas. Então existe uma função 2π -periódica, $G(z)$, analítica em $|Im(z)| < \gamma$, tal que $\forall \xi \in \mathbb{R}$*

$$G(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2\pi l)|^2.$$

Para provar esta proposição, precisaremos de dois lemas.

Lema 9.2. *Se $g \in L^2(\mathbb{R})$, então,*

$$\sum_k |\hat{g}(\xi - 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x - k) \overline{g(x)} dx \right) e^{ik\xi}.$$

Prova. Os coeficientes de Fourier do lado esquerdo da equação acima, c_k , satisfazem:

$$\begin{aligned} 2\pi c_k &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_l |\hat{g}(\xi - 2\pi l)|^2 \right) e^{-ik\xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{-ik\xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{-ik\xi} \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{T_k g}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \langle \widehat{T_k g}, \hat{g} \rangle \\ &= \langle T_k g, g \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x - k) \overline{g(x)} dx, \end{aligned}$$

logo, $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - k) \overline{g(x)} dx$. □

Lema 9.3. *Suponha que $|g(x)| \leq ce^{-\gamma|x|}$, onde c e γ são constantes positivas. Então,*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x - k) \overline{g(x)} dx \right| \leq c_\beta e^{-\beta k}, \quad (127)$$

para cada $0 < \beta < \gamma$, reciprocamente, se uma sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ satisfaz $|a_k| \leq ce^{-\alpha|k|}$, então, também

$$\left| \sum_k a_k g(x - k) \right| \leq c_\beta e^{-\beta|x|}, \quad (128)$$

para cada $\beta < \min(\alpha, \gamma)$.

Prova. Suponha $k \geq 0$. Como

$$\begin{aligned} |x| + |x - k| &= k, \text{ se } 0 \leq x \leq k \\ &= 2x - k, \text{ se } k \leq x \\ &= k - 2x, \text{ se } x < 0, \end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x-k)\overline{g(x)}dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-k)||\overline{g(x)}|dx \\
&\leq c^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(|x-k|+|x|)}dx \\
&= c^2 \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\gamma(k-2x)}dx + \int_0^k e^{-\gamma k}dx + \int_k^{\infty} e^{-\gamma(2x-k)}dx \right) \\
&= c^2 \left(e^{-\gamma k} \int_{-\infty}^0 e^{2\gamma x}dx + e^{-\gamma k}k + e^{-\gamma k} \int_0^{\infty} e^{-2\gamma x}dx \right) \\
&= c^2 e^{-\gamma k} \left(k + \frac{1}{\gamma} \right) \\
&\leq c^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) k e^{-\gamma k}, \quad \text{se } k \geq 1.
\end{aligned}$$

Se $k < 0$, fazemos $x - k = y$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x-k)\overline{g(x)}dx \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\overline{g(y+k)}dy \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(y+k)\overline{g(y)}dy \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x-|k|)\overline{g(x)}dx \right| \\
&\leq c^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\gamma|k|}|k|
\end{aligned}$$

Portanto, $\forall k \neq 0$, para $0 < \beta < \gamma$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x-k)\overline{g(x)}dx \right| &= c^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\gamma|k|}|k| \\
&= c^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\beta|k|} e^{-(\gamma-\beta)|k|} \\
&\leq \frac{c^2}{(\gamma-\beta)e} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\beta|k|}.
\end{aligned}$$

Seja $c_\beta = \max \left(2, \frac{1}{(\gamma-\beta)e} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right) c^2$, então, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e $0 < \beta < \gamma$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-k)\overline{g(x)}dx \leq c_\beta e^{-\beta|k|}.$$

Agora suponha que a sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ satisfaça $|a_k| \leq ce^{-\alpha|k|}$. Então,

$$\begin{aligned} \left| \sum_k a_k g(x-k) \right| &\leq \sum_k |a_k| |g(x-k)| \\ &\leq \sum_k ce^{-\alpha|k|} ce^{-\gamma|x-k|} \\ &= c^2 \sum_k e^{-\alpha|k| - \gamma|x-k|} \\ &\leq c^2 \sum_k e^{-\beta(|k|+|x-k|)} \equiv F_\beta(x), \end{aligned}$$

onde $\beta < \min(\alpha, \gamma)$. Note que $F_\beta(-x) = F_\beta(x)$. Seja $f(t) = e^{-(\beta|t|-|x-t|)}$, para $x \geq 0$ fixo. Note que

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\beta(2|t|+x)}, \quad \text{se } t \text{ for negativo} \\ &= e^{-\beta x}, \quad \text{se } 0 \leq t \leq x \\ &= e^{2t-x}, \quad \text{se } t > x. \end{aligned}$$

Assim, se x for um inteiro não-negativo, teremos

$$\begin{aligned} F_\beta(x)/c^2 &= \sum_{k=-\infty}^0 f(k) + \sum_{k=1}^x f(k) + \sum_{k=x+1}^{\infty} f(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 e^{-\beta(2|k|+x)} + \sum_{k=1}^x e^{-\beta x} + \sum_{k=x+1}^{\infty} e^{-\beta(2k-x)} \\ &= \frac{e^{-\beta x}}{1 - e^{-2\beta}} + xe^{-\beta x} + e^{\beta x} \sum_{k=x+1}^{\infty} e^{-2\beta k} \\ &\leq e^{-\beta x} \left(x + \frac{2}{1 - 2^{-\beta}} \right). \end{aligned}$$

Na passagem da penúltima para a última linha acima, usamos que $\sum_{k=x+1}^{\infty} e^{-2\beta k} = \frac{e^{-2\beta(x+1)}}{1 - e^{-2\beta}}$. Assim, se $x \in \mathbb{N}$,

$$F_\beta(x) \leq e^{-\beta x} \left(x + \frac{2}{1 - 2^{-\beta}} \right) c^2. \quad (129)$$

Por outro lado, se $x \geq 0$ não for inteiro, teremos

$$F_\beta(x)/c^2 = \sum_{k=-\infty}^0 f(k) + \sum_{k=1}^{[x]} f(k) + \sum_{k=[x+1]}^{\infty} f(k)$$

e concluímos que (129) vale, pois, $[x] + 1 \geq x$. Em geral, em virtude das observações acima e da paridade de $F_\beta(x)$, teremos

$$F_\beta(x) \leq e^{-\beta|x|} \left(|x| + \frac{2}{1 - 2^{-\beta}} \right) c^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, dado $0 < \delta < \beta$, como $e^{-(\beta-\delta)|x|}|x| \leq \frac{1}{e^{(\beta-\delta)}}$, para todo x , então, para $|x| \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_\beta(x) &\leq e^{-\delta|x|} e^{-(\beta-\delta)|x|}|x| \left(1 + \frac{2}{1-2^{-\beta}}\right) c^2 \\ &\leq e^{-\delta|x|} \frac{1}{e^{(\beta-\delta)}} \left(1 + \frac{2}{1-2^{-\beta}}\right) c^2 \equiv \tilde{c}_\beta e^{-\delta|x|}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $|x| < 1$, então, $F_\beta(x) \leq e^{-\delta|x|} \left(1 + \frac{2}{1-2^{-\beta}}\right)$.

Seja $c_\beta = c^2 \max\left\{1, \frac{1}{e^{(\beta-\delta)}} \left(1 + \frac{2}{1-2^{-\beta}}\right)\right\}$, então, $|\sum_k a_k g(x-k)| \leq c_\beta e^{-\delta|x|}$. \square

Prova da Proposição 9.2. Pelos Lemas 9.2 e 9.3, vemos que

$$\sum_k |\hat{g}(\xi + 2\pi l)|^2 = \sum_n a_n e^{in\xi}$$

onde $|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-k) \overline{g(x)} dx\right| \leq c_\beta e^{-\beta|n|}$ para todo $\beta < \gamma$. Defina

$$G(z) = \sum_n a_n e^{inz}. \quad (130)$$

Como $|a_n e^{inz}| \leq c_\beta e^{-\beta} e^{-n|Im(z)|} = c_\beta e^{-(\beta-|Im(z)|)n}$, a série (130) converge uniformemente em toda a faixa $|Im(z)| < \beta < \gamma$. Logo, $G(z)$ é analítica em $|Im(z)| < \gamma$. Claramente, G é 2π -periódica. \square

Proposição 9.3. *Existe uma função $\Phi \in S^n(\mathbb{Z})$ tal que o sistema $\{\Phi(t-m)\}_m$ é uma base ortonormal para $S^n(\mathbb{Z})$ e $|\Phi(t)| \leq ce^{-\alpha|t|}$, onde c e α são constantes positivas.*

Prova. Seja

$$\Phi(\xi) = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_n(\xi - 2\pi l)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{N}_n(\xi) \quad (131)$$

Como $\{N_n(t-m)\}_m$ é um sistema de Riesz, então, $\{\Phi(t-m)\}_m$ é uma base ortonormal. Como $N_n(x)$ tem suporte compacto, $N_n(x)$ decai exponencialmente e, pela Proposição 9.2, existe uma função 2π -periódica, $G(z)$, analítica em \mathbb{C} , tal que para $\xi \in \mathbb{R}$

$$G(\xi) = \sum_l |\hat{N}_n(\xi - 2\pi l)|^2.$$

Como $\{N_n(t-m)\}_m$ é um sistema de Riesz, existem constantes positivas, $a < A$, tais que

$$\frac{a^2}{2\pi} \leq \sum_l |\hat{N}_n(\xi - 2\pi l)|^2 \leq \frac{A^2}{2\pi}, \quad a.e.$$

se para algum $\xi_o \in \mathbb{R}$, $G(\xi_o) = 0$, da continuidade de G , existiria $\delta > 0$ tal que para $\xi \in (\xi_o - \delta, \xi_o + \delta)$,

$$G(\xi) < \frac{a^2}{4\pi}$$

o que contrariaria a hipótese de $G(\xi) \geq \frac{a^2}{2\pi}$, a.e.

Seja $\delta = \min\{(G(\xi), \xi \in [0, 2\pi])\}$, como $G(\xi) \neq 0, \forall \xi$ e G é contínua, então, $\delta \geq 0$. Como G é 2π -periódica, $G(\xi) \geq \delta, \forall \xi \in \mathbb{R}$.

Seja $\xi = x + iy$, onde $0 \leq x \leq 2\pi, -\alpha < y < \alpha, \alpha = \min(\frac{\delta}{2M}, \frac{\gamma}{2}), M = \sup\{|G(\xi)|, 0 \leq \text{Re } \xi \leq 2\pi, -\frac{\gamma}{2} \leq \text{Im } \xi \leq \frac{\gamma}{2}\}$, então,

$$\begin{aligned} |G(x + iy)| &= |G(x) + \int_x^{x+iy} G'(\xi) d\xi| \\ &= |G(x) + i \int_0^y G'(x + it) dt| \\ &= |(G(x) - \int_0^y \text{Im } G'(x + it) dt) + i \int_0^y \text{Re } G'(x + it) dt| \\ &\geq |G(x) - \int_0^y \text{Im } G'(x + it) dt| \\ &\geq G(x) - |\int_0^y \text{Im } G'(x + it) dt| \\ &\geq G(x) - \int_0^{|y|} |G'(x + it)| dt \\ &\geq G(x) - M|y| \\ &\geq G(x) - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $|G(z)| > \frac{\delta}{2}$, para $|\text{Im } z| < \alpha$ e podemos definir $(G(z))^{-\frac{1}{2}}$ como uma função analítica e 2π -periódica.

Seja

$$(G(\xi))^{-\frac{1}{2}}(\xi) = \sum_k a_k e^{ik\xi},$$

onde $a_k = \int_{-\pi}^{\pi} (G(\xi))^{-\frac{1}{2}} e^{-ik\xi} d\xi$. Como $\hat{\Phi}(\xi) = (G(\xi))^{-\frac{1}{2}}(\xi) \hat{N}_n(\xi) = \sum_k a_k e^{ik\xi} \hat{N}_n(\xi)$, segue-se que $\Phi(x) = \sum_k a_k N_n(x - k)$. Para β fixo, $|\beta| < \alpha$, aplicamos o Teorema de

Cauchy a $(G(z))^{-\frac{1}{2}}e^{-ikz}$: tomaremos um retângulo com vértices em $-\pi$, π , $\pi+i\beta$, $-\pi+i\beta$

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_C (G(z))^{-\frac{1}{2}} e^{-ikz} dz \\
&= i \int_{-\beta}^{\beta} (G(\pi + iy))^{-\frac{1}{2}} e^{-ik(\pi+iy)} dy \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} (G(\xi + i\beta))^{-\frac{1}{2}} e^{-ik(\xi+i\beta)} d\xi \\
&\quad - i \int_{-\beta}^{\beta} (G(-\pi + iy))^{-\frac{1}{2}} e^{-ik(-\pi+iy)} dy \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} (G(\xi))^{-\frac{1}{2}} e^{-ik\xi} d\xi.
\end{aligned}$$

Como $(G(-\pi + iy))^{-\frac{1}{2}} = (G(-\pi + iy + 2\pi))^{-\frac{1}{2}} = (G(\pi + iy))^{-\frac{1}{2}}$ e $e^{ik\xi}$ também é 2π -periódica, as integrais ao longo dos lados verticais se cancelam e concluímos que

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} (G(\xi + i\beta))^{-\frac{1}{2}} e^{-ik(\xi+i\beta)} d\xi,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
|a_k| &\leq 2\pi e^{\beta k} \sup_{\xi} |(G(\xi + i\beta))^{-\frac{1}{2}}| \\
&\leq 2\pi e^{\beta k} \frac{2}{\delta} \leq ce^{\beta k}.
\end{aligned}$$

Esta relação vale tanto para β positivo quanto para negativo; se k for negativo, tomamos $\beta > 0$ e teremos $|a_k| \leq ce^{-\beta|k|} = ce^{-|\beta k|}$; se k for positivo, tomamos $\beta < 0$ e temos $|a_k| \leq ce^{-|\beta|k} = ce^{-|\beta k|}$. De qualquer forma, teremos $|a_k| \leq ce^{-|\beta k|}$, $\forall k$. Portanto, se tomarmos $0 < \beta < \alpha$, teremos $|a_k| \leq ce^{-\beta|k|}$ e pelo Lema 9.2, $\Phi(x)$ decai exponencialmente. \square

Teorema 9.6. *Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, podemos construir uma wavelet spline $\psi \in S^n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ tal que $|\psi(x)| \leq e^{-\alpha|x|}$, para algum $\alpha > 0$.*

10 Wavelets Periódicas

Nesta Seção, transformaremos uma base $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ numa base de wavelets para $L^2[0, 1]$, periodizando-se cada $\psi_{j,k}$. A periodização de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ sobre $[0, 1]$ é definida por

$$\mathcal{P}f(t) = f^{per}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t + k). \quad (132)$$

Mostraremos que para $j \leq 0$ existem 2^{-j} diferentes $\psi_{j,k}$, indexadas por $0 \leq k < 2^{-j}$.

Sejam $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ a função escala e uma wavelet de uma ARM, respectivamente. Como $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, então, $\hat{\phi}(\xi)$ é contínua, para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Em particular, sendo $\phi(\xi)$ contínua em $\xi = 0$, segue-se do Corolário 8.2 que $|\hat{\phi}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Vimos no Lema 3.1 que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi}$, a.e., em particular, existe uma seqüência $\xi_n \rightarrow 0$, tal que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi_n + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi}$, $\forall n$. Portanto, para $k_o \neq 0$, $k_o \in \mathbb{Z}$, fixo, temos

$$0 \leq |\hat{\phi}(\xi_n + 2\pi k_o)|^2 \leq \sum_{k \neq 0} |\hat{\phi}(\xi_n + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi} - |\hat{\phi}(\xi_n)|^2,$$

como $\hat{\phi}$ é contínua, tomando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos $\hat{\phi}(2\pi k_o) = 0$. Portanto,

$$\hat{\phi}(2\pi k) = 0, \quad \forall k \neq 0. \quad (133)$$

A função $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x + k)$ está em $L^2[0, 1]$ ($\|\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x + k)\|_{L^2[0,1]} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}$, isto segue da ortonormalidade dos $\phi(\cdot - k)$). Além disso, o k -ésimo coeficiente desta função, c_k , é

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 e^{2\pi i k x} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x + \pi) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \phi(x) dx \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{\phi}(2\pi k) = \sqrt{2\pi} \hat{\phi}(0) \delta_{k,0} \equiv \alpha \delta_{k,0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x + k) = \alpha, \quad \text{onde } |\alpha| = 1.$$

Da relação (51), temos

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \nu(\xi) \overline{m_\phi(\xi/2 + \pi)} \hat{\phi}(\xi/2),$$

onde $\nu(\xi)$ é 2π periódica e limitada, e de (133), segue-se que $\hat{\psi}(4\pi k) = 0$, $\forall k \neq 0$. Por outro lado, de $\hat{\phi}(\xi) = m(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2)$ e $\hat{\phi}(0) \neq 0$, segue-se que $m(\xi)$ é contínua em $\xi = 0$ e

$m(0) = 1$. Como $|m(\xi)|^2 + |m(\xi + \pi)|^2 = 1$, a.e, segue-se que $m(\xi)$ é contínua em $\xi = \pi$ e $m(\pi) = 0$, portanto, $\psi(0) = 0$. Logo

$$\hat{\psi}(\xi) \text{ é contínua em } 4\pi k \text{ e } \hat{\psi}(4\pi k) = 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}. \quad (134)$$

Para uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, definimos uma função periódica com período 1, como

$$\mathcal{P}f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t + k). \quad (135)$$

Como ϕ e ψ estão em $L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}\phi$ e $\mathcal{P}\psi$ estarão bem definidos. Note que para $j \leq 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\psi_{j,k} &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x + s) \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x + 2^{-j}s - k) \\ &= \sum_{s' \in \mathbb{Z}} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x + 2^{-j}(s' - 1) - k) \quad (\text{fizemos } s = s' - 1) \\ &= \sum_{s' \in \mathbb{Z}} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}(x + s') - (k + 2^{-j})) \\ &= \mathcal{P}\psi_{j,k+2^{-j}}(x). \end{aligned} \quad (136)$$

De (136), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\psi_{j,k}(x + 2^j) &= \mathcal{P}\psi_{j,k+2^{-j}}(x + 2^j) \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}(x + 2^j + s) - k - 2^{-j}) \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}(x + s - 1) - (k - 1)) \\ &= \sum_{s' \in \mathbb{Z}} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}(x + s') - (k - 1)) \\ &= \mathcal{P}\psi_{j,k-1}(x). \end{aligned} \quad (137)$$

De maneira análoga, temos

$$\mathcal{P}\phi_{j,k}(x) = \mathcal{P}\phi_{j,k+2^{-j}}(x) \quad (138)$$

$$\mathcal{P}\phi_{j,k-1}(x) = \mathcal{P}\phi_{j,k+2^j}(x) \quad (139)$$

A seguir, calcularemos o s -ésimo coeficiente de Fourier de $\mathcal{P}\psi_{j,k}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{P}\psi_{j,k}}(s) &= \int_0^1 e^{2\pi isx} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x + \lambda) dx \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{2\pi isx} \psi_{j,k}(x + \lambda) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi isx} \psi_{j,k}(x) dx \\
&= \sqrt{2\pi} \widehat{\psi_{j,k}}(-2\pi s) \\
&= \sqrt{2\pi} 2^{j/2} e^{-2\pi isk 2^j} \hat{\psi}(-2\pi s 2^j).
\end{aligned} \tag{140}$$

De maneira análoga, para $j < 0$, temos

$$\widehat{\mathcal{P}\phi_{j,k}}(s) = \sqrt{2\pi} \widehat{\phi_{j,k}}(-2\pi s) = \sqrt{2\pi} 2^{j/2} e^{-2\pi isk 2^j} \hat{\phi}(-2\pi s 2^j) \tag{141}$$

De (140) e (134), se $j > 0$, temos para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\mathcal{P}\psi_{j,k}}(s) = 0$, $\forall s \in \mathbb{Z}$, logo,

$$\mathcal{P}\psi_{j,k} = 0, \text{ para todo } j > 0, \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{142}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\hat{\phi}_{j,k}(s) &= 0, \forall s \neq 0, s \in \mathbb{Z}. \\
\mathcal{P}\hat{\phi}_{j,k}(0) &= \sqrt{2\pi} 2^{j/2} \hat{\phi}(0) = 2^{j/2}.
\end{aligned}$$

(Escolhemos a normalização de ϕ tal que $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$)

Portanto,

$$\mathcal{P}\phi_{j,k} = 2^{j/2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \geq 0. \tag{143}$$

Agora, para cada $j = 0, -1, -2, \dots$, denotamos

$$\tilde{V}_j = \text{span}\{\mathcal{P}\phi_{j,k} : k = 0, 1, \dots, 2^{-j} - 1\}. \tag{144}$$

Dado $k' \in \mathbb{Z}$, mostraremos que existe $k \in [0, 2^{-j} - 1]$ tal que $\mathcal{P}\phi_{j,k} = \mathcal{P}\phi_{j,k'}$. De fato, como $k' \in [s2^{-j}, (s+1)2^{-j} - 1]$ para algum $s \in \mathbb{Z}$, podemos escrever $k' = k + s'2^{-j}$, para algum $s' \in \mathbb{Z}$ e $k \in [0, 2^{-j} - 1]$. Se $s' \geq 0$, de (138), teremos $\mathcal{P}\phi_{j,k'} = \mathcal{P}\phi_{j,k+s'2^{-j}} = \mathcal{P}\phi_{j,k}$; caso contrário, escrevemos, $k = k' + |s'|2^{-j}$ e, novamente, de (138), teremos $\mathcal{P}\phi_{j,k} = \mathcal{P}\phi_{j,k'+|s'|2^{-j}} = \mathcal{P}\phi_{j,k'}$.

Assim,

$$\text{span}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} = \text{span}\{\phi_{j,k} : 0 \leq k \leq 2^{-j} - 1\} \equiv \tilde{V}_j. \tag{145}$$

De (143), $\mathcal{P}\phi_{0,k} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, logo, \tilde{V}_0 consiste de funções constantes.

Observação 10.1. Embora possa parecer natural pensar que $\tilde{V}_j = \mathcal{P}V_j$, geralmente existem funções $f \in V_j$ para as quais $\mathcal{P}f$ não está bem definida.

Proposição 10.1. Com as definições acima e sob a hipótese que

$$\mathcal{P}|\psi| \text{ e } \mathcal{P}|\phi| \text{ sejam funções limitadas,} \quad (146)$$

temos

- (i) $\tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \dots$
- (ii) Para cada $j \leq 0$, o sistema $\{\mathcal{P}\phi_{j,k}\}_{k=0}^{2^{-j}-1}$ é uma base ortonormal para \tilde{V}_j .
- (iii) Para cada $j \leq 0$, o sistema

$$1, \mathcal{P}\psi_{s,k}, \text{ para } j+1 \leq s \leq 0, 0 \leq k \leq 2^{-s}-1 \quad (147)$$

é uma base ortonormal para \tilde{V}_j .

(iv) $\cup_{j \leq 0} \tilde{V}_j$ é denso em $L^2([0, 1])$, assim, o sistema $1, \mathcal{P}\psi_{j,k}, j \leq 0$ e $k = 0, 1, \dots, 2^{-j}-1$ é um sistema ortonormal completo em $L^2([0, 1])$.

Prova. Como $\int_0^1 \mathcal{P}f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, a condição (146) implica que $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R})$ (por exemplo, $\mathcal{P}|f|$ limitado implica que $\int_0^1 \mathcal{P}|f(x)|dx < \infty$).

Observe que para $j < s$, $V_s \subset V_j$, portanto, $\phi_{s,k}, \psi_{s,k} \in V_s \subset V_j$, logo, $\phi_{s,k} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_r \phi_{j,r}$ e $\psi_{s,k} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \beta_r \phi_{j,r}$. De (146), temos

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathbb{Z}} |\alpha_r| &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} |\langle \phi_{s,k}, \phi_{j,r} \rangle| \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} 2^{-\frac{s+j}{2}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-s}x - k) \overline{\phi(2^{-j}x - r)} dx \right| \\ &\leq \sum_{r \in \mathbb{Z}} 2^{-\frac{s+j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(2^{-s}x - k)| |\phi(2^{-j}x - r)| dx \\ &= 2^{-\frac{s+j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-s}x - k) \sum_{r \in \mathbb{Z}} |\phi(2^{-j}x - r)| dx \\ &= 2^{-\frac{s+j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-s}x - k) \mathcal{P}|\phi|(2^{-j}x) dx \\ &= C 2^{-\frac{j+s}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(2^{-s}x - k)| dx \\ &= C 2^{-\frac{j-s}{2}} \|\phi\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

acima usamos que $\mathcal{P}|\phi|(x) \leq C$, para alguma constante. Argumento similar nos conduz a $\sum_{r \in \mathbb{Z}} |\beta_r| < \infty$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\phi_{s,k}(x) &= \sum_l \sum_r \alpha_r \phi_{j,r}(x+l) \\
&= \sum_r \sum_l \phi_{j,r}(x+l) \\
&= \sum_r \mathcal{P}\phi_{j,r}(x) \in \tilde{V}_j.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $\mathcal{P}\phi_{s,k} \in \tilde{V}_j$. De maneira análoga, mostra-se que $\mathcal{P}\psi_{s,k} \in \tilde{V}_j$. Isto prova (i).

Observação 10.2. *Acima usamos que a série $\sum_r \alpha_r \sum_s \phi_{j,r}(x+s)$ é absolutamente somável, o que nos permite a troca da ordem das duas somas. Note que $\sum_r |\alpha_r| \sum_s |\phi_{j,r}(x+s)| = \sum_r |\alpha_r| \mathcal{P}|\phi_{j,r}|(x) \leq 2^{-j/2} \sum_r |\alpha_r| \mathcal{P}|\phi|(2^{-j}x-r)$.*

A seguir, verificaremos a ortogonalidade em (ii) e (iii). Para $j \leq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathcal{P}\psi_{j,k}(x) \overline{\mathcal{P}\psi_{j',k'}(x)} dx &= \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \psi_{j,k}(x+s) \overline{\psi_{j',k'}(x+r)} dx \\
&= \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \psi_{j,k}(x+s) \overline{\psi_{j',k'}(x+r)} dx \\
&= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x+s) \right) \overline{\psi_{j',k'}(x+r)} dx \\
&= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x+s+r) \right) \overline{\psi_{j',k'}(x+r)} dx \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \psi_{j,k}(x+s+r) \overline{\psi_{j',k'}(x+r)} dx \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_r^{r+1} \psi_{j,k}(x'+s) \overline{\psi_{j',k'}(x')} dx' \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x+s) \overline{\psi_{j',k'}(x)} dx \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k-s2^{-j}}(x) \overline{\psi_{j',k'}(x)} dx \\
&= \delta_{j,j'} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \delta_{k',k-s2^{-j}} \\
&= \delta_{j,j'} \left(\delta_{k,k'} + \sum_{s \neq 0} \delta_{k',k-s2^{-j}} \right) \\
&= \delta_{j,j'} \delta_{k,k'},
\end{aligned} \tag{148}$$

onde acima notamos que $k, k' = 0, 1, \dots, 2^{-j} - 1$, implica que $|k - k'| \leq 2^{-j} - 1$; logo, se $s \neq 0$, $|s2^{-j}| \geq 2^{-j}$, portanto, $k' \neq k - s2^{-j}$. Logo, o sistema (147) é ortogonal.

Observação 10.3. *A troca da ordem das somas acima é fácil de justificarmos visto que $\mathcal{P}|\phi|$ e $\mathcal{P}|\psi|$ são limitadas.*

Se repetirmos os cálculos (148) com $j = j'$, para ϕ invés de ψ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{P}\phi_{j,k}(x) \overline{\mathcal{P}\phi_{j,k'}(x)} dx &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k-s2^{-j}}(x) \overline{\phi_{j,k'}(x)} dx \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \delta_{k', k-s2^{-j}} = \delta_{k,k'}. \end{aligned}$$

Com isto provamos (iii), portanto, a dimensão de $\tilde{V}_j = 2^{-j}$.

Falta mostrarmos (iv). Seja P_j a projeção ortogonal de $L^2([0, 1])$ sobre \tilde{V}_j . De (ii),

$$P_j f = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \langle f, \mathcal{P}\phi_{j,k} \rangle \mathcal{P}\phi_{j,k}. \quad (149)$$

Fixemos uma exponencial $e^{2\pi irx}$, então, de (149),

$$P_j (e^{2\pi irx}) = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \langle e^{2\pi ir \cdot}, \mathcal{P}\phi_{j,k} \rangle \mathcal{P}\phi_{j,k}. \quad (150)$$

Como $\{\mathcal{P}\phi_{j,k}\}$ é um sistema ortonormal,

$$\begin{aligned} \|P_j (e^{2\pi irx})\|_{L^2([0,1])}^2 &= \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} |\langle e^{2\pi ir \cdot}, \mathcal{P}\phi_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} |\widehat{\mathcal{P}\phi_{j,k}}(r)|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \left| \sqrt{2\pi} 2^{j/2} e^{-2\pi irk2^j} \hat{\phi}(-2\pi r 2^j) \right|^2 \\ &= 2\pi \left| \hat{\phi}(-2\pi r 2^j) \right|^2. \end{aligned} \quad (151)$$

Como $\{e^{2\pi irx}\}$ é uma base ortonormal para $L^1([0, 1])$, temos

$$P_j (e^{2\pi irx}) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_s e^{2\pi isx}$$

onde,

$$\alpha_s = \langle P_j(e^{2\pi ir \cdot}), e^{2\pi is \cdot} \rangle \quad (152)$$

mas, de (150),

$$\alpha_s = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \langle e^{2\pi ir \cdot}, \mathcal{P}\phi_{j,k} \rangle \langle \mathcal{P}\phi_{j,k}, e^{2\pi is \cdot} \rangle \quad (153)$$

fazendo-se $s = r$ em (153),

$$\alpha_r = \|P_j(e^{2\pi ir x})\|^2. \quad (154)$$

Portanto, de (154) e de (151),

$$\begin{aligned} P_j(e^{2\pi ir x}) &= \alpha_r e^{2\pi ir x} + \sum_{s \neq r} \alpha_s e^{2\pi is x} \\ &= 2\pi \left| \hat{\phi}\left(-\frac{2\pi ir}{2^j}\right) \right|^2 e^{2\pi ir x} + \sum_{s \neq r} \alpha_s e^{2\pi is x} \\ &\equiv 2\pi \left| \hat{\phi}\left(-\frac{2\pi r}{2^j}\right) \right|^2 e^{2\pi ir x} + R_j. \end{aligned}$$

Como P_j é uma projeção ortogonal,

$$1 = \|P_j\| \leq \|P_j(e^{2\pi ir x})\| \leq 2\pi \left| \hat{\phi}(-2\pi r 2^j) \right|^2 + \|R_j\|,$$

portanto,

$$1 \leq 2\pi \left| \hat{\phi}(-2\pi r 2^j) \right|^2 + \|R_j\|. \quad (155)$$

Como $\hat{\phi}$ é contínua em $\xi = 0$ e $|\hat{\phi}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, de (155), $\|R_j\| \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow -\infty$. Logo,

$$P_j(e^{2\pi ir x}) \text{ converge para } e^{2\pi ir x}, \text{ quando } j \rightarrow -\infty.$$

Logo, se f é um polinômio trigonométrico (pelo Teorema de Weierstrass tais polinômios são densos em $L^2([0, 1])$),

$$\begin{aligned} P_j(f) &= P_j\left(\sum_{|r| \leq N} a_r e^{2\pi r x}\right) \\ &= \sum_{|r| \leq N} a_r P_j(e^{2\pi r x}) \\ &\rightarrow \sum_{|r| \leq N} a_r e^{2\pi r x} = f, \text{ quando } j \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Segue-se que $\cup_{j \leq 0} \tilde{V}_j$ é denso em $L^2([0, 1])$. □

Observação 10.4. Note que uma consequência da Proposição 10.1 é o seguinte resultado: Para todo $J \leq 0$

$$[\{\psi_{j,n}^{per}\}_{-\infty < j \leq J, 0 \leq n < 2^{-j}}, \{\phi_{J,n}^{per}\}_{0 \leq n < 2^{-j}}] \quad (156)$$

é uma base ortonormal para $L^2[0, 1]$.

Observação 10.5. Se o suporte de $\psi_{j,k}$ estiver contido em $[0, 1]$, então, $\psi_{j,k}^{per}(t)$ e $\psi_{j,k}(t)$ serão iguais para todo $t \in [0, 1]$. A restrição a $[0, 1]$ da periodização, $\psi_{j,k}^{per}(t)$, modifica somente aquelas wavelets cujos os suportes sobrepõem $t = 0$ ou $t = 1$. Tais wavelets são transformadas em wavelets de fronteiras que possuem duas componentes disjuntas próximas de $t = 0$ e $t = 1$. Tomadas separadamente, as componentes próximas de $t = 0$ e $t = 1$ destas wavelets de fronteiras não têm nenhum momento zero, logo, têm a desvantagem de criar coeficientes com grandes amplitudes nas vizinhanças destes dois pontos.

Se $f(0) \neq f(1)$, os coeficientes de wavelets se comportam como se o sinal fosse descontínuo nas fronteiras. Isto também pode ser verificado extendendo-se $f \in L^2[0, 1]$ a um sinal periódico de período 1, f^{per} , e notando-se que

$$\int_0^1 f(t) \psi_{j,n}^{per}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^{per}(t) \psi_{j,n}(t) dt. \quad (157)$$

Se $f(0) \neq f(1)$, então, $f^{per}(t)$ é descontínua em $t = 0$ e $t = 1$, o que cria coeficientes de wavelets com grandes amplitudes quando $\psi_{j,n}$ sobrepõe as fronteiras do intervalo.

Para evitar tais problemas, ao invés de wavelets periódicas, podemos construir bases ortonormais de wavelets para $L^2[0, 1]$ onde as wavelets tenham tantos momentos nulos quanto desejamos.

Transformada Discreta Periódica Dado $f \in L^2[0, 1]$, para todo $j \leq 0$, $0 \leq n < 2^{-j}$, defina

$$a_{j,n} = \langle f, \phi_{j,n}^{per} \rangle \quad e \quad d_{j,n} = \langle f, \psi_{j,n}^{per} \rangle.$$

Verificamos através de (157) que estes produtos internos são iguais aos coeficientes de um sinal periódico, decomposto numa base de wavelets não-periódicas:

$$a_{j,n} = \langle f^{per}, \phi_{j,n} \rangle \quad e \quad d_{j,n} = \langle f^{per}, \psi_{j,n} \rangle.$$

Portanto, valem as seguintes relações (67), (69) e (71), onde $a_{j,n}$ e $d_{j,n}$ são considerados como sinais discretos de períodos 2^{-j} e as convoluções são convoluções circulares (veja definição na Seção 3.3.1 de [9]).

Apesar do comportamento pobre das wavelets periódicas próximo às fronteiras, elas são freqüentemente usadas pelo fato de suas implementações numéricas serem particularmente simples.

11 Wavelets com Suportes Compactos

Nesta seção discutiremos wavelets com suportes compactos.

Se uma função tem uma singularidade isolada em t_o e se t_o está no do suporte de $\psi_{j,n}(t)$, então, $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$ pode ter amplitude grande (wavelets que sobrepõem-se as singularidades criam coeficientes com grandes amplitudes).

Se ψ tem suporte compacto de tamanho K , para cada escala 2^j existem K wavelets $\psi_{j,k}$ cujos suportes incluem t_o ; assim, para minimizar o número de coeficientes com grandes amplitudes devemos reduzir o tamanho do suporte de ψ . Veremos que existe uma relação entre o tamanho de h e o suporte de ϕ e ψ . Mais precisamente, a função escala ϕ tem suporte compacto se, e somente se, h , onde $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$, tem suporte compacto e seus suportes são iguais. Se o suporte de ϕ é $[N_1, N_2]$, então, o suporte de ψ é $[(N_1 - N_2 + 1)/2, (N_2 - N_1 + 1)/2]$.

O tamanho do suporte de uma função e o número de momentos nulos, p , são a priori independentes. Entretanto, as restrições impostas nas wavelets ortogonais implicam que se ψ tem p momentos nulos, então, o tamanho de seu suporte é pelo menos $2p - 1$. As wavelets de Daubechies são ótimas no sentido que elas têm suporte de tamanho mínimo para um dado número de momentos nulos.

Quando escolhermos uma wavelet particular, temos que fazer um acordo entre o número de momentos nulos e o tamanho do suporte. Se f tem poucas singularidades isoladas e é bastante regular entre estas, devemos escolher uma wavelet com muitos momentos nulos a fim de produzir um número grande de coeficientes de wavelets, $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$, pequenos. Se a densidade de singularidades aumenta, pode ser melhor diminuir o tamanho do suporte de ψ ao custo de reduzir-se o número de momentos nulos.

A seguir mostraremos que se ϕ tem suporte compacto, então, h também tem suporte compacto. Isto é uma consequência imediata da definição de h , ou seja, como $h_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \phi(t/2), \phi(t - n) \rangle$, então, se $\text{supp } \phi = [N_1, N_2]$, então, $h_n = 0$ se $n > 2N_2 - N_1$ ou se $n < 2N_1 - N_2$, portanto, h tem suporte compacto e seu suporte está contido em $[2N_1 - N_2, 2N_2 - N_1]$.

Agora suponha que ϕ e h tenham suportes compactos, mostraremos que $\text{supp } \phi = \text{supp } h$. Para relacionar os suportes de ϕ e h , suponha que eles sejam $[K_1, K_2]$ e $[N_1, N_2]$, respectivamente, então o suporte de $\phi(t/2)$ é $[2K_1, 2K_2]$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(t/2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \phi(t - n) \\ &= \sum_{n=N_1}^{N_2} h_n \phi(t - n) \end{aligned} \quad (158)$$

como $\text{supp } \phi = [K_1, K_2]$, o suporte do lado direito de (158) é $[N_1 + K_1, N_2 + K_2]$ o qual também deve ser $[2K_1, 2K_2]$, segue-se que $N_1 = K_1$ e $N_2 = K_2$.

A seguir mostraremos a relação entre os suportes de h e ψ . Suponha que os suportes

de ϕ e de h seja $[N_1, N_2]$, então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(t/2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \phi(t-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{1-n} h_{1-n} \phi(t-n) \\ &= \sum_{n=1-N_2}^{1-N_1} (-1)^{1-n} h_{1-n} \phi(t-n) \end{aligned} \quad (159)$$

como $\text{supp } \phi = [N_1, N_2]$, o suporte do lado direito de (158) é $[N_1 - N_2 + 1, N_2 + N_1 + 1]$ que é o suporte de $\psi(t/2)$, logo, $\text{supp } \psi = [(N_1 - N_2 + 1)/2, (N_2 - N_1 + 1)/2]$.

No final desta seção iremos mostrar que se h tem suporte compacto, então, ϕ também tem suporte compacto. A construção de wavelets com suportes compactos que daremos abaixo segue [1]. A construção começa com m_o , invés dos V_j 's ou ϕ .

Vimos que wavelet terá suporte compacto se, e somente se, h_n tiver suporte compacto. Neste caso, $m_o(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi}$ torna-se um polinômio trigonométrico. Vimos que a hipótese de $\phi_{0,n}$ formar um conjunto ortonormal é equivalente a (veja equação (39))

$$|m_o(\xi)|^2 + |m_o(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (160)$$

em quase todos os pontos, sendo m_o um polinômio trigonométrico, então $m_o(\xi)$ é contínua em \mathbb{R} e a relação acima acontece em todos os pontos. Como $\hat{\phi}(\xi) = m_o(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2)$ e $\hat{\phi}(0) \neq 0$, segue-se que $m_o(0) = 1$ e de (160), $m_o(\pi) = 1$. Isto nos leva ao fato que $\xi = \pi$ é um zero de m_o com multiplicidade pelo menos um.

A regularidade de ψ (ou equivalentemente, o seu número de momentos nulos), cresce com a multiplicidade da raiz $\xi = \pi$ de $m_o(\xi)$, por isso imporemos que m_o seja da forma

$$m_o(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi), \quad (161)$$

com $N \geq 1$ e \mathcal{L} é um polinômio trigonométrico.

Se substituirmos (161) em (160) e definirmos

$$M_o(\xi) = |m_o(\xi)|^2 = \left(\cos^2 \frac{\xi}{2} \right)^N L(\xi), \quad (162)$$

onde $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$ é um polinômio em $\cos \xi$, teremos a seguinte relação

$$M_o(\xi) + M_o(\xi + \pi) = 1. \quad (163)$$

Como $\cos \xi = 1 - 2\text{sen}^2 \xi/2$ e $\cos^2 \xi/2 = 1 - \text{sen}^2 \xi/2$, temos

$$M_o(\xi) = (1 - \text{sen}^2 \xi/2)^N P(\text{sen}^2 \xi/2). \quad (164)$$

De maneira análoga, como $\operatorname{sen}^2(\xi + \pi)/2 = \operatorname{cos}^2\xi/2$ e $\operatorname{cos}^2(\xi + \pi)/2 = \operatorname{sen}^2\xi/2$, temos

$$M_o(\xi + \pi) = (\operatorname{sen}^2\xi/2)^N P(1 - \operatorname{sen}^2\xi/2). \quad (165)$$

De (163), (164) e (165), fazendo-se $y = \operatorname{sen}^2\xi/2$, temos

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1, \quad (166)$$

que vale para todo $y \in [0, 1]$ e, conseqüentemente, para todo $y \in \mathbb{R}$. Devemos, portanto, resolver (166) para P , para tal precisaremos do Teorema de Bezout (veja Teorema 6.1.1 de [1]).

Teorema 11.1. (Bezout) *Se p_1, p_2 são dois polinômios de graus n_1 e n_2 , respectivamente, sem zeros comuns, então existem polinômios q_1, q_2 de graus $n_2 - 1$ e $n_1 - 1$, respectivamente, tais que*

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1.$$

Os polinômios q_1 e q_2 são únicos.

Fazendo-se $p_1(x) = (1 - x)^N$ e $p_2(x) = x^N$, então, encontramos polinômios q_1 e q_2 de grau $N - 1$, tais que

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1. \quad (167)$$

Se substituirmos $1 - y$ por y em (167), teremos

$$(1 - y)^N q_2(1 - y) + y^N q_1(1 - y) = 1;$$

e concluímos que $q_2(1 - y)$ e $q_1(1 - y)$ também são soluções de (167), mas da unicidade do Teorema de Bezout, concluímos que $q_2(y) = q_1(1 - y)$. Portanto, $P(y) = q_1(y)$ é uma solução de (166) e q_1 satisfaz

$$q_1(x) = (1 - y)^{-N} [1 - y^N q_1(1 - y)]. \quad (168)$$

A seguir encontraremos uma expressão explícita para q_1 . Como

$$(1 - y)^{-N} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N + k - 1}{k} y^k,$$

de (168), temos que

$$q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k} y^k + O(y^N).$$

Como q_1 é um polinômio de grau $N - 1$, segue-se que

$$q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k} y^k \equiv P_N(y),$$

que é a única solução de menor grau de (166).

Existem muitas outras soluções de (166) e se $P(y)$ também é solução de (166), temos

$$(1-y)^N[P(y) - P_N(y)] + y^N[P(1-y) - P_N(1-y)] = 0,$$

o que implica que $P - P_N$ é divisível por y^N , logo, $P(y) - P_N(y) = y^N \tilde{P}(y)$. Além disso, $\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1-y) = 0$, ou seja, \tilde{P} é anti-simétrico em relação a $y = \frac{1}{2}$. Se definirmos $R(y) = \tilde{P}(\frac{1}{2} - y)$, então, R é um polinômio ímpar. Portanto, podemos escrever, $P = P_N + y^N R(\frac{1}{2} - y)$.

É fácil de ver que desde que R seja um polinômio ímpar e P_N definido acima, então, $P = P_N + y^N R(\frac{1}{2} - y)$ será solução de (166); assim, tomaremos como R um polinômio ímpar tal que $P = P_N + y^N R(\frac{1}{2} - y) \geq 0$, para todo $y \in [0, 1]$, o que nos permite encontrar $L(\xi)$: entretanto, o que queremos é $\mathcal{L}(\xi)$!

A seguir, resumiremos o que encontramos acima.

Proposição 11.1. *Um polinômio trigonométrico da forma*

$$m_o(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right) \mathcal{L}(\xi) \quad (169)$$

satisfaz (160) se, e somente se, $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$ pode ser escrito como

$$L(\xi) = P(\text{sen}^2 \xi/2),$$

com

$$P(y) = P_N(y) + y^N R\left(\frac{1}{2} - y\right), \quad (170)$$

onde

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \quad (171)$$

e R é um polinômio ímpar, escolhido de modo que $P(y) \geq 0$ para $y \in [0, 1]$.

A seguir veremos como “extrair” a raiz quadrada de L .

Lema 11.1. (Riesz) *Seja A um polinômio trigonométrico positivo invariante a substituição $\xi \rightarrow -\xi$; A é necessariamente da forma*

$$A(\xi) = \sum_{m=0}^M a_m \cos m\xi, \quad \text{com } a_m \in \mathbb{R}.$$

Então existe um polinômio trigonométrico de ordem M , isto é,

$$B(\xi) = \sum_{m=0}^M b_m e^{im\xi}, \quad \text{com } b_m \in \mathbb{R},$$

tal que $|B(\xi)|^2 = A(\xi)$.

Prova. Podemos escrever $A(\xi) = p_A(\cos\xi)$, onde p_A é um polinômio de grau M com coeficientes reais. Este polinômio pode ser fatorado como

$$p_A(c) = \alpha \prod_{j=1}^M (c - c_j),$$

onde os zeros c_j de p_A aparecem em pares conjugados c_j, \bar{c}_j se c_j for complexo. Também podemos escrever

$$A(\xi) = e^{iM\xi} P_A(e^{-i\xi}),$$

onde P_A é um polinômio de grau $2M$. Para $|z| = 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} P_A(z) &= z^M \alpha \prod_{j=1}^M \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - c_j \right) \\ &= \alpha \prod_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} - c_j z + \frac{1}{2} z^2 \right); \end{aligned} \quad (172)$$

portanto, os dois polinômios dos lados direito e esquerdo de (172) concordam para todos os valores complexos.

Se c_j é real, então os zeros de $\frac{1}{2} - c_j z + \frac{1}{2} z^2$ são $c_j \pm \sqrt{c_j^2 - 1}$. Para $|c_j| \geq 1$, estes zeros são reais (degenerados se $c_j = \pm 1$) da forma r_j, r_j^{-1} . Para $|c_j| < 1$, estes zeros são complexos conjugados um do outro e têm valor absoluto 1, ou seja, são da forma $e^{i\alpha_j}$ e $e^{-i\alpha_j}$. Como $|c_j| < 1$, tais zeros correspondem aos zeros “físicos” de A (ou seja, os valores de ξ para os quais $A(\xi) = 0$). A fim de não causar nenhuma contradição com $A \geq 0$, tais zeros devem ter multiplicidade par.

Se c_j não for real, então o consideramos juntos com $c_k = \bar{c}_j$. O polinômio $(\frac{1}{2} - c_j z - \frac{1}{2} z^2)(\frac{1}{2} - \bar{c}_j z - \frac{1}{2} z^2)$ tem quatro zeros, $c_j \pm \sqrt{c_j^2 - 1}$ e $\bar{c}_j \pm \sqrt{\bar{c}_j^2 - 1}$. Note que os quatro zeros são distintos e formam um quadrupeto z_j, z_j^{-1}, \bar{z}_j e \bar{z}_j^{-1} .

Portanto, temos

$$\begin{aligned} P_A(z) &= \frac{1}{2} a_M \left(\prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \right) \\ &\quad \left(\prod_{k=1}^K (z - e^{i\alpha_k})^2 (z - e^{-i\alpha_k})^2 \right) \left(\prod_{l=1}^L (z - r_l)(z - r_l^{-1}) \right), \end{aligned}$$

onde reagrupamos os três tipos diferentes de zeros.

Para $z = e^{-i\xi}$ no círculo unitário, temos

$$|(e^{-i\xi} - z_o)(e^{-i\xi} - \bar{z}_o^{-1})| = |z_o|^{-1} |e^{-i\xi} - z_o|^2.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
A(\xi) &= |A(\xi)| = |P_A(e^{-i\xi})| \\
&= \left(\frac{1}{2} |a_M| \prod_{j=1}^J |z_j|^{-2} \prod_{l=1}^L |r_l|^{-1} \right) \left| \prod_{j=1}^J (e^{-i\xi} - z_j)(e^{-i\xi} - \bar{z}_j) \right|^2 \\
&\quad \left| \prod_{k=1}^K (e^{-i\xi} - e^{i\alpha_k})(e^{-i\xi} - e^{-i\alpha_k}) \right|^2 \left| \prod_{l=1}^L (e^{-i\xi} - r_l) \right|^2 \\
&= |B(\xi)|^2,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
B(\xi) &= \left(\frac{1}{2} |a_M| \prod_{j=1}^J |z_j|^{-2} \prod_{l=1}^L |r_l|^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^J (e^{-2i\xi} - 2e^{-i\xi} \operatorname{Re} z_j + |z_j|^2) \\
&\quad \prod_{k=1}^K (e^{-2i\xi} - 2e^{-i\xi} \cos \alpha_k + 1) \prod_{l=1}^L (e^{-i\xi} - r_l)
\end{aligned}$$

que é claramente um polinômio trigonométrico de ordem M com coeficientes reais. \square

11.1 A Wavelet Daub4

Note que se fizermos $R = 0$ e $N = 2$ na Proposição 11.1, temos $P(y) = P_2(y) = 1 + 2y$, conseqüentemente, $L(\xi) = P_2(\operatorname{sen}^2 \xi/2) = 2 - \cos \xi = 2 - \frac{1}{2}(e^{i\xi} + e^{-i\xi})$. Por outro lado, do Lemma 11.1, $\mathcal{L}(\xi) = a + be^{-i\xi}$ onde a e b são reais e $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$. Logo, a e b satisfazem

$$a^2 + b^2 = 1, \quad ab = -\frac{1}{2}.$$

Escolheremos a solução $(a, b) = ((1 + \sqrt{3})/2, (1 - \sqrt{3})/2)$ o que nos conduz a

$$\begin{aligned}
m_o(\xi) &= \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^2 \mathcal{L}(\xi) \\
&= \frac{1}{8} \left(1 + \sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})e^{-i\xi} + (3 - \sqrt{3})e^{-2i\xi} + (1 - \sqrt{3})e^{-3i\xi} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{-i\xi} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{-2i\xi} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{-3i\xi} \right),
\end{aligned}$$

o que nos dá os seguintes valores de h :

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \simeq 0.4829629131445341 \\ h_1 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \simeq 0.8365163037378079 \\ h_2 &= \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \simeq 0.2241438680420134 \\ h_3 &= \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \simeq -0.1294095225512604. \end{aligned}$$

A wavelet associada a $N = 2$ é conhecida na literatura como Daub4.

Na Tabela 6.1, página 195 de [1], encontram-se os valores aproximados de $\{h_k\}$, para $N = 2, \dots, 10$, correspondentes à escolha de $P = P_N$, na Proposição 11.1, dos quais iremos exibir apenas os valores para $M = 3$ e 4.

	n	h_n
$N = 3$	0	0.3326705529500825
	1	0.8068915093110924
	2	0.4598775021184914
	3	-0.1350110200102546
	4	-0.0854412738820267
	5	0.0352262918857095
$N = 4$	0	0.2303778133088964
	1	0.7148465705529154
	2	0.6308807679298587
	3	-0.0279837694168599
	4	-0.1870348117190931
	5	0.0308413818355607
	6	0.0328830116668852
	7	-0.0105974017850690

11.2 Relação entre os suportes de h e ϕ

No Teorema 11.2, mostraremos que se h tem suporte compacto, então, ϕ também tem suporte compacto. No que se segue, $h_k = \sqrt{2}a_k$.

Teorema 11.2. *Suponha que $m(\xi) = \sum_{k=T}^S a_k e^{-ik\xi}$ seja um polinômio trigonométrico tal que*

$$|m(\xi)|^2 + |m(\xi + \pi)|^2 = 1, \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (173)$$

$$m(0) = 1, \quad (174)$$

$$m(\xi) \neq 0, \forall \xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \quad (175)$$

Então, o produto infinito

$$\Theta(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi) \quad (176)$$

converge uniformemente em compactos. A função $\Theta(\xi)$ é portanto, contínua. Além disso, está em $L^2(\mathbb{R})$. A função ϕ dada por $\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Theta$ tem suporte contido em $[T, S]$ e é a função escala de uma ARM. A fórmula

$$\psi(x) = 2 \sum_{k=T}^S \bar{a}_k (-1)^k \phi(2x + k + 1) \quad (177)$$

dá uma wavelet cujo suporte está contido em $[\frac{T-S-1}{2}, \frac{S-T-1}{2}]$.

Observação 11.1. Da observação 11.2 abaixo, $S - T$ é ímpar, isto significa que $\text{supp } \psi$ tem extremidades em inteiros e mesmo comprimento que $\text{supp } \phi$. A condição dada por (173) assegura que $\{\phi(x - n)\}_n$ forme um conjunto ortonormal, por outro lado, (174) e (176) nos garante que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$, pois, temos $\sqrt{2\pi}\hat{\phi}(0) = \Theta(0) = 1$.

Lema 11.2. Se $m(\xi)$ é um polinômio trigonométrico e (173) e (174) acontecem, então, o produto (176) converge uniformemente em compactos e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi) \right|^2 d\xi \leq 2\pi. \quad (178)$$

Em particular, $\Theta(\xi)$ é contínua e $\Theta(0) = 1$. Se assumirmos também que (175) aconteça, então, para cada $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi) \right|^2 e^{-2\pi i k \xi} d\xi &= 2\pi, \quad \text{se } k = 0 \\ &= 0, \quad \text{caso contrário.} \end{aligned} \quad (179)$$

Prova. Como $m(\xi)$ é um polinômio trigonométrico, existe C tal que $|m(\xi) - 1| \leq C|\xi|$, em particular, para cada $\xi \in \mathbb{R}$, temos, $|m(2^{-j}\xi) - 1| \leq C2^{-j}|\xi|$. Isto mostra que o produto (176) converge uniformemente em compactos de \mathbb{R} e, portanto, Θ é contínua.

Sejam

$$\Pi_N(\xi) = \prod_{j=1}^N m(2^{-j}\xi)$$

$$\begin{aligned}
g_N(\xi) &= \Pi_N(\xi) 1_{[-2^N\pi, 2^N\pi]}(\xi) = \Pi_N(\xi) 1_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(2^{-N-1}\xi) \\
I_N^k &= \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\Pi_N(\xi)|^2 e^{-2\pi ik\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |g_N(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Note que $\Pi_N(\xi)$ é uma função $2^N 2\pi$ periódica, para cada $N = 1, 2, \dots$. Logo,

$$\begin{aligned}
I_N^k &= \int_0^{2^{N+1}\pi} |\Pi_N(\xi)|^2 e^{-2\pi ik\xi} d\xi \\
&= \int_0^{2^N\pi} |\Pi_N(\xi)|^2 e^{-2\pi ik\xi} d\xi + \int_{2^N\pi}^{2^{N+1}\pi} |\Pi_N(\xi)|^2 e^{-2\pi ik\xi} d\xi \\
&= \int_0^{2^N\pi} |\Pi_{N-1}(\xi)|^2 e^{-2\pi ik\xi} d\xi + \int_0^{2^N\pi} |\Pi_{N-1}(\xi)|^2 e^{-2\pi ik\xi} |m(2^{-N}\xi + \pi)|^2 d\xi \\
&= \int_0^{2^N\pi} |\Pi_{N-1}(\xi)|^2 e^{-2\pi ik\xi} (|m(2^{-N}\xi)|^2 + |m(2^{-N}\xi + \pi)|^2) d\xi \\
&= I_{N-1}^k.
\end{aligned}$$

Continuando dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
I_N^k &= I_1^k = \int_{-2\pi}^{2\pi} |m(\xi/2)|^2 e^{-2\pi i\xi} d\xi \\
&= 2 \int_{-\pi}^0 (|m(\xi)|^2 + |m(\xi + \pi)|^2) e^{-4\pi i\xi} d\xi \\
&= 2\pi, \quad \text{se } k=0 \\
&= 0, \quad \text{caso contrário.}
\end{aligned} \tag{180}$$

Como (173) implica que $|m(\xi)| \leq 1$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$, temos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} \left| \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi) \right|^2 d\xi \leq I_N^0 \leq 2\pi,$$

o que prova (178). Para obtermos (179), note que como $m(\xi)$ é contínua, (175) implica que existe $c > 0$ tal que $|m(\xi)| > c$ para $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Como $\prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi)$ converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$, existe um inteiro M , tal que $|\prod_{j=M}^{\infty} m(2^{-j}\xi)| > 1/2$, para $\xi \in [-\pi, \pi]$. Isto significa que para $\xi \in [-\pi, \pi]$,

$$|\Theta(\xi)| = \prod_{j=1}^{M-1} |m(2^{-j}\xi)| \prod_{j=M}^{\infty} |m(2^{-j}\xi)| \geq c^{M-1} 1/2 = c' > 0.$$

Escrevendo $\Theta(\xi) = \Pi_N(\xi)\Theta(2^{-N}\xi)$, vemos que para $\xi \in [-2^N\pi, 2^N\pi]$, temos $|\Pi_N(\xi)| \leq \frac{1}{c'}|\Theta(\xi)|$, o que implica que

$$g_N(\xi) \leq \frac{1}{c'}|\Theta(\xi)|, \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{181}$$

É claro que $G_N(\xi) \rightarrow \Theta(\xi)$ pontualmente, logo, segue-se do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (válido neste caso por causa de (178) e (181)), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Theta(\xi)|^2 e^{-2\pi i k \xi} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} |g_N(\xi)|^2 e^{-2\pi i k \xi} d\xi \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_N(\xi)|^2 e^{-2\pi i k \xi} d\xi \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} I_N^k. \end{aligned}$$

Comparando isto com (180), obtemos (179). \square

Lema 11.3. *Seja $m(\xi) = \sum_{k=T}^S a_k e^{-ik\xi}$ um polinômio trigonométrico que satisfaça (173) e (174) e seja $\Theta(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi)$. Então,*

$$\text{supp } \Theta^\vee \subset [T, S],$$

onde Θ^\vee é a transformada inversa de Fourier de Θ . Além disso, se todos os coeficientes a_k forem reais, então, Θ^\vee também será real.

Prova. Para uma medida μ de variação limitada em \mathbb{R} , definimos

$$\mathcal{F}_1(\mu)(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{\mu}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} d\mu(x).$$

Com esta normalização,

$$\mathcal{F}_1(\mu * \nu) = \mathcal{F}_1(\mu) \mathcal{F}_1(\nu). \quad (182)$$

Defina as medidas $\mu_j = \sum_{k=T}^S a_k \delta(k2^{-j})$, onde $\delta(a)$ é a medida de Dirac concentrada no ponto a . Então, $\mathcal{F}_1(\mu_j) = m(2^{-j}\xi)$. Logo, (182) nos dá para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_1(\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_N) = \prod_{j=1}^N m(2^{-j}\xi)$. Por outro lado, usando-se a linearidade da convolução, temos

$$\begin{aligned} \mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_N &= \sum_{k_1, \dots, k_N: T \leq k_i \leq S} A_{k_1, k_2, \dots, k_N} \delta(2^{-1}k_1) * \dots * \delta(2^{-N}k_N) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_N: T \leq k_i \leq S} A_{k_1, k_2, \dots, k_N} \delta(2^{-1}k_1 + 2^{-2}k_2 + \dots + 2^{-N}k_N). \end{aligned} \quad (183)$$

Em particular, $\text{supp } \mu * \dots * \mu_N \subset [T, S] - 2^{-N-1}$. Agora, tomemos $f \in C^\infty$ com suporte compacto tal que $\text{supp } f \cap [T, S] = \emptyset$. Como $\hat{f} \in \mathcal{S}$, segue-se do Teorema de Plancherel,

do Lemma 11.2 e das observações acima, que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\Theta(t)\overline{f(t)}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^N m(2^{-j}\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_1(\mu_1 * \dots * \mu_N)(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}d(\mu_1 * \dots * \mu_N) = 0.
\end{aligned} \tag{184}$$

Como f foi tomada arbitrariamente, concluímos que $\text{supp } \mathcal{F}^{-1}(\Theta) \subset [T, S]$.

Se assumirmos que todos os a_k 's são reais, então, dos cálculos que nos conduziram a (183), vemos que a medida $\mu_1 * \dots * \mu_N$ é real. Se tomarmos uma função real $f \in C^\infty$ e com suporte compacto, os cálculos (184) mostram que $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\Theta)(t)\overline{f(t)}dt$ é real, o que implica que $\mathcal{F}^{-1}(\Theta)$ é real. \square

Prova do Teorema 11.2. Usaremos o Teorema 8.1. Sabemos do Lema 11.2 que $\hat{\phi}$ é contínua e que $\hat{\phi}(0) \neq 0$. É claro que da definição de ϕ que $\hat{\phi}(\xi) = m(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2)$, assim, as condições (ii) e (iii) do Teorema 8.1 acontecem. Lema 11.3 mostra que $\text{supp } \phi \subset [T, S]$. Isto significa que a única coisa que nos resta provar é que $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal. Mas escrevendo o lado esquerdo de (179) como $\int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\phi(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi$, inferimos das propriedades dos coeficientes de Fourier que $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\phi(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$. Do Corolário 8.1 inferimos que $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é um sistema ortonormal. Fórmula (177) é a equação (55) adaptada à presente situação. O cálculo do $\text{supp } \psi$ segue diretamente de (177) e do cálculo do $\text{supp } \phi$. \square

11.3 Propriedades gerais de wavelets de suportes compactos

No que se segue, faremos algumas observações gerais sobre wavelets de suportes compactos.

Lema 11.4. *Se ϕ_1 e ϕ_2 são funções com suportes compactos tais que $\{\phi_1(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ e $\{\phi_2(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ são bases ortonormais para algum subespaço de $L^2(\mathbb{R})$, então, $\phi_1(x) = \phi_2(x - k)$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.*

Prova. Com $\{\phi_2(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é ortonormal, ϕ_1 e ϕ_2 têm suportes compactos, podemos escrever

$$\phi_1(x) = \sum_{j \in A} a_j \phi_2(x - j)$$

para algum $A \subset \mathbb{Z}$ finito. Logo,

$$\hat{\phi}_1(\xi) = m(\xi)\hat{\phi}_2(\xi)$$

para algum polinômio trigonométrico $m(\xi)$. Da ortonormalidade e Corolário 8.1, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}_1(\xi + 2\pi l)|^2 \\ &= |m(\xi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}_1(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi} |m(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Logo, $|m(\xi)|^2 = 1$. Portanto, $m(\xi) = e^{ik\xi}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Isto implica que $\phi_1(x) = \phi_2(x - k)$. \square

Seja $\text{supp } f$ o menor intervalo fechado contendo o suporte de f .

Teorema 11.3. *Seja $\phi(x)$ uma função escala de uma ARM. Se ϕ tem suporte compacto, então, $\text{supp } \phi = [B, B + C]$ para algum $B, C \in \mathbb{Z}$ e C ímpar.*

Prova. Seja $\text{supp } \phi = [a, b]$, então, da equação $\phi(x/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(x - n)$, como $\{\phi(t - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é ortonormal e ϕ tem suporte compacto, esta é uma soma finita, logo,

$$\phi(x/2) = \sum_{n=B}^E a_n \phi(x - n) \quad (185)$$

com $B, E \in \mathbb{Z}$, $a_B \neq 0$ e $a_E \neq 0$. Como $\text{supp } \phi(x - n) = [a + n, b + n]$, inferimos de (185) que $\text{supp } \phi(x/2) \subset [a + B, b + E]$ e também que

$$\begin{aligned} \phi(x/2)|_{[a+B, a+B+1]} &= a_B \phi(x - B)|_{[a+B, a+B+1]} \\ \phi(x/2)|_{[b+E-1, b+E]} &= a_E \phi(x - E)|_{[b+E-1, b+E]}. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\text{supp } \phi(x/2) = [a + B, b + E]. \quad (186)$$

Por outro lado, é imediato que $\text{supp } \phi(x/2) = [2a, 2b]$. Comparando com (186), vemos que $a = B$ e $b = E$. Em particular, $\text{supp } f = [B, E]$, com $B, E \in \mathbb{Z}$. Tomando-se uma translação apropriada, podemos assumir que $B = 0$. Ainda temos que mostrar que E (em geral, E_B) é ímpar. Depois desta translação, (185) torna-se

$$\phi(x/2) = \sum_{n=0}^E a_n \phi(x - n) \quad (187)$$

com $a_0 \neq 0$ e $a_E \neq 0$. Então, para cada inteiro l ,

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{x-2l}{2}\right) &= \sum_{n=0}^E a_n \phi(x-2l-n) \\ &= \sum_{n=2l}^{E+2l} a_{n-2l} \phi(x-n). \end{aligned} \quad (188)$$

Uma mudança de variáveis nos conduz que para $l \neq 0$ a função $\phi(x/2)$ é ortogonal a $\phi\left(\frac{x-2l}{2}\right)$. Como $\{\phi(t-m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é ortonormal, isto junto com (187) e (188) nos dá

$$\sum_n a_n \overline{a_{n-2l}} = 0. \quad (189)$$

Agora suponha que E seja par e tome $2l = E$ em (189). Com esta escolha de l , a equação (189) se torna $a_E \overline{a_0} = 0$, o que é impossível. \square

Observação 11.2. Note que o argumento acima mostra também que um polinômio satisfazendo (173)-(175) deve ser da forma $m(\xi) = \sum_{k=B}^{B+C} a_k e^{-ik\xi}$ com C ímpar. Esta é uma reformulação de (187) da mesma forma que (36) e (37) são reformulações de (32). Claramente, para a função escala ϕ associada a m , $\text{supp } \phi = [B, B+C]$.

11.4 Regularidade das wavelets de suportes compactos

Teorema 11.4. Existe uma constante c tal que para cada $r = 1, 2, \dots$, existe uma ARM em $L^2(\mathbb{R})$ com função escala ϕ e wavelet associada ψ tais que

- (i) $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são funções em C^r
- (ii) $\phi(x)$ e $\psi(x)$ têm suportes compactos e ambos $\text{supp } \phi$ e $\text{supp } \psi$ estão contidos em $[-cr, cr]$.

Observação 11.3. Mostra-se que não pode existir uma wavelet C^∞ com suporte compacto.

O resto desta seção será dedicado a prova do teorema acima.

Estratégia da Prova. Daremos uma definição explícita de um polinômio $f_k(\xi) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\xi} \geq 0$ tal que f_k satisfaça (??), (174) e (175). Do Lema 11.1, obteremos um polinômio $m(\xi) = \sum_{n=0}^N b_n e^{in\xi}$ satisfazendo (173)-(175). Nos asseguraremos que $N \leq ck$, assim, o Teorema 11.2 garantirá a condição (ii) do Teorema 11.4 para a função escala. A condição (i) para a função escala seguirá da estimativa $\left| \prod_{j=1}^{\infty} m(2^j \xi) \right| \leq c(1 + |\xi|)^{-k-1}$. Isto também mostrará (conforme Teorema 11.2) que a wavelet satisfaz (i) e (ii). **Fim da Estratégia.**

Para $k = 1, 2, \dots$ defina os polinômios trigonométricos

$$g_k(\xi) = 1 - c_k \int_0^\xi (\operatorname{sen} t)^{2k+1} dt \quad (190)$$

onde $c_k = \left(\int_0^\pi (\operatorname{sen} t)^{2k+1} dt \right)^{-1}$.

É claro que $g(\xi)$ é um polinômio trigonométrico de grau $2k + 1$. Note também que

$$g_k(\xi) = c_k \int_\xi^\pi (\operatorname{sen} t)^{2k+1} dt = c_k \int_\xi^\pi (1 - \cos^2 t)^k \operatorname{sen} t dt. \quad (191)$$

Fazendo-se $u = \cos t$, obtemos

$$g_k(\xi) = p_k(\cos \xi) \quad (192)$$

onde $p_k(x)$ é um polinômio algébrico de grau $2k + 1$ definido por

$$p_k(x) = c_k \int_{-1}^x (1 - u^2)^k du. \quad (193)$$

Observação 11.4. *No que se segue não seremos cuidadosos com constantes, mas mostraremos que existe um inteiro L tal que possamos tomar f_k descrito na “estratégia da prova” como g_{Lk} .*

Lema 11.5. (Propriedades de g_k) *Os polinômios g_k definidos em (190) satisfazem às seguintes propriedades:*

$$0 \leq g_k(\xi) \leq 1 \quad e \quad g_k(\xi) = g_k(-\xi) \quad (194)$$

$$g_k(\xi) \neq 0, \forall \xi \in (-\pi, \pi) \quad (195)$$

$$g_k(0) = 1 \quad (196)$$

$$1 = g_k(\xi) + g_k(\xi + \pi), \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (197)$$

$$c_k \leq 3\sqrt{k}. \quad (198)$$

Também podemos fatorar

$$g_k(\xi) = \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^{k+1} \varphi_k(\xi) \quad (199)$$

onde $\varphi_k(\xi)$ é um polinômio em $\cos \xi$ de grau k .

Observação 11.5. *Note que*

$$\begin{aligned} g_0(\xi) &= \frac{1 + \cos \xi}{2} \\ g_1(\xi) &= \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^2 (2 - \cos \xi) = \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^2 P_2(\sin^2 \xi/2) \\ g_2(\xi) &= \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^3 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \xi - \frac{9}{2} \cos \xi + 4 \right) \\ &= \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^3 P_3(\operatorname{sen}^2 \xi/2). \end{aligned}$$

Em (199) se substituirmos $\varphi_k(\xi)$ por $P(\text{sen}^2\xi/2)$, teremos,

$$g_k(\xi) = (1 - \text{sen}^2\xi/2)^{k+1} P(\text{sen}^2\xi/2),$$

como $g_k(\xi) + g_k(\xi + \pi) = 1$ e P é um polinômio de grau k , necessariamente, pelo Teorema de Bezout, $P = P_{k+1}$; ou seja,

$$g_k(\xi) = \left(\frac{1 + \cos\xi}{2}\right)^{k+1} P_{k+1}(\text{sen}^2\xi/2) = |m_o(\xi)|^2.$$

Logo, as wavelets obtidas a partir de g_k são as wavelets de Daubechies dadas na Proposição 11.1, com a escolha $R = 0$.

Prova. As propriedades (194)-(196), $\forall k = 1, 2, \dots$ são imediatas. Também para $k = 1, 2, \dots$, temos

$$\begin{aligned} g_k(\xi) + g_k(\xi + \pi) &= 2 - c_k \int_0^\xi (\text{sent})^{2k+1} dt - c_k \int_0^{\xi+\pi} (\text{sent})^{2k+1} dt \\ &= 1 - c_k \int_0^\xi (\text{sent})^{2k+1} dt - c_k \int_\pi^{\xi+\pi} (\text{sent})^{2k+1} dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos a identidade $\text{sent} = -\text{sen}(t + \pi)$. Isto nos dá (197). Temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\text{sent})^{2k+1} dt &\geq \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}}} (\text{sent})^{2k+1} dt \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{2k+1}} \left[\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right) \right]^{2k+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2k+1}} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right)^{2k+1} \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{2k+1}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right)^{2k+1} \\ &= \frac{2}{e\sqrt{2k+1}} \geq \frac{1}{3\sqrt{k}} \end{aligned}$$

e temos (198).

De (193), segue-se que $p_k(x)$ tem zero de ordem $k + 1$ em $x = -1$, logo, $p_k(x) = (x + 1)^{k+1} \tilde{p}_k(x)$, com $\tilde{p}_k(x)$ um polinômio algébrico. Isto dá (199). \square

Lema 11.6. Denote $m = \frac{k}{2}$ e escreva (199) como

$$g_k(\xi) = \left(\frac{1 + \cos\xi}{2}\right)^m M_k(\xi). \quad (200)$$

Então existe um inteiro N e uma constante $\alpha < 1$ tal que para $k \geq N$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |M_k(\xi)| < 2^{\alpha k}. \quad (201)$$

Prova. De (200), vemos que

$$M_k(\xi) = 2^m g_k(\xi) (1 + \cos \xi)^{-m}$$

usando (192), temos

$$\sum_{\xi \in \mathbb{R}} |M_k(\xi)| = 2^m \sup_{-1 \leq x \leq 1} p_k(x) (1+x)^{-m}. \quad (202)$$

Usando (193), obtemos para $-1 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} (1+x)^{-m} p_k(x) &= c_k \int_{-1}^x \frac{(1-u^2)^k}{(1+x)^m} du \\ &= c_k \int_{-1}^x \left(\frac{1+u}{1+x} \right)^m (1+u)^m (1-u)^k du \\ &\leq c_k \int_{-1}^x (1+u)^m (1-u)^k du \\ &\leq c_k \int_{-1}^x \left[\sqrt{1+u(1-u)} \right]^k du. \end{aligned} \quad (203)$$

A função $\sqrt{1+u(1-u)}$ tem um máximo absoluto igual a $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ em $[-1, 1]$. Logo,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} (1+x)^{-m} p_k(x) \leq 2c_k \left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^k. \quad (204)$$

Como $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{2}$, o lema segue de (198), (204) e (202). \square

Observação 11.6. *Se olharmos com mais cuidado para as contas feitas acima, concluiremos que $N = 12$ é suficiente. Também segue-se que para cada k grande podemos tomar α qualquer número $> \log_2 \frac{8}{3\sqrt{3}} \simeq 0,299$.*

Proposição 11.2. *Seja $g_k(\xi)$, $k = 1, 2, \dots$ o polinômio trigonométrico definido por (190) e defina $G_k(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} g_k(2^{-j}\xi)$. Então, para $|\xi| > 1$ e $k \geq N$, temos*

$$|G_k(\xi)| \leq c_k |\xi|^{(\alpha-1)k} \quad (205)$$

onde α e k são dados no Lema 11.6.

Prova. Usando (200), podemos escrever

$$G_k(\xi) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2^{-j} \xi}{2} \right)^m \prod_{j=1}^{\infty} M_k(2^{-j} \xi) \quad (206)$$

que faz sentido desde que que ambos os produtos infinitos convirjam. Note que

$$\prod_{j=1}^{\infty} \cos 2^j \xi = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad (207)$$

visto que, $\operatorname{sen} 2x = 2 \cos x \operatorname{sen} x$ e

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \cos 2^{-j} x &= \prod_{j=1}^m \frac{\operatorname{sen} 2^{-j+1} x}{2 \operatorname{sen} 2^{-j} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{2^m \operatorname{sen} 2^{-m} x} \end{aligned}$$

e $\lim_{m \rightarrow \infty} 2^m \operatorname{sen} 2^{-m} x = x$.

Por causa de $\frac{1 + \cos x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$, de (207), temos

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2^{-j} \xi}{2} = \frac{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2}}{\xi^2}. \quad (208)$$

Vejamos o segundo produto. De (200) e (199), segue-se que $M_k(\xi)$ é uma função contínua tal que $|M_k(\xi) - 1| \leq c|\xi|$. Isto implica (veja a prova do Lemma 11.2) que o produto $\prod_{j=1}^{\infty} M_k(2^{-j} \xi)$ converge uniformemente em compactos para uma função contínua. Em particular,

$$\operatorname{supp}_{|\xi| \leq 1} \left| \prod_{j=1}^{\infty} M_k(2^{-j} \xi) \right| \leq c_k. \quad (209)$$

Para $|\xi| > 1$, fixe um inteiro r tal que $2^{r-1} \leq |\xi| < 2^r$. De (209) e (201), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^{\infty} M_k(2^{-j} \xi) \right| &= \prod_{j=1}^r |M_k(2^{-j} \xi)| \prod_{j=1}^{\infty} |M_k(2^{-j} 2^{-r} \xi)| \\ &\leq 2^{\alpha k r} c_k \leq 2c_k |\xi|^{\alpha k}. \end{aligned} \quad (210)$$

De (206), (208) e (210), temos (205). \square

Prova do Teorema 11.4. Começemos com polinômios $g_k(\xi)$ definidos em (190). Como $g_k(\xi) \geq 0$, usamos o Lema 11.1 e obtemos um polinômio trigonométrico $m_k(\xi)$ de grau $2k+1$ tal que $|m_k(\xi)|^2 = g_k(\xi)$. Segue-se de (197), (196) e (195) que $m_k(\xi)$ satisfaz (173)-(175). Aplicamos o Teorema 11.2 para obtermos uma função escala ϕ_k e uma wavelet ψ_k

com suportes compactos no intervalo $[-2k - 1, 2k + 1]$. De (176) e da Proposição 11.2, segue-se que

$$|\hat{\phi}_k(\xi)| \leq c_k |\xi|^{(\alpha-1)k/2}$$

para $|\xi| \geq 1$. Das propriedades da transformada de Fourier, inferimos que $\phi_k \in \mathcal{C}^r$, com $r < \frac{1-\alpha}{2}k - 1$. De (177) é s que também $\psi \in \mathcal{C}^r$. \square

Observação 11.7. *Segue-se do Lema 11.1 e da Observação 11.2 que na verdade $\text{supp } \phi_k$ e $\text{supp } \psi_k$ tem comprimento $2k+1$. Logo, o argumento acima e a Observação 11.6 mostram que a fim de termos uma wavelet de suporte compacto e de classe \mathcal{C}^r , a construção acima requer $k > \frac{2(r+1)}{1-\alpha}$ e obtemos $\text{supp } \psi > \frac{4(r+1)}{1-\alpha} - 1$. Para r grande, obtemos $k \geq 14(r+1)$. Não há razão para acreditar-se que tais números sejam ótimos.*

11.5 A wavelet de Haar

Veremos que a wavelet de Haar é um caso particular das wavelets de Daubechies. Se em (190) fizermos $k = 0$, teremos

$$\begin{aligned} g_0(\xi) &= 1 - \frac{\int_0^\xi \text{sent } dt}{\int_0^\pi \text{sent } dt} \\ &= \frac{1 + \cos \xi}{2}. \end{aligned}$$

Em vista do Lemma de Riesz, podemos assumir que $m(\xi) = a + be^{i\xi}$, onde a e b são reais. Impondo que $|m(\xi)|^2 = g_0(\xi)$, teremos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{1}{2} \\ 2ab &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

o que implica que $a = b = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$m(\xi) = \frac{1 + e^{i\xi}}{2} = e^{i\xi/2} \cos(\xi/2). \quad (211)$$

Claramente, $m(\xi)$ satisfaz as condições (173)-(175). Mostraremos que

$$\Theta(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi) = e^{i\xi/2} \frac{\text{sen } \xi/2}{\xi/2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} e^{i\xi/2^{2^{-j}}} \cos(2^{-j}\xi) \\
&= e^{i\xi/2} e^{\sum_{j=1}^m 2^{-j}} \prod_{j=1}^m \cos(2^{-j}\xi/2) \\
&= e^{i\xi/2} \left(\frac{1-(2^{-j})^{m+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) \frac{\operatorname{sen}\xi/2}{2^m \operatorname{sen}(2^{-m}\xi/2)} \\
&\rightarrow e^{i\xi/2} \frac{\operatorname{sen}\xi/2}{\xi/2}, \text{ quando } m \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Como a transformada de Fourier de $\mathbf{1}_{[-1,0]}$ é proporcional a $e^{i\xi/2} \frac{\operatorname{sen}\xi/2}{\xi/2}$, segue-se que $m(\xi)$ acima nos dá uma função escala com suporte compacto, portanto, como uma wavelet de suporte compacto, uma wavelet de Haar. Ao multiplicarmos $m(\xi)$ por um fator de fase $e^{i\xi}$, ainda teremos a mesma *ARM*; porém, teremos $\mathbf{1}_{[0,1]}$ como a função de escala associada.

12 Wavelets no Intervalo $[0, \infty)$

No que se segue, ϕ é a função escala associada a wavelet de Daubechies com N momentos nulos, seu suporte é o intervalo $[-N + 1, N]$. As funções $\phi(x - k)$, $k \geq N$, cujos suportes estão contidos em $(0, \infty)$, serão denominadas de **interiores**. Se quisermos gerar polinômios de graus até $N - 1$ teremos que acrescentar a estas N modificações (combinações lineares) daquelas funções cujos suportes têm pontos à direita e à esquerda de $x = 0$. Ou seja, definiremos em $[0, \infty)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^k(x) &= \sum_{n=0}^{2N-2} \binom{n}{k} \phi(x + n - N + 1) \\ &= \sum_{n=k}^{2N-2} \binom{n}{k} \phi(x + n - N + 1), \quad k = 0, \dots, N - 1.\end{aligned}\quad (212)$$

Note que as funções $\tilde{\phi}^k(x)$, $x \geq 0$, têm suportes compactos e seus suportes são encaixantes, mais precisamente,

$$\text{supp } \tilde{\phi}^k = [0, 2N - 1 - k], \quad (213)$$

em particular, elas são independentes. Além disso, de (212) e da ortogonalidade dos $\phi_{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, se $m \geq N$, então, $\tilde{\phi}^k$ é ortogonal a $\phi_{0,m}$, para todo $k = 0, \dots, N - 1$.

Proposição 12.1. *As funções $\tilde{\phi}^k$, $k = 0, \dots, N - 1$, são linearmente independentes e ortogonais a $\phi_{0,m}$, $m \geq N$. Juntamente com $\phi_{0,m}$, $m \geq N$, elas geram todos os polinômios de grau até $N - 1$, em $[0, \infty)$. Finalmente, existem constantes $a_{k,l}$, $b_{k,l}$, tais que*

$$\tilde{\phi}^k(x) = \sum_{l=0}^k a_{k,l} \tilde{\phi}^l(2x) + \sum_{m=N}^{3N-2-2k} b_{k,m} \phi(2x - m).$$

Prova. Note que para cada $k = 0, \dots, N - 1$, a função $g_k(y) = \frac{1}{k!} y(y-1) \dots (y-k+1)$ é um polinômio de grau k ($g_0(y) = 1$ e $g_1(y) = y$). Estas funções e os polinômios $1, x, \dots, x^{N-1}$ podem ser facilmente transformados um no outro (veja Exercício 12.1). Isto é verdade em particular se $y = n$. Em vista deste fato, para $\in [0, \infty)$, se definirmos

$$\varphi^k(x) = \sum_{n=0}^{2N-2} n^k \phi(x + n - N + 1), \quad k = 0, \dots, N - 1, \quad (214)$$

(se $k = 0$ e $n = 0$ substituímos n^k por 1), então, as $\tilde{\phi}^k$ e $\phi_{-0,m}$, $m \geq N$, geram os polinômios de grau até $N - 1$, se e somente se, o mesmo for verdade para as φ^k e $\phi_{0,m}$, $m \geq N$ (veja Exercício 12.1).

Verificar porque não foi feito $n \geq k$ na definição de φ !!! Verificar nas contas abaixo se isto não poderia acontecer!

Exercício 12.1.

(a) Considere a equação $x^n = \sum_{l=0}^n c_{n,l} g_l(x)$. Mostre que $C = (c_{n,0}, \dots, c_{n,n})$ satisfaz a equação $AC = B$, onde A é a matriz triangular superior $A_{ij} = \frac{d^i}{dx^i} g_j(1)$ e $B_i = n(n-1)(n-2)\dots(n-i)$. Em particular, como

$$\binom{n}{k} = g_l(n),$$

segue-se que

$$\varphi^k(x) = \sum_{l=0}^k c_{k,l} \tilde{\phi}^l(x). \quad (215)$$

(b) Note que $g_k(x) = \sum_{l=0}^k \frac{g_k^{(l)}(0)}{l!} x^l$, portanto,

$$\tilde{\phi}^k(x) = \sum_{l=0}^k \frac{g_k^{(l)}(0)}{l!} \varphi^k(x). \quad (216)$$

Observação 12.1. Note que para $N = 2$, $\varphi^k(x) = \tilde{\phi}^k(x)$, $k = 0, 1$.

A seguir descreveremos as propriedades das φ^k . Note que para cada $k = 0, \dots, N-1$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (x-n)^k \phi(x-n) = C_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x) dx. \quad (217)$$

Para ver isso, note que o lado esquerdo de (217) é uma função periódica com período 1; portanto, ela é completamente caracterizada pelos seus coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} a_l &\equiv \int_0^1 e^{-i2\pi lx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (x-n)^k \phi(x-n) dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-n}^{-n+1} e^{-i2\pi lx} x^k \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi lx} x^k \phi(x) dx \\ &= \sqrt{2\pi} \widehat{x^k \phi}(2\pi l) \\ &= i^k \sqrt{2\pi} \hat{\phi}^{(k)}(2\pi l). \end{aligned}$$

A seguir, mostraremos que $\hat{\phi}^{(k)}(2\pi l) = 0$, se $l \neq 0$. Da relação,

$$\hat{\phi}(\xi) = m_o(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2) \quad (218)$$

onde $m_o(\xi)$ possui um zero de ordem $N-1$ em $\xi = \pi$, ou seja, $m_o^{(r)}(\pi) = 0$, para $r = 0, \dots, N-1$; além disso, como m_o é um polinômio trigonométrico com período 2π , segue-se que

$$m_o^{(r)}(l\pi) = 0, \quad (219)$$

se l for ímpar. De (218), temos

$$\hat{\phi}^{(k)}(2\pi l) = 2^{-k} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} m_o^{(r)}(\pi l) \hat{\phi}^{(k-r)}(\pi l). \quad (220)$$

De (219) e (220), $\hat{\phi}^{(k)}(2\pi l) = 0$ se l for ímpar. Conseqüentemente, se aplicarmos (220) novamente, concluiremos que $\hat{\phi}^{(k)}(2\pi l) = 0$ se l for par diferente de zero. Portanto, o lado esquerdo de (217) é o valor constante $a_o = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x) dx$.

A seguir, a partir da relação de escala para ϕ , calcularemos os C_l em função dos h_n .

$$\begin{aligned} C_l &= \sqrt{2} \sum_m h_m \int_{-\infty}^{\infty} x^l \phi(2x - m) dx \\ &= 2^{-l-1/2} \sum_m h_m \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)(y + m)^l dy \\ &= 2^{-l} \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} 2^{-1/2} \sum_m h_m m^r \int_{-\infty}^{\infty} y^{l-r} \phi(y) dy \\ &= 2^{-l} \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} M_r C_{l-r}, \end{aligned}$$

onde $M_r = 2^{-1/2} \sum_m h_m m^r$. Em particular, $M_o = 1$, portanto,

$$C_l = (2^{-l} - 1)^{-1} \sum_{r=1}^l \binom{l}{r} M_r C_{l-r}. \quad (221)$$

Portanto, de (217), para $k = 0, \dots, N - 1$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k \phi(x - n - N + 1) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [x - N + 1 - (x - n)]^k \phi(x - n) \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^l \sum_{n \in \mathbb{Z}} (x - n)^l \phi(x - n) (x - N + 1)^{k-l} \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^l C_l (x - N + 1)^{k-l} \\ &\equiv p_k(x), \end{aligned}$$

onde $p_k(x)$ é um polinômio de grau k e o coeficiente de x^k vale 1, uma vez que $C_o = 1$. Em particular, os N polinômios p_k são independentes e juntos geram todos os polinômios

de grau até $N - 1$. De (214), vemos que $x \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
p_k(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k \phi(x - n - N + 1) \\
&= \sum_{n \leq 0} n^k \phi(x - n - N + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} n^k \phi(x - n - N + 1) \\
&= (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^k \phi(x + n - N + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} n^k \phi(x - n - N + 1) \\
&= (-1)^k \sum_{n=0}^{2N-2} n^k \phi(x + n - N + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} n^k \phi(x - n - N + 1) \quad (222) \\
&= (-1)^k \varphi^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n^k \phi(x - n - N + 1) \\
&= (-1)^k \varphi^k(x) + \sum_{n=N}^{\infty} (n - N + 1)^k \phi_{n,0}(x),
\end{aligned}$$

onde em (222) usamos que o suporte de $\phi(x + n - N + 1)$ é o intervalo $[-n, 2N - n - 1]$, portanto, disjunto de $[0, \infty)$, se $n \geq 2N - 1$. Logo, φ^k , $k = 0, \dots, N - 1$, e $\phi_{0,n}$, $n \geq N$, geram todos os polinômios de grau $\leq N - 1$.

Resta-nos mostrar (214), é suficiente mostrarmos uma relação similar para os φ^k . Note que da relação de escala para ϕ , temos

$$\begin{aligned}
\varphi^k(x) &= \sum_{n=0}^{2N-2} n^k \phi(x + n - N + 1) \\
&= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2N-2} n^k \sum_{m=-N+1}^N h_m \phi(2(x + n - N + 1) - m) \\
&= \sqrt{2} \sum_{l=-3N+3}^{3N-2} \phi(2x - l) \sum_{n=0}^{2N-2} \sum_{m=-N+1}^N h_m n^k \delta_{l, 2N+m-2n-2}, \quad l \equiv 2N - 2 - 2n + m \\
&= \sqrt{2} \sum_{l=-3N+3}^{3N-2} \phi(2x - l) \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k \\
&= \sqrt{2} \sum_{l=-N+1}^{3N-2} \phi(2x - l) \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k, \quad x \in [0, \infty) \\
&= \sqrt{2} \sum_{l=-N+1}^{N-1} \phi(2x - l) \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k + \sqrt{2} \sum_{l=N}^{3N-2} \phi(2x - l) \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k \\
&\equiv \sqrt{2} \sum_{l=-N+1}^{N-1} \phi(2x - l) \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k + \sum_{l=N}^{3N-2} \beta_{k,l} \phi(2x - l),
\end{aligned}$$

onde

$$\beta_{k,l} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k.$$

Observe que o segundo termo da última equação já está na forma desejada.

No que se segue, assumimos que $h_m = 0$ para $m < -N$ ou $m > N$, em particular, poderemos substituir $\sqrt{2} \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k$ por $\sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n-2N+2+l} n^k$.

Note que, como $m_o(\xi) = 1/\sqrt{2} \sum_n h_n e^{-in\xi}$ e $m_o^{(s)}(\pi) = 0$, para $s = 0, \dots, N-1$, segue-se que $\sum_n h_n (-1)^n n^s = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_n h_{n-t} (-1)^n n^r &= (-1)^t \sum_m h_m (-1)^m (m+t)^r \\ &= (-1)^t \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} t^{r-s} \sum_m h_m (-1)^m m^s = 0 \end{aligned}$$

para $r = 0, \dots, N-1$, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_m h_{2m-t} (2m)^r &\equiv \mu_{r,t} \\ &= \sum_m h_{2m+1-t} (2m+1)^r \\ &= \frac{1}{2} \sum_n h_{n-t} n^r \\ &= \frac{1}{2} \sum_n h_l (t+n)^r \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} t^l \sum_l h_l l^{r-l} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^r \binom{r}{s} t^s M_{r-l}. \end{aligned}$$

A seguir consideraremos a seguinte soma: $\sum_n h_{2n-N+1-(n-l-1)} (2n - (N-l-1))^{k-r}$. Se $N-l-1$ for par, fazemos a mudança de variáveis $2n - (N-l-1) = 2m$ e teremos

$$\sum_n h_{2n-N+1-(n-l-1)} (2n - (N-l-1))^{k-r} = \sum_m h_{2m-(N-1)} (2m)^{k-r} = \mu_{N-1, k-r};$$

caso contrário, se $N-l-1$ for ímpar, fazemos a mudança de variáveis $2n - (N-l-1) = 2m+1$ e teremos

$$\sum_n h_{2n-N+1-(n-l-1)} (2n - (N-l-1))^{k-r} = \sum_m h_{2m+1-(N-1)} (2m+1)^{k-r} = \mu_{N-1, k-r}.$$

Isto no mostra que

$$\sum_n h_{2n-N+1-(n-l-1)} (2n - (N - l - 1))^{k-r} = \mu_{N-1, k-r}.$$

Logo, $\sqrt{2} \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k$, pode ser re-escrito como

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n-2N+2+l} n^k \\ &= 2^{-k+1/2} \sum_n h_{2n-(N-l-1)-N+1} (2n)^k \\ &= 2^{-k+1/2} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (N-l-1)^r \sum_n h_{2n-N+1-(N-l-1)} (2n - (N-l-1))^{k-r} \\ &= 2^{-k+1/2} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (N-l-1)^r \mu_{N-1, k-r}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sqrt{2} \sum_{l=-N+1}^{N-1} \phi(2x-l) \sum_{n=0}^{2N-2} h_{2n-2N+2+l} n^k$$

pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} & 2^{-k+1/2} \sum_{l=-N+1}^{N-1} \sum_{r=0}^k 2^{-k+1/2} \binom{k}{r} (N-l-1)^r \mu_{N-1, k-r} \phi(2x-l) \\ &= 2^{-k+1/2} \sum_{r=0}^k \sum_{l=-N+1}^{N-1} \binom{k}{r} \mu_{N-1, k-r} (N-l-1)^r \phi(2x-l) \\ &= 2^{-k+1/2} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \mu_{N-1, k-r} \sum_{s=0}^{2N-2} s^r \phi(2x+s-N+1), \quad s \equiv N-l-1 \\ &= 2^{-k+1/2} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \mu_{N-1, k-r} \varphi^r(2x) \\ &\equiv \sum_{r=0}^k \alpha_{k,r} \varphi^r(2x), \end{aligned}$$

o que nos dá o relação de recorrência desejada. \square

Observação 12.2. Note que $\alpha_{k,k} = 2^{-k+1/2} \mu_{N-1,0} = 2^{-k+1/2} \sum_m h_{2m-(N-1)} = 2^{-k-1}$, visto que $\sum_n h_{2n} = \sum_n h_{2n+1}$ e $\sum_n h_n = \sqrt{2}$.

Exercício 12.2. Mostre que $a_{k,k} = 2^{-k}$ (Sugestão: expresse $a_{k,k}$ em termos de $\alpha_{k,k}$).

Exercício 12.3. Calcule $a_{k,l}$ e $b_{k,l}$ para $N = 2$.

Exercício 12.4. Tente encontrar uma relação entre os $a_{k,l}$ e $b_{k,l}$ em termos de $\alpha_{k,l}$ e $\beta_{k,l}$.

Agora defina

$$V_{-j}^{left} = \overline{Span[\{\tilde{\phi}^k(2^j \cdot) : k = 0, \dots, N-1\} \cup \{\phi_{-j,m} : m \geq N\}]}.$$

Da Proposição 12.1, segue-se que os V_{-j}^{left} 's constituem uma hierarquia de resolução múltipla,

$$\dots \subset V_2^{left} \subset V_1^{left} \subset V_0^{left} \subset V_{-1}^{left} \subset V_{-2}^{left} \subset \dots.$$

Como $\overline{Span[\{\phi_{-j,m} : m \geq N\}]}$, já igual a $L^2([0, \infty))$, também temos que $\bigcup_j V_j^{left} = L^2([0, \infty))$. Podemos obter uma base ortonormal para V_0^{left} , ortogonalizando-se os $\tilde{\phi}^k$, visto que estas já são ortogonais aos $\phi_{0,m}$; mudando-se as escalas, obtemos uma base ortonormal para cada V_j^{left} . Se aplicarmos o procedimento de Gram-Schmidt, começando-se com $\tilde{\phi}^{N-1}$ e formos na direção decrescente dos valores de k , então, os ϕ_k^{left} 's resultantes, $k = 0, \dots, N-1$ terão suportes encaixantes: suporte de ϕ_k^{left} igual a $[0, N+k]$. Os ϕ_k^{left} substituem $\phi_{0,l}$, $l \leq N-1$. Denotaremos por $\phi_{-j,k}^{left}(x)$ as funções $2^{j/2} \phi_k^{left}(2^j x)$. Para aplicarmos a ortonormalização de Gram-Schmidt explicitamente, precisamos da matriz $\langle \tilde{\phi}^k, \tilde{\phi}^l \rangle$. Para calculá-la precisamos da relação de recorrência (214). Para $k = 0$, por exemplo, temos

$$\|\tilde{\phi}^0\|^2 = \frac{a_{0,0}^2}{2} \|\tilde{\phi}^0\|^2 + \sum_{m=N}^{3N-2} \frac{b_{0,m}^2}{2},$$

desta obtemos $\|\tilde{\phi}^0\|^2$. Então, segue-se que

$$\langle \tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^1 \rangle = \frac{a_{0,0}a_{1,0}}{2} \|\tilde{\phi}^0\|^2 + \frac{a_{0,0}a_{1,1}}{2} \langle \tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^1 \rangle + \sum_{m=N}^{3N-4} \frac{b_{0,m}b_{1,m}}{2},$$

nos dando uma fórmula explícita para $\langle \tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^1 \rangle$, uma vez que $\|\tilde{\phi}^0\|^2$ é conhecido. É claro como proceder para valores maiores de k . Se todos os valores de $\langle \tilde{\phi}^k, \tilde{\phi}^l \rangle$ para $0 \leq k, l \leq K-1$ são conhecidos, então podemos calcular $\langle \tilde{\phi}^k, \tilde{\phi}^K \rangle$, para $k = 0, \dots, K$ nesta ordem. Obtemos equações da forma

$$\left[1 - \frac{1}{2} a_{k,k} a_{K,K}\right] \langle \tilde{\phi}^k, \tilde{\phi}^K \rangle = \text{combinação linear dos } \langle \tilde{\phi}^l, \tilde{\phi}^m \rangle, \text{ com } l, m \leq K + \text{constantes}.$$

Como $\frac{1}{2} a_{k,k} a_{K,K} = 2^{-k-K-1} \leq \frac{1}{2}$, isto nos leva a um esquema numérico recursivo que é estável para determinar $\langle \tilde{\phi}^k, \tilde{\phi}^l \rangle$. Os ϕ_k^{left} 's construído acima satisfaz uma relação recursiva

similar a (214) a qual é herdada por todas as escalas j . Explicitamente, existem constantes $H_{k,l}^{left}$ e $h_{k,m}^{left}$ (as quais podem ser calculadas explicitamente a partir de $a_{k,l}$, $b_{k,l}$ em (214) e o procedimento de ortogonalização), tais que

$$\phi_{-j,k}^{left}(x) = \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^{left} \phi_{-j-1,l}^{left} + \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^{left} \phi_{-j-1,m}. \quad (223)$$

13 Fórmulas de Quadratura

Nos algoritmos numéricos baseados em wavelets o ponto de partida consiste na representação da função, f , numa escala mais fina, j . Nesta seção veremos como calcular

$$a_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(2^{-j}x - k)dx,$$

para uma função suave, f .

A idéia de uma fórmula de quadratura consiste em encontrar pesos w_k e abscissas x_k tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^r w_k f(x_k).$$

Dizemos que grau de precisão da fórmula de quadratura é q se ela for exata para polinômios de graus menores do que o igual a q .

No caso das Coiflets existe um número inteiro τ_M de modo que ϕ satisfaça

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x + \tau_M)x^m dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)(x - \tau_M)^m dx = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (224)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1.$$

Para $M = 2$, $\tau_2 = 5$ e os correspondentes coeficientes de filtros são (veja [6])

$$h_0 = \frac{\sqrt{15}-3}{16\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{1-\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{15}}{8\sqrt{2}}$$

$$h_3 = \frac{\sqrt{15}+3}{8\sqrt{2}}, \quad h_4 = \frac{\sqrt{15}+13}{16\sqrt{2}}, \quad h_5 = \frac{9-\sqrt{15}}{16\sqrt{2}}.$$

Ainda em [6] são dados os valores de τ_M e os correspondentes valores numéricos dos coeficientes de filtros para $M = 4$ e $M = 6$.

Então, para as Coiflets, temos

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(2^{-j}x - k)dx \\ &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2^j k)\phi(2^{-j}x)dx. \end{aligned}$$

Expandindo f em torno do ponto $2^j(k + \tau_M)$, ou seja,

$$\begin{aligned} f(x + 2^j k) &= f(2^j(k + \tau_M) + x - 2^j\tau_M) \\ &= f(2^j(k + \tau_M)) + \sum_{l=1}^{M-1} f^{(l)}(2^j(k + \tau_M)) \frac{(x - 2^j\tau_M)^l}{l!} + R_M(c, M), \end{aligned}$$

onde

$$R_{c,M} = f^{(M)}(c) \frac{(x - 2^j \tau_M)^M}{M!},$$

com c entre $2^j(k + \tau_M)$ e $x - 2^j \tau_M$. Logo,

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= 2^{\frac{j}{2}} f(2^j(k + \tau_M)) + \sum_{l=1}^{M-1} \frac{2^{j(l+\frac{1}{2})} f^{(l)}(2^j(k + \tau_M))}{l!} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \tau_M)^l \phi(x) dx \\ &\quad + 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} R_m(c, M) \phi(2^{-j}x) dx \\ &= 2^{\frac{j}{2}} f(2^j(k + \tau_M)) + 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} R_m(c, M) \phi(2^{-j}x) dx \\ &= 2^{\frac{j}{2}} f(2^j(k + \tau_M)) + \frac{2^{j(M+\frac{1}{2})}}{M!} \int_{-\infty}^{\infty} R_m(\tilde{c}, M) (x - \tau_M)^M \phi(x) dx \end{aligned}$$

onde \tilde{c} está entre $2^j(k + \tau_M)$ e $2^j(x - \tau_M)$. Portanto,

$$a_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} f(2^j(k + \tau_M)) + O(2^{j(M+\frac{1}{2})}).$$

No caso das Coiflets, a representação de $a_{j,k}$ fica muito simples, contudo, para um mesmo M , enquanto a wavelet de Daubechies usual tem $2M$ coeficientes de filtros, a correspondente Coiflet possui $3M$ coeficientes de filtros, o que faz com que os algoritmos envolvendo as Coiflets sejam 50% mais lentos em relação às wavelets de Daubechies.

Exercício 13.1. *Mostre que se a função ϕ satisfaz a condição (224), então,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \phi(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \phi(x) dx \right)^m = \tau^m.$$

Em [6] mostra-se a seguinte fórmula de quadratura para wavelets de Daubechies com M momentos nulos:

$$a_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l=0}^{M-1} c_l f(l + 2^j k) + O(2^{j(M+\frac{1}{2})})$$

onde os pesos c_l satisfazem ao seguinte sistema de equações lineares algébricas

$$\sum_{l=0}^{M-1} c_l l^m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \phi(x) dx \equiv M_m, \quad m = 1, 2, \dots, M-1,$$

onde os momentos da função escala são determinados a partir dos seus coeficientes de filtros $\{h_s\}_{s=0}^{2M-1}$ e será descrito a seguir.

Note que da relação de escala

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x - k),$$

temos

$$\begin{aligned} M_m &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) x^m dx \\ &= \sqrt{2} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) x^m dx \\ &= 2^{-m-1} \sqrt{2} \sum_k h_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) (y + k)^m dy, \quad (y = 2x - k) \\ &= 2^{-m-1} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \sqrt{2} \sum_k h_k k^{m-l} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) y^l dy \\ &= 2^{-m-1} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \mu_{m-l} M_l, \end{aligned}$$

onde

$$\mu_l = \sqrt{2} \sum_k h_k k^l. \quad (225)$$

Portanto, temos a seguinte relação

$$M_m = 2^{-m-1} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \mu_{m-l} M_l.$$

Como $\mu_0 = \sqrt{2}$, temos explicitamente

$$M_m = \frac{1}{2^{m+1} - 2} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \mu_{m-l} M_l. \quad (226)$$

Exercício 13.2. Calcule numericamente M_m para as wavelets de Daubechies com $M = 2, 3$ e 4 .

Em [6] constrói-se uma seqüência de vetores $\{M_m^r\}_{m=0}^{M-1}$, tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M_m^r = M_m,$$

ou seja,

$$M_m^{r+1} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} 2^{m-j(r+1)} M_{m-j}^r M_j^1, \quad (227)$$

começando com

$$M_m^1 = 2^{-m-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k k^m, \quad m = 0, \dots, M-1.$$

A relação (227) segue do fato que

$$\begin{aligned} M_m &= i^{-m} \left[\frac{d^m}{d\xi^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \phi(x) dx \right]_{\xi=0} \\ &= i^{-m} \left[\frac{d^m}{d\xi^m} \sqrt{2\pi} \hat{\phi}(\xi) \right]_{\xi=0} \\ &= i^{-m} \left[\frac{d^m}{d\xi^m} \prod_{j=1}^{\infty} m_o(2^{-j}\xi) \right]_{\xi=0} \end{aligned}$$

mas a seqüência

$$\begin{aligned} P_{r+1}(\xi) &\equiv \prod_{j=1}^{r+1} m_o(2^{-j}\xi) = P_r(\xi) m_o(2^{-r-1}\xi) \\ &= P_r(\xi) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{i2^{-r-1}\xi} \right) \end{aligned} \quad (228)$$

converge para $\prod_{j=1}^{\infty} m_o(2^{-j}\xi)$ quando $r \rightarrow \infty$. A relação (227) segue da regra de Leibniz para derivação aplicada a (228) e do fato que por definição

$$M_m^r = i^{-m} \left[\frac{d^m}{d\xi^m} P_{r+1}(\xi) \right]_{\xi=0}.$$

14 Representação de Operadores em Bases Ortormais de Wavelets

Em [5] são introduzidos algoritmos numéricos rápidos designados para aplicações em matrizes densas (ou operadores integrais). Sabe-se que aplicando-se diretamente uma matriz densa $N \times N$ a um vetor requer aproximadamente N^2 operações, este fato simples é uma causa de dificuldades sérias encontradas em computações em grandes escalas. O motivo principal para o uso restrito de operadores integrais como um ferramenta numérica se deve aos sistemas de equações algébricas densos que eles normalmente nos conduzem e estes têm que ser resolvidos diretamente ou iterativamente. A maioria dos métodos iterativos para soluções de sistemas de equações lineares envolvem a aplicação da matriz do sistema a uma seqüência de vetores recursivamente gerados, o que tende a ser muito dispendioso para problemas de grandes escalas. A situação é ainda pior se usarmos uma máquina para resolver sistemas de equações lineares, visto que isto normalmente requer $O(N^3)$ operações. Como conseqüência, na maioria das áreas de matemática computacional matrizes densas são evitadas, sempre que possível.

Para operadores invariantes a translações, o problema de custo excessivo de se aplicar (ou inverter) matrizes densas é solucionado pela Transformada de Fourier Rápida e algoritmos relacionados (esquema de convolução rápida, etc). Estes métodos exploram propriedades algébricas de uma matriz para aplicá-la a um vetor e requer $O(N \ln N)$ operações. Tais métodos são frágeis no sentido que eles dependem de propriedades algébricas dos operadores.

Os métodos baseados em wavelets descritos na referência [5] introduzem uma generalização radical em vários algoritmos. Eles descrevem um método para aplicação numérica rápida a vetores arbitrários e uma ampla variedade de operadores. Tais métodos em geral requerem $O(N)$ (ou $O(N \ln N)$) operações e são aplicáveis diretamente a todos os operadores de Calderon-Zygmund e operadores pseudo-diferenciais. A invariância translacional de operadores não é necessária. A utilização das bases ortonormais de Daubechies [1] é extraordinariamente bem adaptada aos cálculos numéricos. Nestas bases, numa dada precisão, operadores integrais satisfazendo certas estimativas analíticas, têm uma forma de banda diagonal e podem ser aplicados a funções arbitrárias de maneira “rápida”. Se a estrutura das singularidades da matriz é conhecida a priori (como as funções de Green para operadores elípticos e de Calderon-Zygmund), a compressão do operador numa forma de banda é um procedimento $O(N)$. As entradas não nulas da matriz comprimida imita a estrutura das singularidades do núcleo original.

Nesta seção introduziremos a representação não-padrão de um operador e representaremos explicitamente alguns operadores (derivadas, transformadas de Hilbert e derivadas fracionárias) em bases ortormais de wavelets de suportes compactos. A representação não-padrão, a qual não será considerada, pode ser obtida facilmente a partir não-padrão.

14.1 A Representação Não-Padrão de Operadores

Dada uma wavelet $\psi(x)$ e uma função escala $\phi(x)$ a ela associada, a partir destas podemos construir uma base de wavelets em duas dimensões. Isto pode ser feito de duas maneiras naturais. A primeira é simplesmente o produto tensorial $\psi_{j,k} \otimes \psi_{j',k'}$, onde $\psi_{j,k} \otimes \psi_{j',k'}(x, y) = \psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(y)$. A segunda base é definida associando-se três bases de funções: $\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(y)$, $\psi_{j,k}(x)\phi_{j',k'}(y)$ e $\phi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(y)$. A primeira e segunda maneira nos leva às decomposições padrão e não-padrão, respectivamente.

No que se segue iremos supor que T seja um operador integral e que seu núcleo seja $K(x, y)$, ou seja,

$$(Tf)(x) = \int K(x, y)f(y)dy. \quad (229)$$

Para representarmos T numa base de wavelets, nós expandimos (formalmente) seu núcleo como uma função de duas variáveis, por exemplo, na forma não-padrão, temos

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \sum_{j,k,k'} \alpha_{j,k,k'} \psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y) + \sum_{j,k,k'} \beta_{j,k,k'} \psi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y) \\ &+ \sum_{j,k,k'} \gamma_{j,k,k'} \phi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y), \end{aligned} \quad (230)$$

onde

$$\alpha_{j,k,k'} = \int K(x, y)\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y) = \langle T\psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle \quad (231)$$

$$\beta_{j,k,k'} = \int K(x, y)\psi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y) = \langle T\psi_{j,k}, \phi_{j,k'} \rangle \quad (232)$$

$$\gamma_{j,k,k'} = \int K(x, y)\phi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y) = \langle T\phi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle \quad (233)$$

$$s_{j,k,k'} = \int K(x, y)\phi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y) = \langle T\phi_{j,k}, \phi_{j,k'} \rangle. \quad (234)$$

Substituindo (230) em (229), temos

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= \sum_{j,k} \psi_{j,k}(x) \sum_{j,k'} \alpha_{j,k,k'} d_{j,k'} + \sum_{j,k} \psi_{j,k}(x) \sum_{j,k'} \beta_{j,k,k'} a_{j,k'} \\ &+ \sum_{j,k} \phi_{j,k}(x) \sum_{j,k'} \gamma_{j,k,k'} d_{j,k'}, \end{aligned} \quad (235)$$

onde $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ e $a_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$.

A seguir, discretizaremos (235).

Como $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = 0$, podemos sempre encontrar uma escala suficientemente fina, j_0 , tal que $\|(1 - P_{j_0})f\|$ e $\|T(1 - P_{j_0})f\|$ sejam arbitrariamente

pequenos. Como $T = P_{j_0}TP_{j_0} + P_{j_0}T(1 - P_{j_0}) + (1 - P_{j_0})T$, podemos aproximar T por $T_0 = P_{j_0}TP_{j_0}$. Por outro lado, podemos encontrar uma escala j_1 tal que $\|TP_{j_1}f\|$ seja arbitrariamente pequeno. Para simplificar nossa notação, assumiremos que $j_0 = 0$ e $j_1 = n$.

Expandindo-se T_0 numa soma telescópica, temos

$$\begin{aligned} T_0 = P_0TP_0 &= \sum_{j=1}^n (P_{j-1}TP_{j-1} - P_jTP_j) + P_nTP_n \\ &= \sum_{j=1}^n [(P_{j-1} - P_j)T(P_{j-1} - P_j) + (P_{j-1} - P_j)TP_j + P_jT(P_{j-1} - P_j)] \\ &\quad + P_nTP_n \end{aligned} \quad (236)$$

Definindo-se os operadores Q_j , com $j = 1, 2, \dots, n$, pela fórmula $Q_j = P_{j-1} - P_j$, podemos escrever (236) na seguinte forma

$$T_0 = \sum_{j=1}^n (Q_jTQ_j + Q_jTP_j + P_jTQ_j) + P_nTP_n \quad (237)$$

Como $\|P_nTP_n f\| \leq \|TP_n f\|$ que é arbitrariamente pequeno, T será aproximadamente

$$T_0^n = \sum_{j=1}^n (Q_jTQ_j + Q_jTP_j + P_jTQ_j). \quad (238)$$

Como $\{\psi_{j,k}\}$ forma uma base ornormal para W_j onde $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, Q_j é a projecção ortogonal sobre W_j , logo

$$\begin{aligned} (Q_jTQ_j f)(x) &= \sum_{k=1}^{2^{n-j}} \langle TQ_j f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n-j}} \sum_{k'=1}^{2^{n-j}} d_{j,k'} \langle T\psi_{j,k'}, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n-j}} (\alpha_j(d_j))_k \psi_{j,k}(x). \end{aligned} \quad (239)$$

De maneira análoga, como $\{\phi_{j,k}\}$ é uma base ortonormal para V_j , teremos

$$(Q_jTP_j f)(x) = \sum_{k=1}^{2^{n-j}} (\beta_j(d_j))_k \psi_{j,k}(x).$$

e

$$(P_jTQ_j f)(x) = \sum_{k=1}^{2^{n-j}} (\gamma_j(a_j))_k \phi_{j,k}(x).$$

Se fizermos $\hat{d}_j = \alpha_j(d_j) + \beta_j(a_j)$ e $\hat{a}_j = \gamma_j(d_j)$, teremos a seguinte aproximação para T :

$$T_0^n(f)(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{n-j}} (\hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(x) + \hat{a}_{j,k} \phi_{j,k}(x)). \quad (240)$$

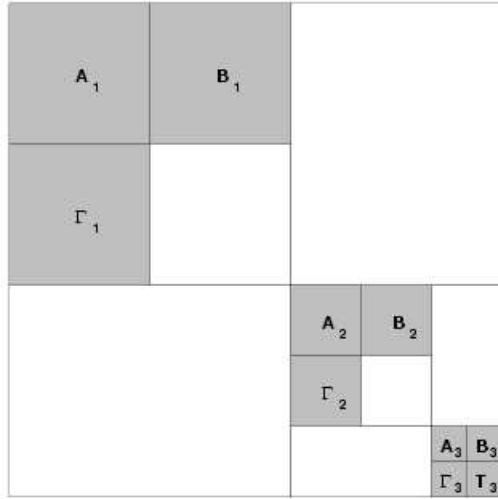


Figura 13: Organização do operador na decomposição não-padrão.

No procedimento descrito acima, começamos com uma função definida no intervalo $[0, 1]$ e denotamos por $a_{0,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$, onde $k = 1, 2, \dots, 2^n$ e obtemos $P_0 f = \sum_{k=1}^{2^{n-j}} a_{0,k} \phi_{0,k}$; a partir desta calculamos os seus coeficientes de wavelets usando o algoritmo piramidal:

$$\begin{array}{ccccccc} \{s_k^0\} & \longrightarrow & \{s_k^1\} & \longrightarrow & \{s_k^2\} & \longrightarrow & \{s_k^3\} \cdots \longrightarrow \{s_k^J\} \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & \{d_k^1\} & & \{d_k^2\} & & \{d_k^3\} \cdots \{d_k^J\}. \end{array}$$

e obtemos uma nova representação para o conjunto de dados

$$(d_{1,1}, d_{1,2}, \dots, d_{1,2^{n-1}}, a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,2^{n-1}}, d_{2,1}, d_{2,2}, \dots, d_{2,2^{n-2}}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,2^{n-2}}, \dots, d_{n,1}, a_{n,1}),$$

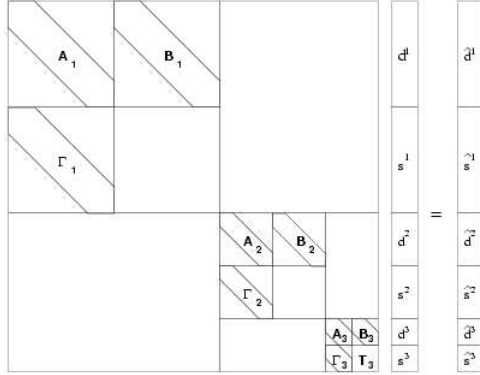


Figura 14: A organização do operador e da função na decomposição não-padrão.

consistindo de $2^{n+1} - 2$ coeficientes, necessários na fórmula (240).

Note que a relação (240) consiste de médias e diferença em todas as escalas. A fim de projetarmos (240) numa base de wavelets formamos a seguinte representação,

$$T_0^n(f)(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{2^{n-j}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) + a_{J,1} \phi_{J,1}(x). \quad (241)$$

Na Proposição 4.1 da referência [5] temos o seguinte resultado:

Proposição 14.1. *Suponha que na expansão (230) tenhamos a base de wavelets de Daubechies com M momentos nulos. Então para qualquer núcleo satisfazendo*

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &\leq \frac{1}{|x - y|}, \\ |\partial_x^M K(x, y)| + |\partial_y^M K(x, y)| &\leq \frac{C_M}{|x - y|^{1+M}}, \end{aligned}$$

então

$$|\alpha_{j,i,l}| + |\beta_{j,i,l}| + |\gamma_{j,i,l}| \leq \frac{C_M}{1 + |i - l|^{M+1}},$$

para todo $|i - l| \geq 2M$.

14.2 O operador $\frac{d}{dx}$ em base de wavelets

Iremos construir o operador $\frac{d}{dx}$ na representação não-padrão, na base de wavelets de Daubechies, veja [6]. Esta é uma representação de um operador, T , como uma cadeia de ternos $\{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ atuando nos subespaços V_j e W_j ,

$$\begin{aligned} A_j &\equiv Q_j T Q_j &: W_j &\rightarrow W_j \\ B_j &\equiv Q_j T P_j &: V_j &\rightarrow W_j \\ \Gamma_j &\equiv P_j T Q_j &: W_j &\rightarrow V_j, \end{aligned}$$

onde P_j é o operador projeção sobre o subespaço V_j e $Q_j = P_{j-1} - P_j$, é a projeção sobre o subespaço W_j .

Os coeficientes α_{il}^j , β_{il}^j , γ_{il}^j e r_{il}^j são elementos das matrizes A_j , B_j , Γ_j e $T_j \equiv P_j T P_j$, respectivamente, com $i, l, j \in \mathbb{Z}$. Para o operador $\frac{d}{dx}$, temos

$$\begin{aligned} \alpha_{il}^j &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}x - i) \psi'(2^{-j}x - l) 2^{-j} dx = 2^{-j} \alpha_{i-l} \\ \beta_{il}^j &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}x - i) \phi'(2^{-j}x - l) 2^{-j} dx = 2^{-j} \beta_{i-l} \\ \gamma_{il}^j &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-j}x - i) \psi'(2^{-j}x - l) 2^{-j} dx = 2^{-j} \gamma_{i-l} \\ r_{il}^j &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-j}x - i) \phi'(2^{-j}x - l) 2^{-j} dx = 2^{-j} r_{i-l}, \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_l = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-l) \frac{d}{dx} \psi(x) dx, \quad (242)$$

$$\beta_l = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-l) \frac{d}{dx} \phi(x) dx, \quad (243)$$

$$\gamma_l = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-l) \frac{d}{dx} \psi(x) dx, \quad (244)$$

$$r_l = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-l) \frac{d}{dx} \phi(x) dx. \quad (245)$$

Lembrando que valem as seguintes relações de escalas

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k \phi(2x - k) \quad (246)$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g_k \phi(2x - k), \quad (247)$$

onde $g_k = (-1)^k h_{L-k-1}$, $k = 0, 1, \dots, L-1$, $L \equiv 2M$ e M é o número de momentos nulos de ψ , ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0$, para $m = 0, 1, \dots, M-1$. Além disso, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$.

Note que da relação (246), temos

$$\begin{aligned} 1 &= \|\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x)dx = 2 \sum_{k,k'=0}^{L-1} h_k h'_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k)\phi(2x-k')dx \\ &= \sum_{k,k'=0}^{L-1} h_k h'_k \delta_{k,k'} = \sum_{k=0}^{L-1} h_k^2, \end{aligned}$$

portanto,

$$\sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 = 1. \quad (248)$$

Note que integrando (246) de $-\infty$ a ∞ e lembrando que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$, concluímos que

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_k = \sqrt{2}.$$

Deste resultado e da definição de m_o , dada em (252), segue-se que $m_o(0) = 1$. Desta relação e de (253), segue-se que $m_o(\pi) = 0$.

Em virtude das relações de escalas acima, podemos re-escrever (242)-(245) como

$$\alpha_i = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L_1} g_k g_{k'} r_{2i+k-k'}, \quad (249)$$

$$\beta_i = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L_1} g_k h_{k'} r_{2i+k-k'}, \quad (250)$$

$$\gamma_i = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L_1} h_k g_{k'} r_{2i+k-k'}, \quad (251)$$

portanto, a representação de $\frac{d}{dx}$ é completamente determinada por r_l , ou seja, pela representação de $\frac{d}{dx}$ em V_0 .

Vimos na Seção 3 que função 2π -periódica

$$m_o(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{L-1} h_k e^{ik\xi} \quad (252)$$

satisfaz a equação

$$|m_o(\xi)|^2 + |m_o(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad (253)$$

o que implica que $m_o(\xi)$ é da forma (veja Seção 11 e [4])

$$m_o(\xi) = \left(\frac{1}{2}(1 + e^{i\xi}) \right)^M Q(e^{i\xi}),$$

onde Q é um polinômio tal que

$$|Q(e^{i\xi})|^2 = P \left(\text{sen}^2 \frac{\xi}{2} \right) + \text{sen}^{2M} \left(\frac{\xi}{2} \right) R \left(\frac{\cos \xi}{2} \right),$$

R é um polinômio par tal que

$$0 \leq P(y) + y^M R \left(\frac{1}{2} - y \right), \text{ para } 0 \leq y \leq 1$$

e

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} \left[P(y) + y^M R \left(\frac{1}{2} - y \right) \right] < 2^{2(M-1)}. \quad (254)$$

Note que

$$\begin{aligned} |m_o(\xi)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k,k'=0}^{L-1} h_k h'_k e^{i(k-k')\xi} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'=0}^{L-1} h_k h'_k \cos(k-k')\xi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{L-1} \left(\sum_{k,k'=0, |k-k'|=n}^{L-1} h_k h'_k \right) \cos n\xi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 + \sum_{n=1}^{L-1} \left(\sum_{k=0}^{L-1} h_k h_{k+n} \right) \cos n\xi \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{L-1} \left(\sum_{k=0}^{L-1-n} h_k h_{k+n} \right) \cos n\xi \\ &\equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} a_n \cos n\xi. \end{aligned} \quad (255)$$

Na penúltima igualdade usamos (248), ou seja, que $\sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 = 1$ e que $h_i = 0$ se $i > N - 1 = 2M - 1$. Definimos a auto-correlação dos coeficientes $\{h_k\}_{k=0}^{L-1}$ como

$$a_n \equiv 2 \sum_{k=0}^{L-1-n} h_k h_{k+n}. \quad (256)$$

A seguir mostraremos que

$$a_{2n} = 0. \quad (257)$$

De (255), temos

$$\begin{aligned}
 |m_o(\xi + \pi)|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} (-1)^n a_n \cos(n\xi) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L/2-1} a_{2n} \cos(2n\xi) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L/2} a_{2n-1} \cos[(2n-1)\xi] \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} a_n \cos n\xi \right) + \sum_{n=1}^{L/2} a_{2n} \cos(2n\xi) \\
 &= 1 - |m_o(\xi)|^2 + \sum_{n=1}^{L/2} a_{2n} \cos(2n\xi) \\
 &= |m_o(\xi + \pi)|^2 + \sum_{n=1}^{L/2} a_{2n} \cos(2n\xi),
 \end{aligned}$$

na última igualdade usamos (253). Logo,

$$\sum_{n=1}^{L/2} a_{2n} \cos(2n\xi) = 0,$$

para todo ξ , o que implica (257). Portanto, (255) pode ser re-escrita como

$$|m_o(\xi)|^2 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{L-1} a_{2k-1} \cos(2k-1)\xi. \quad (258)$$

Note que

$$r_l = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-l)\phi'(x)dx \quad (259)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi)|\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-i\xi l} d\xi, \quad (260)$$

onde

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \phi(x) dx.$$

Proposição 14.2. *Se as integrais (259) e (260) existirem, então os coeficientes r_l satisfazem o seguinte sistema de equações algébricas lineares*

$$r_l = 2 \left[r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}) \right] \quad (261)$$

e

$$\sum_l l r_l = -1. \quad (262)$$

Se $M \geq 2$, então as equações (261) e (262) têm solução única com um número finito de r_l não-zeros, ou seja, $r_l \neq 0$, para $-L+2 \leq l \leq L-2$ e

$$r_l = -r_{-l}. \quad (263)$$

Prova. Da relação (246) podemos re-escrever

$$r_i = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-i)\phi'(x)dx = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} h_k h_l r_{2i+k-l}. \quad (264)$$

Como $k, l = 0, 1, \dots, L-1$, então, $k-l = -L+1, -L+2, \dots, L-1$. Portanto, podemos re-escrever (279) como

$$\begin{aligned} r_i &= 2 \sum_{n=-L+1}^{L-1} \left(\sum_{\substack{k, l=0, \\ k-l=n}}^{L-1} h_k h_l \right) r_{2i+n} \\ &= 2 \left(\sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 \right) r_{2i} \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{L-1} \left[\left(\sum_{\substack{k, l=0, \\ k-l=n}}^{L-1} h_k h_l \right) r_{2i+n} + \left(\sum_{\substack{k, l=0, \\ k-l=-n}}^{L-1} h_k h_l \right) r_{2i-n} \right] \\ &= 2r_{2i} + 2 \sum_{n=1}^{L-1} \left[\left(\sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+n} \right) r_{2i+n} + \left(\sum_{k=0}^{L-1} h_k h_{k+n} \right) r_{2i-n} \right] \\ &= 2r_{2i} + 2 \sum_{n=1}^{L-1} \left[\left(\sum_{l=0}^{L-1-n} h_l h_{l+n} \right) r_{2i+n} + \left(\sum_{k=0}^{L-1-n} h_k h_{k+n} \right) r_{2i-n} \right] \\ &= 2r_{2i} + 2 \sum_{n=1}^{L-1} a_n (r_{2i+n} + r_{2i-n}) \\ &= 2r_{2i} + 2 \sum_{n=1}^{L-1} a_{2n-1} (r_{2i+2n-1} + r_{2i-2n+1}), \end{aligned} \quad (265)$$

na última igualdade usamos que $a_{2n} = 0$.

Na construção de wavelets no intervalo, veja Seção ??, vimos que para cada $m = 0, \dots, M - 1$, se fizermos $C_l \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^l \phi(x) dx$, temos a seguinte relação

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} l^m \phi(x - l - M + 1) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (-1)^l C_l (x - M + 1)^{m-l}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x - M + 1$ e depois trocando o y por x e lembrando que $C_0 = 1$, temos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} l^m \phi(x - l) = x^m + \sum_{l=1}^m \binom{m}{l} (-1)^l C_l x^{m-l}, \quad m = 0, \dots, M - 1. \quad (266)$$

Fazendo $m = 1$ em (266), temos

$$\sum_l l \phi(x - l) = x - C_1.$$

Multiplicando-se esta equação por $\phi'(x)$ e integrando de $-\infty$ a ∞ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x \phi'(x) dx - C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_l l \phi(x - l) \phi'(x) \right) dx \\ &= \sum_l l \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - l) \phi'(x) dx \\ &\equiv \sum_l l r_l. \end{aligned}$$

Como ϕ tem suporte compacto, nas somas sobre l acima temos apenas um número finito de l 's.

Em virtude de ϕ ter suporte compacto, segue-se que $|x\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} = 0$ e $|\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Além disso, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$, logo,

$$\begin{aligned} \sum_l l r_l &= \int_{-\infty}^{\infty} x \phi'(x) dx - C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) dx \\ &= |x\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx - C_1 |\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} \\ &= -1, \end{aligned}$$

o que prova (262).

Se $M \geq 2$, então segue-se do Lemma 3.2 de [4] que

$$|\hat{\phi}(\xi)|^2 |\xi| \leq C(1 + |\xi|)^{-M + \log_2 B},$$

onde

$$B = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |Q(e^{i\xi})|.$$

Em virtude de (254), temos $\log_2 B = M - 1 - \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Portanto,

$$|\hat{\phi}(\xi)|^2 |\xi| \leq C(1 + |\xi|)^{-1-\epsilon},$$

o que assegura que a integral (260) seja absolutamente convergente, o que assegura a existência da solução dos sistema de equações diferenciais (261) e (262). Como a função escala ϕ tem suporte compacto, existe somente um número finito de coeficientes r_l não-nulos. O intervalo específico $-L + 2 \leq l \leq L - 2$ é obtido através de exame direto de (261).

Mostraremos que

$$\sum_l r_l = 0. \quad (267)$$

Sejam

$$\begin{aligned} \hat{r}(\xi) &= \sum_l r_l e^{il\xi} \\ \hat{r}_{even}(\xi/2) &= \sum_l r_{2l} e^{il\xi} \\ \hat{r}_{odd}(\xi/2) &= \sum_l r_{2l+1} e^{i(2l+1)\xi/2}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} 2\hat{r}_{even}(\xi/2) &= \hat{r}(\xi/2) + \hat{r}(\xi/2 + \pi) \\ 2\hat{r}_{odd}(\xi/2) &= \hat{r}(\xi/2) - \hat{r}(\xi/2 + \pi). \end{aligned}$$

Multiplicando (261) por $e^{il\xi}$ e somando-se sobre l , temos

$$\begin{aligned} \hat{r}(\xi) &= \sum_l r_l e^{il\xi} \\ &= 2 \left[\sum_l r_{2l} e^{il\xi} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left(\sum_l r_{2l-2k+1} e^{il\xi} + \sum_l r_{2l+2k-1} e^{il\xi} \right) \right] \\ &= 2 \sum_l r_{2l} e^{i2l\frac{\xi}{2}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left(e^{i(2k-1)\frac{\xi}{2}} \sum_l r_{2l-2k+1} e^{i(2l-2k+1)\frac{\xi}{2}} + e^{-i(2k-1)\frac{\xi}{2}} \sum_l r_{2l+2k-1} e^{i(2l+2k-1)\frac{\xi}{2}} \right) \\ &= 2 \sum_l r_{2l} e^{i2l\frac{\xi}{2}} + \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left(e^{i(2k-1)\frac{\xi}{2}} \sum_l r_{2l+1} e^{i(2l+1)\frac{\xi}{2}} + e^{-i(2k-1)\frac{\xi}{2}} \sum_l r_{2l-1} e^{i(2l-1)\frac{\xi}{2}} \right) \\ &= 2\hat{r}_{even}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left(e^{i(2k-1)\frac{\xi}{2}} + e^{-i(2k-1)\frac{\xi}{2}} \right) \hat{r}_{odd}(\xi) \\ &= 2\hat{r}_{even}\left(\frac{\xi}{2}\right) + 2\hat{r}_{odd}(\xi) \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \cos\left((2k-1)\frac{\xi}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
 \hat{r}(\xi) &= 2 \left[\hat{r}_{even}(\xi/2) + \hat{r}_{odd}(\xi/2) \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \cos((2k-1)\xi/2) \right] \\
 &= 2\hat{r}_{even}(\xi/2) + 2\hat{r}_{odd}(\xi/2) (2|m_o(\xi/2)|^2 - 1) \\
 &= \hat{r}(\xi/2) + \hat{r}(\xi/2 + \pi) + (\hat{r}(\xi/2) - \hat{r}(\xi/2 + \pi)) (2|m_o(\xi/2)|^2 - 1) \\
 &= 2\hat{r}(\xi/2) |m_o(\xi/2)|^2 + 2\hat{r}(\xi/2 + \pi) (1 - |m_o(\xi/2)|^2) \\
 &= 2\hat{r}(\xi/2) |m_o(\xi/2)|^2 + 2\hat{r}(\xi/2 + \pi) |m_o(\xi/2 + \pi)|^2.
 \end{aligned} \tag{268}$$

Portanto, fazendo-se $\xi = 0$ em (268), como $m_o(0) = 1$ e $m_o(\pi) = 0$, temos

$$\hat{r}(0) = 2\hat{r}(0),$$

portanto,

$$\hat{r}(0) = 0,$$

o que mostra (267).

Note que $\hat{\phi}(-\xi) = \overline{\hat{\phi}(\xi)}$, portanto, $|\hat{\phi}(\xi)| = |\hat{\phi}(-\xi)|$. Logo,

$$\begin{aligned}
 r_{-l} &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{il\xi} d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) |\hat{\phi}(-\xi)|^2 e^{il\xi} d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi) |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-il\xi} d\xi, \quad (\text{substituindo } -\xi \text{ por } \xi) \\
 &= -r_l.
 \end{aligned}$$

A unicidade da solução de (261) e (262), segue da unicidade da representação do operador $\frac{d}{dx}$. \square

Note que

$$\begin{aligned}
 (T_j f)(x) &= (P_j T P_j f)(x) = \sum_k \langle \phi_{j,k}, T P_j f \rangle \phi_{j,k}(x) \\
 &= \sum_k \langle \phi_{j,k}, T \sum_l \langle \phi_{j,l}, f \rangle \phi_{j,l} \rangle \phi_{j,k}(x) \\
 &= \sum_k \sum_l \langle \phi_{j,k}, T \phi_{j,l} \rangle \langle \phi_{j,l}, f \rangle \phi_{j,k}(x) \\
 &= \sum_k \left(\sum_l r_{k-l}^j f_l^j \right) \phi_{j,k}(x) \\
 &= \sum_k \left(\sum_{l'} r_{l'}^j f_{k-l'}^j \right) \phi_{j,k}(x) \\
 &= \sum_k \left(\sum_l r_l^j f_{k-l}^j \right) \phi_{j,k}(x) \\
 &= \sum_k 2^{-j} \left(\sum_l r_l f_{k-l}^j \right) \phi_{j,k}(x),
 \end{aligned}$$

onde

$$f_{k-l}^j = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(2^{-j}x - k + l) dx.$$

A seguir calcularemos os r_l 's. Para isso partiremos da seguinte relação para $|m_o(\xi)|^2$ que pode ser encontrada na Seção 11, veja também equação 4.22, página 978, de [4].

$$|m_o(\xi)|^2 = 1 - c_{2M-1}^{-1} \int_0^\xi \text{sen}^{2M-1} \xi d\xi,$$

onde

$$c_{2M-1} = \int_0^\pi \text{sen}^{2M-1} \xi d\xi.$$

Note que

$$\begin{aligned}
 c_{2M-1} &= \int_0^\pi \text{sen}^{2M-2} \xi \text{sen} \xi d\xi \\
 &= -[\cos \xi \text{sen}^{2M-2} \xi]_0^\pi + 2(M-1) \int_0^\pi \cos^2 \xi \text{sen}^{2M-3} \xi d\xi \\
 &= 2(M-1) \int_0^\pi (1 - \text{sen}^2 \xi) \text{sen}^{2M-3} \xi d\xi \\
 &= 2(M-1)(c_{2M-3} - c_{2M-1}).
 \end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte relação

$$c_{2M-1} = \frac{2(M-1)}{(2M-1)} c_{2M-3}.$$

Iterando esta relação l vezes, teremos

$$c_{2M-1} = 2^l \frac{(M-1)(M-2)(M-3)\dots(M-l)}{(2M-1)(2M-3)(2M-5)\dots(2M-2l+1)} c_{2M-2l+1}.$$

Fazendo $l = M - 1$ e tendo em vista que $c_1 = 2$, temos

$$c_{2M-1} = 2^l \frac{(M-1)(M-2)(M-3)\dots 1}{(2M-1)(2M-3)(2M-5)\dots 3} = \frac{[(M-1)!]^2 2^{2M-1}}{(2M-1)!}.$$

A seguir, note que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^{2M-1}\xi &= \left[\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} \right]^{2M-1} \\
 &= i \frac{(-1)^M}{2^{2M-1}} (e^{i\xi} - e^{-i\xi})^{2M-1} \\
 &= i \frac{(-1)^M}{2^{2M-1}} \sum_{m=0}^{2M-1} \binom{2M-1}{m} (-1)^m e^{i(2M-2m-1)\xi} \\
 &= -\frac{(-1)^M}{2^{2M-1}} \sum_{m=0}^{2M-1} \binom{2M-1}{m} (-1)^m \operatorname{sen}(2M-2m-1)\xi \\
 &= \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=-M+1}^M \binom{2M-1}{M-l} (-1)^{l-1} \operatorname{sen}(2l-1)\xi, \quad (l = M-m) \\
 &= \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=1}^M \binom{2M-1}{M-l} (-1)^{l-1} \operatorname{sen}(2l-1)\xi \\
 &\quad + \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=-M+1}^0 \binom{2M-1}{M-l} (-1)^{l-1} \operatorname{sen}(2l-1)\xi \\
 &= \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=1}^M \binom{2M-1}{M-l} (-1)^{l-1} \operatorname{sen}(2l-1)\xi \\
 &\quad - \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=0}^{M-1} \binom{2M-1}{M+l} (-1)^{l-1} \operatorname{sen}(2l+1)\xi, \quad (-l \rightarrow l) \\
 &= \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=1}^M \binom{2M-1}{M-l} (-1)^{l-1} \operatorname{sen}(2l-1)\xi \\
 &\quad - \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=1}^M \binom{2M-1}{M+l-1} (-1)^l \operatorname{sen}(2l-1)\xi, \quad (-l \rightarrow l) \\
 &= \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=1}^M \left[\binom{2M-1}{M-l} + \binom{2M-1}{M+l-1} \right] (-1)^{l-1} \operatorname{sen}(2l-1)\xi \\
 &= \frac{1}{2^{2M-1}} \sum_{l=1}^M \frac{2(2M-1)!}{(M-l)!(M+l-1)!} (-1)^{l-1} \operatorname{sen}(2l-1)\xi.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^{2M-1}\xi = \frac{(2M-1)!}{4^{M-1}} \sum_{l=1}^M \frac{(-1)^{l-1}}{(M-l)!(M+l-1)!} \operatorname{sen}(2l-1)\xi. \quad (269)$$

De (269), temos

$$c_{2M-1} = \int_0^\pi \text{sen}^{2M-1} \xi \, d\xi = 2 \frac{(2M-1)!}{4^{M-1}} \sum_{l=1}^M \frac{(-1)^{l-1}}{(M-l)!(M+l-1)!(2l-1)}$$

e

$$\begin{aligned} |m_o(\xi)|^2 &= 1 - c_{2M-1}^{-1} \int_0^\xi \text{sen}^{2M-1} d\xi \\ &= 1 + c_{2M-1}^{-1} \left[\frac{(2M-1)!}{4^{M-1}} \sum_{l=1}^M \frac{(-1)^{l-1}}{(M-l)!(M+l-1)!(2l-1)} (\cos(2l-1)\xi - 1) \right] \\ &= 1 + c_{2M-1}^{-1} \left[\frac{(2M-1)!}{4^{M-1}} \sum_{l=1}^M \frac{(-1)^{l-1}}{(M-l)!(M+l-1)!(2l-1)} \cos(2l-1)\xi - \frac{c_{2M-1}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M \frac{(-1)^{l-1} [(2M-1)!]^2}{[(M-1)!]^2 (M-l)!(M+l-1)!(2l-1) [4^{M-1}]^2} \cos(2l-1)\xi. \quad (270) \end{aligned}$$

Comparando (270) com (258), temos

$$a_{2l-1} = \frac{(-1)^{l-1} [(2M-1)!]^2}{[(M-1)!]^2 (M-l)!(M+l-1)!(2l-1) [4^{M-1}]^2}, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (271)$$

Note que para $M = 2$, segue-se de (271) que

$$a_1 = \frac{9}{8} \quad e \quad a_3 = -\frac{1}{8}.$$

Portanto, lembrando-se que $-2 \leq l \leq 2$ e que $r_{-l} = -r_l$ (em particular, $r_o = 0$), segue-se de (261) e (262), respectivamente que

$$r_1 = -8r_2 \quad e \quad r_1 + 2r_2 = -\frac{1}{2},$$

portanto, $r_1 = -\frac{2}{3}$ e $r_2 = \frac{1}{12}$.

Para $M = 3, 4, 5$ e 6 , os valores exatos de r_n podem ser encontrados em [6], por exemplo, para $M = 3$ e 4 , temos

$$M = 3: \quad r_1 = -\frac{272}{365} \quad r_2 = \frac{53}{365} \quad r_3 = -\frac{16}{1095} \quad r_4 = -\frac{1}{2920}$$

$$M = 4: \quad r_1 = -\frac{39296}{49553} \quad r_2 = \frac{76113}{396424} \quad r_3 = -\frac{1664}{49553} \quad r_4 = -\frac{2645}{1189272} \quad r_5 = \frac{128}{743295} \quad r_6 = -\frac{1}{1189272}$$

14.3 O operador $\frac{d^n}{dx^n}$ na base de wavelets

Note que

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,i}, \frac{d^n}{dx^n} \phi_{j,l} \rangle &\equiv 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-j}x - i) \frac{d^n}{dx^n} \phi(2^{-j}x - l) dx \\ &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y - (l - i)) \frac{d^n}{dy^n} \phi(y) dy \\ &\equiv 2^{-j} r_{l-i}^{(n)}. \end{aligned}$$

Portanto, da mesma forma que o operador $\frac{d}{dx}$, na forma não-padrão o operador $\frac{d^n}{dx^n}$ também é completamente determinado pela sua representação no subespaço V_o , ou seja,

$$r_l^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - l) \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) dx, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (272)$$

ou, equivalentemente,

$$r_l^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi)^n |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-il\xi} d\xi, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (273)$$

se as integrais em (272) e (273) existirem.

Proposição 14.3. *Se as integrais em (272) e (273) existirem, então, os coeficientes $r_l^{(n)}$, $l \in \mathbb{Z}$ satisfazem o seguinte sistema de equações algébricas*

$$r_l^{(n)} = 2^n \left[r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left(r_{2l-2k+1}^{(n)} + r_{2l+2k-1}^{(n)} \right) \right], \quad (274)$$

e

$$\sum_l l^n r_l^{(n)} = (-1)^n n!, \quad (275)$$

onde os a_{2k-1} são dados por (256).

Se $M \geq (n+1)/2$ e as integrais em (272) e (273) existirem, então as equações (274) e (275) têm uma única solução com um número finito de coeficientes não-nulos, ou seja, $r_l^{(n)} \neq 0$, para $-L+2 \leq l \leq L-2$. Além disso,

$$r_{-l}^{(n)} = (-1)^n r_l^{(n)}, \quad (276)$$

$$\sum_l r_l^{(n)} = 0. \quad (277)$$

e para $k = 1, \dots, n-1$

$$\sum_l l^k r_l^{(n)} = 0. \quad (278)$$

Prova. Da relação (246) podemos re-escrever

$$r_i^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-i) \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) dx = 2^n \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} h_k h_l r_{2i+k-l}^{(n)}. \quad (279)$$

Para concluir a demonstração de (274), basta proceder como no caso em que $n = 1$

Note que (276) segue de (273), da qual temos que

$$r_{-l}^{(n)} = (-1)^n r_l^{(n)}.$$

Multiplicando (266) por $\frac{d^n}{dx^n} \phi(x)$ e integrando a equação resultante de $-\infty$ a ∞ , segue-se que para todo $m = 0, 1, \dots, M-1$,

$$\sum_l x^m r_l^{(n)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} l^m \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-l) \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) dx \quad (280)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^m \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) dx \quad (281)$$

$$+ \sum_{l=1}^m \binom{m}{l} (-1)^l C_l \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-l} \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) dx. \quad (282)$$

Mas se $k < n$, fazendo-se integrações por partes, tendo em vista que os termos de fronteiras se anulam, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) dx &= (-1)^k k! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \phi(x) dx \\ &= \begin{cases} (-1)^k k! \left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} \phi(x) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0, & \text{se } k < n, \\ (-1)^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = (-1)^n n!, & \text{se } k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, se $m \leq n$,

$$\sum_l x^m r_l^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ (-1)^n n!, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

o que nos dá (275) e (278).

Note que de (273), temos

$$\begin{aligned}
r_l^{(n)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi)^n |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-il\xi} d\xi \\
&= (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-il\xi} d\xi \\
&= \sum_k (-i)^n \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \xi^n |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-il\xi} d\xi \\
&= \sum_k (-i)^n \int_0^{2\pi} (\xi + 2k\pi)^n |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 e^{-il\xi} d\xi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_k (-i)^n (\xi + 2k\pi)^n |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 \right) e^{-il\xi} d\xi \\
&\equiv \int_0^{2\pi} \hat{r}(\xi) e^{-il\xi} d\xi, \tag{283}
\end{aligned}$$

onde

$$\hat{r}(\xi) \equiv \sum_k (-i)^n (\xi + 2k\pi)^n |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2. \tag{284}$$

De (283), segue-se que

$$\hat{r}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_l r_l^{(n)} e^{il\xi}.$$

Substituindo a relação

$$\hat{\phi}(\xi) = m_o(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2)$$

em (284), somando-se sobre os índices pares e ímpares separadamente e lembrando que

$m_o(\xi)$ é periódica com período 2π , temos

$$\begin{aligned}
 \hat{r}(\xi) &= \sum_k (-i)^n (\xi + 2k\pi)^n |m_o(\xi/2 + k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\xi/2 + k\pi)|^2 \\
 &= \sum_k (-i)^n (\xi + 4k\pi)^n |m_o(\xi/2 + 2k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\xi/2 + 2k\pi)|^2 \\
 &\quad + \sum_k (-i)^n (\xi + 2(2k+1)\pi)^n |m_o(\xi/2 + (2k+1)\pi)|^2 |\hat{\phi}(\xi/2 + (2k+1)\pi)|^2 \\
 &= 2^n \sum_k (-i)^n (\xi/2 + 2k\pi)^n |m_o(\xi/2 + 2k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\xi/2 + 2k\pi)|^2 \\
 &\quad + 2^n \sum_k (-i)^n (\xi/2 + (2k+1)\pi)^n |m_o(\xi/2 + 2k\pi + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\xi/2 + (2k+1)\pi)|^2 \\
 &= 2^n |m_o(\xi/2)|^2 \sum_k (-i)^n (\xi/2 + 2k\pi)^n |\hat{\phi}(\xi/2 + 2k\pi)|^2 \\
 &\quad + 2^n |m_o(\xi/2 + \pi)|^2 \sum_k (-i)^n (\xi/2 + \pi + 2k\pi)^n |\hat{\phi}(\xi/2 + \pi + 2k\pi)|^2 \\
 &= 2^n (|m_o(\xi/2)|^2 \hat{r}(\xi/2) + |m_o(\xi/2 + \pi)|^2 \hat{r}(\xi/2 + \pi)).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{r}(\xi) = 2^n (|m_o(\xi/2)|^2 \hat{r}(\xi/2) + |m_o(\xi/2 + \pi)|^2 \hat{r}(\xi/2 + \pi)). \quad (285)$$

Tomando-se $\xi = 0$ em (285) e lembrando que $m_o(0) = 1$ e $m_o(\pi) = 0$, temos

$$\hat{r}(0) = 2^n \hat{r}(0) \Rightarrow \hat{r}(0) = 0,$$

logo,

$$\sum_l r_l^{(n)} = 2\pi \hat{r}(0) = 0,$$

o que prova (277). □

Para a wavelet de Daubechies com $M = 2$, vimos que $a_1 = \frac{9}{8}$ e $a_3 = -\frac{1}{8}$, portanto, para $n = 2$, (274) e (275) são equivalentes a

$$r_1 + 4r_2 = 0 \quad e \quad r_1 + 4r_2 = 1,$$

respectivamente, que não tem solução.

Ainda para a wavelet de Daubechies com $M = 2$, para $n = 3$, (274) e (275) são equivalentes a

$$r_1 + 2r_2 = 0 \quad e \quad r_1 + 8r_2 = -3,$$

respectivamente, ou seja,

$$r_{-2} = -\frac{1}{2}, \quad r_{-1} = 1, \quad r_0 = 0, \quad r_1 = -1, \quad r_2 = \frac{1}{2}.$$

Observação 14.1. Se definirmos o operador M_o sobre funções periódicas de período 2π como

$$(M_o f)(\xi) = 2^n (|m_o(\xi/2)|^2 f(\xi/2) + |m_o(\xi/2 + \pi)|^2 f(\xi/2 + \pi)), \quad (286)$$

então (285), pode ser re-escrita como

$$M_o \hat{r} = 2^{-n} \hat{r},$$

logo, \hat{r} é um autovetor de M_o correspondente ao autovalor 2^{-n} . Portanto, encontrar uma representação de derivadas na base de wavelets é equivalente a encontrar soluções polinomiais trigonométricas de (286) e vice-versa.

14.4 Operadores de Convolução

Suponha que

$$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)f(y)dy.$$

A seguir, calcularemos $P_j T P_j$ que é a projeção de T sobre V_j .

Dados $i, l \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} r_{i,m}^j &\equiv \langle \phi_{j,i}, T \phi_{j,m} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,i}(x) (T \phi_{j,m})(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,i}(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \phi_{j,m}(y) dy \right) dx \\ &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^{-j}x - i) K(x-y) \phi(2^{-j}y - m) dy dx \\ &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) K(2^j(-(y-x) + (i-m))) dx \right) \phi(y) dy, \quad (2^{-j}x - i \rightarrow x, 2^{-j}y - m \rightarrow y) \\ &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-w) K(2^j(l-w)) dw \right) \phi(y) dy, \quad (y-x = w, i-m = l) \\ &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-w) \phi(y) dy \right) K(2^j(l-w)) dw \\ &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) K(2^j(l-w)) dw, \end{aligned}$$

portanto,

$$r_l^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) K(2^j(l-w)) dw, \quad (287)$$

onde a autocorrelação da função escala ϕ , denotada por Φ , é definida como

$$\Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-w)\phi(y)dy. \quad (288)$$

Observação 14.2. *A autocorrelação de uma função com suporte compacto, tem suporte compacto; ou seja, se $\text{supp } \phi = [\alpha, \beta]$, então, o $\text{supp } \Phi \subset [\alpha - \beta, \beta - \alpha]$.*

Prova. Como $\phi(y) = 0$ fora do intervalo $[\alpha, \beta]$, então, na integral (288) podemos nos restringir a este intervalo. Por outro lado, $\phi(y-w)$, se anula fora do intervalo $\alpha \leq y-w \leq \beta$, ou seja, podemos assumir que $\alpha + w \leq y \leq \beta + w$. Assim, devemos ter

$$\alpha \leq y \leq \beta \quad e \quad \alpha + w \leq y \leq \beta + w.$$

Em particular, se w for tal que $\alpha + w > \beta$ ou $\beta + w < \alpha$, $\Phi(w) = 0$. Portanto, o suporte de $\Phi(w)$ está contido no intervalo $[\alpha - \beta, \beta - \alpha]$. \square

Para a função escala de Haar,

$$\Phi(w) = \begin{cases} 1 - |w|, & \text{se } -1 \leq w \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 14.1. *A função Φ tem as seguintes propriedades:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w)dw = 1 \quad (289)$$

e

$$\mathcal{M}_{\Phi}^m = \int_{-\infty}^{\infty} w^m \Phi(w)dw = 0, \quad \text{para } 1 \leq m \leq 2M - 1. \quad (290)$$

Prova. Note que (289) segue imediatamente, visto que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(w)dw = 1$.

Note que

$$|\hat{\phi}(\xi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw\xi} \Phi(w)dw,$$

portanto,

$$\left[\left(\frac{1}{i} \partial_{\xi} \right)^m |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w^m \Phi(w)dw,$$

logo, basta mostrarmos que

$$\left[\left(\frac{1}{i} \partial_{\xi} \right)^m |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} = 0, \quad 1 \leq m \leq 2M - 1. \quad (291)$$

mas

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{1}{i} \partial_\xi \right)^m |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} &= \left[\left(\frac{1}{i} \partial_\xi \right)^m \left(|\hat{\phi}(\xi/2)|^2 |m_o(\xi/2)|^2 \right) \right]_{\xi=0} \\
 &= \frac{2^{-2m}}{i^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left[\frac{d^k}{d\xi^k} |m_o(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} \left[\frac{d^{m-k}}{d\xi^{m-k}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} \\
 &= 2^{-2m} \left[\left(\frac{1}{i} \partial_\xi \right)^m \frac{d^m}{d\xi^m} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} \\
 &\quad - \frac{2^{-2m}}{i^m} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \left[\frac{d^k}{d\xi^k} (1 - |m_o(\xi + \pi)|^2) \right]_{\xi=0} \left[\frac{d^{m-k}}{d\xi^{m-k}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} \\
 &= 2^{-2m} \left[\left(\frac{1}{i} \partial_\xi \right)^m \frac{d^m}{d\xi^m} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} \\
 &\quad - \frac{2^{-2m}}{i^m} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \left[\frac{d^k}{d\xi^k} |m_o(\xi + \pi)|^2 \right]_{\xi=0} \left[\frac{d^{m-k}}{d\xi^{m-k}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\left[\left(\frac{1}{i} \partial_\xi \right)^m |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0} = \frac{2^{-2m}}{(1 + 2^{-2m})i^m} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \left[\frac{d^k}{d\xi^k} |m_o(\xi + \pi)|^2 \right]_{\xi=0} \left[\frac{d^{m-k}}{d\xi^{m-k}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 \right]_{\xi=0}.$$

Logo, (290) será verdadeira se

$$\left[\frac{d^k}{d\xi^k} |m_o(\xi + \pi)|^2 \right]_{\xi=0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, 2M - 1. \quad (292)$$

Da relação $m_o(\xi) = [\frac{1}{2}(1 + e^{i\xi})]^m Q(e^{i\xi})$, temos

$$|m_o(\xi)|^2 = \frac{1}{2^{2M-1}} (1 + \cos \xi)^{2M} |Q(e^{i\xi})|^2 \Rightarrow |m_o(\xi + \pi)|^2 = \frac{1}{2^{2M-1}} (1 - \cos \xi)^{2M} |Q(-e^{i\xi})|^2,$$

o que implica (292), o que conclui a demonstração do Lema. \square

Dada uma escala mais fina, digamos, j_o , então de (287), (289) e (289), se expandirmos $K(2^{j_o}(l - w))$ em torno de $2^{j_o}l$, ou seja,

$$\begin{aligned}
 K(2^{j_o}(l - w)) &= K(2^{j_o}l) - 2^{j_o} K'(2^{j_o}l)w + 2^{2j_o-1} K''(2^{j_o}l)w^2 - \dots - 2^{(2M-1)j_o} K^{(2M-1)}(2^{j_o}l)w^{2M-1} \\
 &\quad + R_{2M}^l(c), \quad R_{2M}^l(c) = 2^{2Mj_o} \frac{R^{(2M)}(c)w^{2M}}{(2M)!}, \quad c \text{ entre } 2^{j_o}l \text{ e } 2^{j_o}(l - w),
 \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
 r_l^{j_o} &= 2^{j_o} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) K(2^{j_o}(l - w)) dw \\
 &= 2^{j_o} K(2^{j_o}l) + \frac{2^{-2M|j_o|}}{(2M)!} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) R_{2M}^l(c) w^{2M} dw. \quad (293)
 \end{aligned}$$

Nas aplicações deveremos mostrar que a segunda parcela de (293) é suficientemente pequena para $|j_o| \gg 1$, portanto, $r_l^{j_o} \approx 2^{j_o} K(2^{j_o} l)$.

Para obtermos r_l^j para $j > j_o$, basta notarmos que

$$\begin{aligned} r_l^j &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) K(2^j(l-w)) dw \\ &= 2^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w/2) K(2^{j-1}(2l-w)) dw. \end{aligned}$$

Por outro lado, de (288) e de (246), temos

$$\Phi(w/2) = \sum_{k,n=0}^{L-1} h_k h_n \Phi(w+k-n),$$

portanto,

$$\begin{aligned} r_l^j &= \sum_{k,n=0}^{L-1} h_k h_n 2^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w+k-n) K(2^{j-1}(2l-w)) dw \\ &= \sum_{k,n=0}^{L-1} h_k h_n 2^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) K(2^{j-1}(2l+k-n-w)) dw \\ &= \sum_{k,n=0}^{L-1} h_k h_n t_{2l+k-n}^{j-1}, \end{aligned}$$

o que reduz-se a

$$r_l^j = r_{2l}^{j-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1}^{j-1} + r_{2l+2k-1}^{j-1}). \quad (294)$$

Observação 14.3. Note que (258) e de (292), para $1 \leq m \leq M-1$,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\left(\frac{1}{i} \partial_\xi |m_o(\xi)|^2 \right)^{2m} \right]_{\xi=0} \\ &= \left[\left(\frac{1}{i} \partial_\xi \right)^{2m} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \cos(2k-1)\xi \right) \right]_{\xi=0} \\ &= \frac{1}{2i^{2m}} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (2k-1)^{2m} \left[\frac{d^{2m}}{du^{2m}} \cos u \right]_{u=0} \\ &= \frac{(-1)^m}{2i^{2m}} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (2k-1)^{2m}, \end{aligned}$$

pois, $\left[\frac{d^{2m}}{du^{2m}} \cos u \right]_{u=0} = (-1)^m$. Ou seja,

$$\sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (2k-1)^{2m} = 0, \text{ para } 1 \leq m \leq M-1.$$

14.4.1 A Transformada de Hilbert

A transformada de Hilbert é definida como

$$g(x) = (\mathcal{H}f)(y) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-R}^{x-\epsilon} \frac{f(s)}{s-x} ds + \int_{x+\epsilon}^R \frac{f(s)}{s-x} ds \right).$$

Note que para a transformada de Hilbert, $K(u) = -\frac{1}{\pi u}$, portanto, de (287),

$$r_l^j = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-l} \Phi(y) dy = r_l^0 \equiv r_l, \quad (295)$$

independente de j . Da mesma forma, mostra-se que os demais elementos de matriz α , β e γ são independentes da escala. Assim $\mathcal{H} = \{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $A_j = A_0$, $B_j = B_0$ e $\Gamma_j = \Gamma_0$. Por outro lado, na escala zero, eles estão relacionados ao r_l através das relações

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2i+k-k'}, \\ \beta_i &= \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2i+k-k'}, \\ \gamma_i &= \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2i+k-k'}. \end{aligned}$$

Onde de (294), temos

$$r_l = r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}). \quad (296)$$

com os coeficientes a_{2k-1} dados por (271).

A seguir calcularemos r_l para $|l| \gg 1$.

$$\frac{1}{l-y} = \frac{1}{l} \frac{1}{1-\frac{y}{l}} = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{y}{l} + \dots + \left(\frac{y}{l}\right)^{2M-1} \right) + \frac{1}{l^{2M+1}} \left[\frac{y}{l-c} \right]^{2M}$$

onde c está entre 0 e $\frac{y}{l}$, em particular, como Φ tem suporte compacto, para $|l| \gg 1$ podemos assumir que $1 - c \leq \frac{1}{2}$ e que $l - y$ nunca se anula. Em vista das propriedades de Φ dada no Lema 14.1, temos

$$\begin{aligned} r_l &= \int_{-\infty}^{\infty} K(l - y)\Phi(y)dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l - y}\Phi(y)dy \\ &= -\frac{1}{\pi l} - R_{l,M,\Phi}, \end{aligned} \quad (297)$$

onde

$$|R_{l,M,\Phi}| \leq \frac{1}{l^{2M}} 2^{2M} \max_{y \in \text{supp } \Phi} |\phi(y)y^{2M}| = O\left(\frac{1}{l^{2M}}\right).$$

Ou seja, dado um $\epsilon > 0$, tomamos N tal $|R_{l,M,\Phi}| \leq \epsilon$, com isso obtemos $\frac{1}{\pi l}$, nos dá uma aproximação para r_l para $|l| > N$, com um erro menor do que ϵ . Para valores de l tais que $|l| \leq N$ podemos usar a relação (296).

Re-escrevendo (295) no espaço de Fourier, temos

$$\begin{aligned} r_l &= \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\left(\frac{1}{y-l}\right)}(\xi) \hat{\Phi}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\left(\frac{1}{y-l}\right)}(\xi) |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= -\int_0^{\infty} \text{sen}(l\xi) |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned} \quad (298)$$

onde usamos que

$$\begin{aligned} \widehat{\left(\frac{1}{y-l}\right)}(\xi) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iy\xi} \frac{1}{y-l} dy \\ &= e^{il\xi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{iy\xi}}{y} dy \\ &= 2ie^{il\xi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = i\pi e^{il\xi}. \end{aligned}$$

De (298), segue-se que $r_{-l} = -r_l$, em particular,

$$r_o = 0. \quad (299)$$

Em [6] calcula-se os valores aproximados de r_l , para a wavelet de Daubechies com $M = 6$, para $l = 1, 2, \dots, 16$, com uma precisão de 10^{-7} . Para $|l| > 16$, podemos usar a

aproximação $r_l \approx -\frac{1}{\pi l}$. Os valores são mostrados na tabela abaixo:

l	r_l	l	r_l
1	-0.588303698	9	-0.035367761
2	-0.077576414	10	-0.031830988
3	-0.128743695	11	-0.028937262
4	-0.075063628	12	-0.026525823
5	-0.064168018	13	-0.024485376
6	-0.053041366	14	-0.022736420
7	-0.045470650	15	-0.021220659
8	-0.039788641	16	-0.019894368

14.4.2 Derivadas Fracionárias

Adotaremos a seguinte definição de derivadas fracionárias

$$(\partial_x^\alpha f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-y)_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(y) dy, \quad \alpha \neq 1, 2, \dots$$

onde

$$(w)_+ = \begin{cases} w, & \text{se } w \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função $\Gamma(z)$ é a extensão da função fatorial, ou seja, $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$, a qual é analítica para todo $z \neq 0, -1, -2, \dots$. O resíduo de $\Gamma(z)$ em $z = -k$ é $\frac{(-1)^k}{k!}$. Para $\Re(z) > 0$ ela pode ser definida a partir da seguinte integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

A representação de ∂_x^α em V_0 é determinada pelos coeficientes

$$r_l = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-l) (\partial_x^\alpha \phi)(x) dx, \quad l \in \mathbb{Z},$$

desde que a integral acima exista.

Note que neste caso $K(u) = \frac{(u)_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$, portanto, em (287), temos

$$r_l^j = 2^{-\alpha j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(l-y)_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \Phi(y) dy \equiv 2^{-\alpha j} r_l. \quad (300)$$

O representação na forma não-padrão de $\partial_x^\alpha = \{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é calculada via $A_j = 2^{-\alpha j} A_0$, $B_j = 2^{-\alpha j} B_0$ e $\Gamma_j = 2^{-\alpha j} \Gamma_0$, onde os elementos de matriz α_{i-l} , β_{i-l} e γ_{i-l} são

obtidos a partir dos elementos r_l ,

$$\alpha_i = 2^\alpha \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2i+k-k'} \quad (301)$$

$$\beta_i = 2^\alpha \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2i+k-k'} \quad (302)$$

$$\gamma_i = 2^\alpha \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2i+k-k'}. \quad (303)$$

Por exemplo, para obtermos (301), usamos a definição de ∂_x^α e relação de escala (247), ou seja

$$\begin{aligned} \alpha_i &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-i) (\partial_x^\alpha \psi)(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-i) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-y)_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \psi(y) dy \right) dx \\ &= 2 \sum_{k,k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-2i-k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-y)_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \phi(2y-k') dy \right) dx \\ &= 2^{\alpha-1} \sum_{k,k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-2i-k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x-k'-y)_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \phi(y) dy \right) dx \\ &= 2^\alpha \sum_{k,k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-2i-k+k') \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-y)_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \phi(y) dy \right) dx \\ &= 2^\alpha \sum_{k,k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-(2i+k-k')) (\partial_x^\alpha \phi)(x) dx \\ &= 2^\alpha \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2i+k-k'}, \end{aligned}$$

as relações (302) e (303) são obtidas similarmente.

Os coeficientes r_l 's satisfazem aos seguintes sistemas de equações lineares

$$r_l = 2^\alpha \left[r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}) \right]. \quad (304)$$

Na integral (300), podemos assumir que $y \in [a, b] = \text{Supp } \Phi$. Logo, se $|l| \gg 1$ e l negativo, temos $l-y < 0$, portanto,

$$r_l = 0. \quad (305)$$

Por outro lado, se Logo, se $|l| \gg 1$ e l positivo, $l - y > 0$, portanto,

$$\begin{aligned} (l - y)_+^{-\alpha-1} &= (l - y)^{-\alpha-1} \\ &= l^{-\alpha-1} \left(1 - \frac{y}{l}\right)^{-\alpha-1} \\ &= l^{-\alpha-1} \left(1 + (\alpha - 2)\frac{y}{l} + \dots + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - 2M + 1)}{(2M - 1)!} \left(\frac{y}{l}\right)^{2M-1}\right) \\ &\quad + R_{2M}(\alpha, l, c), \end{aligned}$$

onde

$$R_{2M}(\alpha, l, c) = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - 2M)}{(2M)!} (1 - c)^{\alpha-2M} \left(\frac{y}{l}\right)^{2M},$$

c entre 0 e $\frac{y}{l}$, portanto,

$$\begin{aligned} |R_{2M}(\alpha, l, c)| &\leq \left| \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - 2M)}{(2M)!} \right| \max_{0 \leq c \leq 1/2} (1 - c)^{\alpha-2M} \max_{y \in [a, b]} (y^{2M} |\Phi(y)|) \left| \frac{1}{l^{2M+\alpha+1}} \right| \\ &\equiv C_{M, \alpha} \frac{1}{l^{2M+\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$r_l = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{l^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{l^{1+\alpha+2M}}\right), \tag{306}$$

para l positivo e suficientemente grande.

Em [6] são calculados numericamente os valores de r_l , $-7 \leq l \leq 14$, para $\alpha = 0.5$ para a wavelet de Daubechies, com $M = 6$ com precisão de 10^{-7} .

l	r_l	l	r_l
-7	-2.82831017E - 06	4	-2.77955293E - 02
-6	-1.68623867E - 06	5	-2.61324170E - 02
-5	4.45847796E - 04	6	-1.91718816E - 02
4	-4.346334415E - 03	7	-1.52272841E - 02
-3	2.28821728E - 02	8	-1.24667403E - 02
-2	-8.49883759E - 02	9	-1.04479500E - 02
-1	0.27799963	10	-8.92061945E - 03
0	0.84681966	11	-7.73225246E - 03
1	-0.69847577	12	-6.78614593E - 03
2	2.36400139E - 02	13	-6.01838599E - 03
3	-8.97463780E - 02	14	-5.38521459E - 03

Os coeficientes com $l > 14$ ou $l < -7$ são obtidos usando (306), ou seja,

$$\begin{aligned} r_l &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{l^{1+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{l^{13+\frac{1}{2}}}\right), \quad \text{para } l > 0, \\ r_l &= 0, \quad \text{para } l < 0. \end{aligned}$$

15 A Transformada de Wavelet Contínua

15.1 O Caso Unidimensional

Definição 15.1. Uma função $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo às seguintes condições:

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\psi\| = 1 \quad e \quad (307)$$

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\hat{\psi}(a)|^2}{|a|} da = C_\psi < \infty \quad (\text{condição de admissibilidade}) \quad (308)$$

é chamada de wavelet mãe ou, simplesmente, wavelet.

A condição acima garante a invertibilidade da transformada de wavelet contínua, a qual será definida nesta seção.

Todas as wavelets que ocorrem na prática também estão em $L^1(\mathbb{R})$ e a maioria delas são contínuas (as wavelets de Haar não são!), muitas são diferenciáveis e as wavelets que são mais populares têm suportes compactos.

Teorema 15.1. (Critério para verificar a condição (308)). Para uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfazendo $t\psi \in L^1(\mathbb{R})$, isto é, $\int |t|\psi(t)| dt < \infty$, a condição (307) é equivalente a $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$.

Prova. $t\psi \in L^1$ e $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ implica que $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ ($\|\psi\|_1 \leq \|\psi\|_2 + \|t\psi\|_1$), logo, $\hat{\psi}$ é contínua, portanto, a integral (308) só pode convergir se $\hat{\psi}(0) = 0$. Por outro lado,

$$\frac{\hat{\psi}(\omega + h) - \hat{\psi}(\omega)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(t) e^{-i\omega t} \frac{e^{-ith} - 1}{h} dt \quad (309)$$

como $|\psi(t) e^{-i\omega t} \frac{e^{-ith} - 1}{h}| \leq |\psi(t)| |t|$ ($h \neq 0$) e como por hipóteses $t\psi \in L^1(\mathbb{R})$, segue-se do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que podemos passar o limite quando $h \rightarrow 0$ para dentro da integral na equação (309), logo, $\hat{\psi}'(\omega) = -it\hat{\psi}(\omega)$, como $t\psi \in L^1(\mathbb{R})$, segue-se que $t\hat{\psi}$ é contínua, portanto, $\hat{\psi} \in C^1$. Seja $M = \sup\{|\hat{\psi}'(\omega)| \mid |\omega| \leq 1\}$, então,

$$|\hat{\psi}(\omega)| = |\hat{\psi}(\omega) - \hat{\psi}(0)| = \left| \int_0^\omega \hat{\psi}'(t) dt \right| \leq M|\omega| \quad (|\omega| \leq 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega &\leq \int_{0 < |\omega| \leq 1} M^2 d\omega + \int_{|\omega| \geq 1} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq M^2 + \|\psi\|^2 < \infty \end{aligned}$$

o que prova o teorema. □

Muitas vezes, é frequente exigir-se que ψ tenha um certo número de momentos nulos: $\int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi(x) dx = 0$, $n = 0, 1, \dots, N$. Esta propriedade melhora a eficiência de ψ na detecção de singularidades no sinal, visto que, ela é cega a polinômios de graus até N .

De acordo com o teorema acima, uma wavelet tem média 0. Logo, o gráfico de uma wavelet ψ vive, como a maioria dos gráficos da “ondas” vivem: parcialmente acima e parcialmente abaixo do eixo t . Assim, ψ é uma “ondinha”, que é exatamente a tradução da palavra inglesa “wavelet”.

No que se segue, definiremos $\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi(\frac{t-b}{a})$, onde (a, b) pertencem ao conjunto

$$\mathbb{R}_-^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}.$$

Observação 15.1. *Enfatizamos que a escolha do fator de normalização $|a|^{-\frac{1}{2}}$ não é essencial. Na verdade, usa-se frequentemente o fator $|a|^{-1}$ (normalização L^1). Este fator tem vantagens de dar mais peso às pequenas escalas, isto é, altas frequências (que contêm as singularidades do sinal, caso ele as possua).*

Note que $\|\psi_{a,b}\| = 1$, para todo $(a, b) \in \mathbb{R}_-^2$.

Para uma wavelet ψ fixa, definimos a função

$$Wf(a, b) = \int f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle,$$

chamada transformada de wavelet do sinal $f \in L^2$, em relação a ψ . Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|Wf(a, b)| \leq \|f\|$, para todo $(a, b) \in \mathbb{R}_-^2$, logo, Wf é uniformemente limitada.

Observação 15.2. *Note que se fizermos $\tilde{\psi}_a(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi(-x/a)}$, então,*

$$Wf(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_a(b-x) f(x) dx,$$

logo, podemos ver $Wf(a, b)$ como uma convolução de f com $\tilde{\psi}_a$. Em outras palavras, a transformada de wavelet atua como um filtro com uma função de média zero. Esta propriedade é crucial. De fato, se assumirmos que ψ e $\hat{\psi}$ são bem localizadas quanto possível (mas respeitando o princípio de incerteza de Heisenberg), então, $\psi_{a,b}$ e $\hat{\psi}_{a,b}$ também o serão. Portanto, a transformação $f \rightarrow Wf$ realiza uma filtragem local, ambos no tempo b e na escala a . A transformada $Wf(a, b)$ só não é desprezível quando $\psi_{a,b}$ emparelha o sinal, isto é, a transformada de wavelet seleciona a parte do sinal, caso exista, que vive em torno do tempo b e a escala a .

Como $\widehat{\psi_{a,b}}(\omega) = |a|^{\frac{1}{2}} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(a\omega)$, segue-se da fórmula de Parseval que

$$\begin{aligned} Wf(a, b) &= \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle = \int e^{ib\omega} |a|^{1/2} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ib\omega} F_a(\omega) d\omega \\ &= \hat{F}_a(-b), \end{aligned}$$

onde $F_a(\omega) = |2\pi a|^{1/2} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)}$.

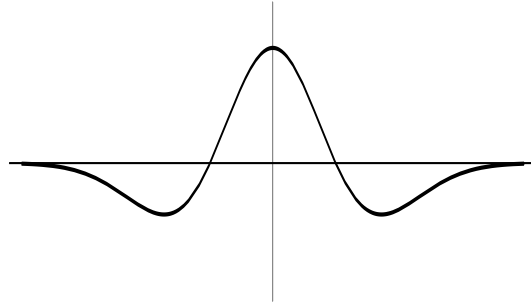


Figura 15: A wavelet chapéu mexicano

Teorema 15.2. Para $a \neq 0$ fixo, a função $Wf(a, b) : b \rightarrow Wf(a, b)$ pode ser vista como a transformada inversa de Fourier de F_a .

Deste resultado-se segue-se que Wf é contínua em linhas horizontais $a = \text{constante}$ e $Wf(a, b) \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \pm\infty$.

15.1.1 Alguns Exemplos de Wavelets

15.1.2 A Wavelet de Haar

Seja $\psi = \psi_{Haar}$ definida através de (??). Note que $\hat{\psi}(0) = \int \psi(t) dt = 0$, como $\|\psi\| = 1$ e $\int |t\psi| dt = \frac{1}{2}$, segue-se do Teorema 15.1 que ψ é uma wavelet.

15.1.3 A Wavelet Chapéu Mexicano

Considere a seguinte função

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-t^2)e^{-t^2/2}, \quad (310)$$

onde o fator numérico ($= \gamma$) é escolhido de modo que $\|\psi\| = 1$. É fácil verificar que $\psi(t) = -\gamma g''(t)$, onde $g(t) = e^{-t^2/2}$ denota a Gaussiana; além disso, $\hat{g} = g$, logo, $\hat{\psi}(\omega) = -\gamma(i\omega)^2\hat{g}(\omega) = \gamma\omega^2e^{-\omega^2/2}$. Em particular, $\hat{\psi}(0) = 0$. Por outro lado, $\int |t\psi(t)| dt = 2\gamma \int_0^\infty t|\psi(t)| dt \leq 2 \int_0^\infty t(t^2+1)e^{-t^2/2} dt = 6\gamma < \infty$, portanto, ψ é uma wavelet.

Observação 15.3. Uma função arbitrária $\psi \in L^2 \cap L^1$, com norma 1, média zero e suporte compacto é automaticamente uma wavelet. Isto segue-se do fato, se $\text{supp } \psi \in [-R, R]$, então, $\|t\psi\|_1 \leq R\|\psi\|_1 < \infty$.

15.1.4 A Fórmula de Inversão

A transformada de wavelet mapeia $f \in L^2(\mathbb{R})$ em funções $Wf : \mathbb{R}_-^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Seja $H = L^2(\mathbb{R}_-^2, d\mu) = L^2\left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{dad b}{|a|^2}\right)$. Munido do produto escalar

$$\langle u, v \rangle_H = \int_{\mathbb{R}_-^2} u(a, b) \overline{v(a, b)} \frac{dad b}{|a|^2},$$

H se torna um espaço de Hilbert.

Teorema 15.3. *Seja ψ uma wavelet arbitrária e W a transformada de wavelet correspondente. Então para toda $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, a seguinte igualdade é verdadeira:*

$$\langle Wf, Wg \rangle_H = C_\psi \langle f, g \rangle. \quad (311)$$

Prova.

$$\begin{aligned} \langle Wf, Wg \rangle_H &= \int_{\mathbb{R}^*} \left(\int_{\mathbb{R}^*} Wf(a, b) \overline{Wg(a, b)} db \right) \frac{da}{|a|^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \int_{\mathbb{R}^*} \widehat{F}_a(-b) \overline{\widehat{G}_a(-b)} db \frac{da}{|a|^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \langle \widehat{F}_a, \widehat{G}_a \rangle \frac{da}{|a|^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \langle F_a, G_a \rangle \frac{da}{|a|^2} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^*} \left(\int_{\mathbb{R}^*} |a| \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} |\widehat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \right) \frac{da}{|a|^2} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^*} \left(\widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} \int_{\mathbb{R}^*} |\widehat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|^2} \right) d\omega. \end{aligned}$$

A integral interna na última linha ($= Q$) é trivialmente 0 quando $\omega = 0$, e para $\omega \neq 0$, a substituição $a = \frac{a'}{\omega}$ ($a' \in \mathbb{R}^*$), $da = \frac{da'}{|\omega|}$ (valor absoluto do Jacobiano!), nos dá para Q o valor

$$Q = \int_{\mathbb{R}^*} |\widehat{\psi}(a')|^2 \frac{da'/|\omega|}{|a'/\omega|} = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da = \frac{1}{2\pi} C_\psi,$$

independentemente de ω . As manipulações formais acima são justificadas pelo Teorema de Fubini. Com isto, concluímos a demonstração do teorema. \square

Agora é claro que se C_ψ fosse infinito, a resolução da identidade (311) não seria verdadeira.

Se fizermos $g = \psi$ em (311), então, pode ser lida como

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_-^2} Wf(a, b) \psi_{a,b}(\cdot) \frac{dad b}{|a|^2} \quad (312)$$

com a convergência da integral “no sentido fraco”, isto é, tomando-se produto escalar de (312) com qualquer função $g \in L^2(\mathbb{R})$, comutando-se o produto interno com a integral sobre a, b , leva-nos a (311).

Pode-se mostrar que a convergência em (311) também ocorre num sentido mais forte e isto é o que pretendo discutir em seguida.

A transformada de wavelet contínua W mapeia $L^2(\mathbb{R}, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_-, d\mu)$, isto significa que uma função f de uma variável real t e levada numa função Wf de duas variáveis a e b , logo, f é representada no espaço de dados

$$(Wf(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}_-^2)$$

com alta redundância. Isto facilita enormemente a reconstrução de f a partir de Wf . De fato, não existe apenas uma fórmula de inversão, como acontece com a transformada de Fourier, mas um número arbitrário de tais fórmulas. Pode-se mostrar que mesmo uma coleção discreta valores tomada apropriadamente, $c_{r,k} = Wf(a_r, b_{r,k})$, é suficiente para recuperar f completamente, em outras palavras, existe uma espécie de Teorema de Shannon para a transformada de wavelet.

A fim de obtermos a fórmula de inversão, precisaremos do seguinte lema de regularização:

Lema 15.1. *Seja $g_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-t^2/2\sigma^2}$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$ contínua no ponto x . Então,*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} (f * g_\sigma)(x) = f(x),$$

onde para toda $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, existe um $h > 0$ (não dependente de σ) tal que

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (|t| \leq h).$$

Como $\int g_\sigma(t) dt = 1$, temos

$$\begin{aligned} |(f * g_\sigma)(x) - f(x)| &= \left| \int (f(x-t) - f(x))g_\sigma(t) dt \right| \\ &\leq \int_{|t| \leq h} |f(x-t) - f(x)|g_\sigma(t) dt + \\ &\quad + \int_{|t| \geq h} (|f(x-t)| + |f(x)|)g_\sigma(t) dt \\ &\leq \epsilon/3 \int_{-h}^h g_\sigma(t) dt + \|f\|_1 g_\sigma(h) + |f(x)| \int_{|t| \geq h} g_\sigma(t) dt, \end{aligned}$$

como $g_\sigma(h)$ e $\int_{|t| \geq h} g_\sigma(t) dt$ tendem a zero quando $\sigma \rightarrow 0^+$, então existe $\sigma_o > 0$, tal que $\sigma < \sigma_o$ implica $|g_\sigma(h)| < \frac{\epsilon}{3}$ e $|\int_{|t| \geq h} g_\sigma(t) dt| < \frac{\epsilon}{3}$, portanto, $|(f * g)(x) - f(x)| < \epsilon$. \square

Como $g_\sigma(t)$ é par e real, então, $(T_x g_\sigma)(t) := g_\sigma(t-x) = g_\sigma(x-t) = \overline{g_\sigma(x-t)}$. Portanto,

$$(f * g_\sigma)(x) = \langle f, T_x g \rangle. \quad (313)$$

Da fórmula (311), temos

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_-^2} Wf(a, b) \langle \psi_{a,b}, g \rangle \frac{dadb}{|a|^2}.$$

Fazendo-se $g = T_x g_\sigma$ na expressão acima, temos

$$\langle f, T_x g_\sigma \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_-^2} Wf(a, b) \langle \psi_{a,b}, T_x g_\sigma \rangle \frac{dadb}{|a|^2},$$

desta expressão e de (313), temos

$$(f * g_\sigma)(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_-^2} Wf(a, b) (\psi_{a,b} * g_\sigma)(x) \frac{dadb}{|a|^2}. \quad (314)$$

Agora, fazendo-se $\sigma \rightarrow 0^+$ em ambos os lados de (314) e usando o Lema 15.1 (passar o limite para dentro da integral de (314) é bastante delicado, veja [1] para uma prova completa), temos a seguinte fórmula para recuperar o sinal f .

Teorema 15.4. *Seja x um ponto de continuidade de f . Sob certas hipóteses em f e ψ , temos a seguinte igualdade:*

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_-^2} Wf(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{dadb}{|a|^2}. \quad (315)$$

Observação 15.4. *A fórmula (315) pode ser vista “abstratamente” dizendo*

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_-^2} Wf(a, b) \psi_{a,b}(\cdot) \frac{dadb}{|a|^2}. \quad (316)$$

Escrita na forma acima, o sinal original f pode ser visto como uma superposição (“combinação linear”) das wavelets $\psi_{a,b}$, onde os valores $Wf(a, b)$ da transformada de wavelet servem como coeficientes.

Existem outras fórmulas de inversão mas não iremos considerá-las aqui.

15.2 A Transformada de Wavelet Contínua em d Dimensões

Existem várias extensões possíveis de (315) para $L^2(\mathbb{R}^d)$, com $d > 1$, na presente discussão, nos restringiremos ao caso bidimensional.

Por definição, uma wavelet é uma função $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, a qual pertence a $L^2(\mathbb{R}^2, d^2\vec{R})$ e satisfaz a seguinte condição de admissibilidade:

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int \frac{d^2\vec{k}}{|\vec{k}|^2} |\hat{\psi}(\vec{k})|^2 < \infty. \quad (317)$$

Se ψ é suficientemente regular ($\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ é suficiente), então, a condição de admissibilidade acima significa que $\hat{\psi}(0) = \int \psi(\vec{x}) d^2\vec{x} = 0$.

(A) Uma possível escolha consiste em tomar-se a wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que ela seja esfericamente simétrica (invariante à rotação). Então, a sua transformada de Fourier também será esfericamente simétrica: $\hat{\psi}(\vec{k}) = \eta(|\vec{k}|)$, e a condição de admissibilidade se torna

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} |\eta(t)|^2 < \infty.$$

Para um sinal $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, a sua transformada de wavelet em relação a ψ é dada por $Wf(a, \vec{b}) = \langle f, \psi_{a, \vec{b}} \rangle$, onde $\psi_{a, \vec{b}}(\vec{x}) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{\vec{x} - \vec{b}}{a}\right)$. Seguindo-se o mesmo raciocínio do caso $1 - D$, pode-se mostrar que se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$, então,

$$\langle f, g \rangle = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{b} Wf(a, \vec{b}) \overline{Wg(a, \vec{b})}. \quad (318)$$

Da mesma forma que no caso unidimensional, obtém-se a seguinte fórmula de inversão,

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{b} Wf(a, \vec{b}) \psi_{a, \vec{b}}. \quad (319)$$

(B) Também é possível escolher ψ que não seja esfericamente simétrica. Neste caso, além da translação e dilatação, também se introduz rotação. Em duas dimensões, definimos,

$$\psi_{a, \vec{b}, \theta}(x) = a^{-1} \psi \left(R_\theta^{-1} \left(\frac{\vec{x} - \vec{b}}{a} \right) \right),$$

onde $a > 0$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ e R_θ é a matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

A condição de admissibilidade então se torna

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta |\hat{\psi}(r\cos\theta, r\sin\theta)|^2 < \infty.$$

Observação 15.5. *O mapeamento*

$$f \rightarrow f_{a, \theta, \vec{b}}(\vec{x}) = a^{-1} f \left(a^{-1} R_{-\theta} \left(\vec{x} - \vec{b} \right) \right)$$

preserva a condição de admissibilidade. Portanto, qualquer função $\psi_{a, \theta, \vec{b}}$, obtida a partir de ψ via translação, rotação ou dilatação é novamente uma wavelet. Logo, a ψ dada gera uma família de wavelets $\{\psi_{a, \theta, \vec{b}} \mid a > 0, \theta \in [0, 2\pi), \vec{b} \in \mathbb{R}^2\}$. Mostra-se que o conjunto de todas as combinações lineares de elementos desta família é denso em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

A transformada de wavelet neste caso é dada por

$$\begin{aligned} Wf(a, \theta, \vec{b}) &= \langle f, \psi_{a, \theta, \vec{b}} \rangle \\ &= a^{-1} \int \overline{\psi(a^{-1}R_\theta(\vec{x} - \vec{b}))} f(\vec{x}) d^2\vec{x} \end{aligned} \quad (320)$$

$$= a \int e^{i\vec{b}\cdot\vec{k}} \overline{\hat{\psi}(aR_{-\theta}\vec{k})} \hat{f}(\vec{k}) d^2\vec{k}. \quad (321)$$

Mostra-se que a transformada de wavelet contínua preserva norma, isto é,

$$C_\psi^{-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \frac{da}{a^3} d\theta d^2\vec{b} |Wf(a, \theta, \vec{b})|^2 = \int d^2\vec{x} |f(\vec{x})|^2 \quad (322)$$

Consequentemente, a transformada de wavelet como um operador linear de $L^2(\mathbb{R}^2, d^2\vec{x}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, a^{-3} da d\theta d^2\vec{b})$, é invertível, nos dando a seguinte fórmula de inversão:

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{b} \int_0^{2\pi} d\theta Wf(a, \vec{b}) \psi_{a, \vec{b}, \theta}. \quad (323)$$

Em outras palavras, a transformada de wavelet em duas dimensões nos dá uma decomposição do sinal em termos das funções analisadoras $\psi_{a, \theta, \vec{b}}$, com coeficientes $Wf(a, \theta, \vec{b})$.

15.3 Interpretação Física da Transformada Contínua de Wavelet Como Um “Scanner” de Singularidades.

Da equação (322), a transformada de wavelet em relação a ψ , W , preserva norma e em análise de sinal, como em eletromagnetismo clássico, a norma L^2 é interpretada como a energia total do sinal. Isto nos sugere que interpretemos $|Wf(a, \theta, \vec{b})|$ como a densidade de energia no espaço de parâmetros.

Assuma, como no caso unidimensional, que ψ seja satisfatoriamente localizada em ambos os espaços de posição \vec{x} e de frequência \vec{k} . Então, o mesmo acontecerá com $\psi_{a, \theta, \vec{b}}$, com o suporte convenientemente translado de \vec{b} , girado de θ e dilatado de a . Como $Wf(a, \theta, \vec{b})$ é essencialmente uma convolução com uma função ψ de média zero, segue-se que $Wf(a, \theta, \vec{b})$ é apreciável somente naquelas regiões do espaço de parâmetros (a, θ, \vec{b}) onde o sinal está: obtemos um valor apreciável para Wf somente onde $\psi_{a, \theta, \vec{b}}$ emparelha o sinal. Em outras palavras, a transformada de wavelet contínua atua como um filtro local na 4 variáveis a, θ, \vec{b} : $Wf(a, \theta, \vec{b})$ “vê” somente a porção do sinal em torno de a, θ, \vec{b} e elimina o resto. Portanto, se a wavelet é localizada, a densidade de energia da transformada se concentrará nas partes significantes do sinal, isto faz das wavelets uma ferramenta muito eficiente.

Sejamos mais precisos sobre o suporte de ψ . Suponha que ψ e $\hat{\psi}$ sejam tão localizadas quanto possível. Suponha que o suporte essencial de ψ tenha diâmetro T , centrado em $\vec{0}$, enquanto que $\hat{\psi}$ tem suporte num “disco” com diâmetro Ω , centrado em torno de \vec{k}_o . Então, $\psi_{a, \theta, \vec{b}}$ e $\hat{\psi}_{a, \theta, \vec{b}}$ têm suportes essenciais em discos, de diâmetro $\approx aT$ em torno de b ,

girado de r_θ e de diâmetro $\approx \Omega/a$, em torno de \vec{k}_o/a , girado de r_θ , respectivamente. Logo, o produto dos dois diâmetros é constante, o que faz com que a análise seja mais eficiente em altas frequências ou pequenas escalas, em particular, na detecção de descontinuidades em imagens ou singularidades pontuais (contornos, cantos) ou aspectos direcionais (segmentos, bordas).

Além das propriedades de localização, geralmente, requer-se que a wavelet ψ tenha um certo número de momentos nulos. Esta condição determina a capacidade da transformada de wavelet de detectar singularidades. De fato, se ψ tem todos os momentos até ordem $n \geq 1$ nulos (pela condição de admissibilidade, o momento de ordem 0 sempre se anula),

$$\int x^\alpha y^\beta \psi(\vec{x}) d^2 \vec{x} = 0, 0 \leq \alpha + \beta \leq n, \quad (324)$$

então a transformada de wavelet é cega a polinômios de grau até n , isto é, a parte suave do sinal.

Em suma, assim como em uma dimensão, a transformada de wavelet em duas dimensões pode ser interpretada como um microscópio matemático com seletor de direção, tendo como analisador ψ , magnificação $1/a$ e parâmetro orientação θ .

15.4 Escolha da Wavelet ψ

Existem duas possíveis escolhas para ψ , dependendo do problema em mãos: temos as wavelets isotrópicas e wavelets direcionais.

15.4.1 Wavelets Isotrópicas

Se deseja-se realizar uma análise pontual, isto é, quando nenhum aspecto de orientação está presente ou é revelante no sinal, escolhamos ψ que seja invariante por rotação. A dependência em θ desaparece de (323).

Um exemplo típico de tais wavelets é o chapéu mexicano em duas dimensões:

$$\psi_H(\vec{x}) = (2 - |\vec{x}|^2) e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2}} = -\Delta e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2}}. \quad (325)$$

Assim, o chapéu mexicano será eficiente para análise pontual fina, mas não é adequado para detectar direções. Por outro lado, pode-se usar Laplacianos de ordem superior,

$$\psi_H^{(n)}(\vec{x}) = -(\Delta)^n e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2}}.$$

Para valores crescentes de n , estas wavelets têm mais e mais momentos se anulando e, portanto, tornando-se sensíveis a detalhes cada vez mais acentuados.

Outro exemplo de wavelet isotrópica é a chamada **wavelet diferença**, por ser escrita como a diferença de duas funções que estão relacionadas por escala, como por exemplo, a wavelet *DOG* (“Difference-Of-Gaussians”), onde

$$\psi_D(\vec{x}) = \alpha^{-2} e^{|\vec{x}|^2/2\alpha^2} - e^{|\vec{x}|^2/2}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

Esta wavelet é usada em trabalhos de psicofísica.

15.4.2 Wavelets Anisotrópicas

Quando o objetivo é detectar aspectos direcionais (segmentos, campos vetoriais, ...) de uma imagem, por exemplo, a realização de uma filtragem direcional, devemos usar uma wavelet que não seja invariante a rotações. A melhor seletividade angular será obtida se ψ é direcional, o que significa que o suporte essencial da sua transformada de Fourier, $\hat{\psi}$, está contido num cone convexo com ápice na origem, ou é uma união finita de tais cones. As wavelets direcionais típicas são as wavelets de Morlet e de Cauchy em duas dimensões.

Da equação (321), vemos que as wavelets atuam como um filtro no espaços dos $\vec{k}'s$. Suponha que o sinal $f(\vec{x})$ seja fortemente orientado, por exemplo, ao longo do eixo x . Então, $\hat{f}(\vec{k})$ será um segmento no eixo k_y . A fim de detectar este sinal, com uma boa seletividade direcional, necessita-se de uma wavelet ψ suportada num estreito cone no espaço \vec{k} . Então, a transformada de wavelet será desprezível, a menos que $\hat{\psi}(\vec{k})$ esteja alinhada sobre $\hat{f}(\vec{k})$: a selectividade direcional impõe que restrinjamos o suporte de $\vec{\psi}$ e não de ψ .

A **wavelet de Morlet** em duas dimensões é definida por

$$\psi_M(\vec{x}) = e^{i\vec{k}_o \cdot \vec{x}} e^{-\frac{1}{2}|A\vec{x}|^2} \quad (326)$$

logo,

$$\widehat{\psi}_M(\vec{k}) = \sqrt{\epsilon} e^{-\frac{1}{2}|A^{-1}(\vec{k}-\vec{k}_o)|^2} \quad (327)$$

onde $A = \text{diag}[\epsilon^{-1/2}, 1]$, $\epsilon \geq 1$, \vec{k}_o é um vetor de onda.

Precisa-se adicionar uma correção a (326) para que a condição de admissibilidade, $\hat{\psi}(0) = 0$; entretanto, como ela é numericamente desprezível para $|\vec{k}_o| \geq 5.6$, ela foi ignorada. O módulo de ψ_M é uma Gaussiana alongada na direção x , se $\epsilon > 1$, e sua fase é constante ao longo da direção ortogonal a \vec{k}_o . Portanto, ψ_M suaviza ao sinal em todas as direções, mas detecta transições acentuadas na direção perpendicular a \vec{k}_o . No espaço de Fourier, o suporte efetivo de $\hat{\psi}_M$ é uma elipse centrada em \vec{k}_o e alongada na direção k_y , portanto, contida num cone convexo que se torna mais fino à medida em que ϵ aumenta. Portanto, a seletividade angular cresce com $|\vec{k}_o|$ e com a anisotropia ϵ e a melhor seletividade será obtida tomando-se \vec{k}_o paralelo ao eixo maior da elipse, isto é, $\vec{k}_o = (0, k_o)$.

Considere um cone simétrico em relação ao eixo k_x positivo, isto é,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(-\alpha, \alpha) = \left\{ \vec{k} \in \mathbb{R}^2 \mid -\alpha \leq \arg \vec{c} \leq \alpha \right\},$$

que é o cone convexo determinado pelos vetores unitários \vec{e}_α e $\vec{e}_{-\alpha}$. O cone dual, também convexo, é

$$\tilde{\mathcal{C}}(-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) = \left\{ \vec{k} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{k} \cdot \vec{k}' > 0, \quad \forall \vec{k}' \in \mathcal{C}(-\alpha, \alpha) \right\},$$

onde $\tilde{\alpha} = -\alpha + \pi/2$, e portanto, $\vec{e}_{-\alpha} \cdot \vec{e}_{\tilde{\alpha}} = \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{-\tilde{\alpha}} = 0$. Dado um vetor fixo $\vec{\eta} = (\eta, 0)$, $\eta > 0$, definimos a **wavelet de Cauchy**, $\psi_{lm}^{(C)}(\vec{x})$, através da sua transformada de Fourier:

$$\hat{\psi}_{lm}^{(C)}(\vec{k}) = \begin{cases} (\vec{k} \cdot \vec{e}_{\tilde{\alpha}})^l (\vec{k} \cdot \vec{e}_{-\tilde{\alpha}})^m e^{-\vec{k} \cdot \vec{\eta}}, & \text{se } \vec{k} \in \mathcal{C}(-\alpha, \alpha) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A wavelet de Cauchy $\hat{\psi}_{lm}^{(C)}(\vec{k})$ está suportada estritamente no cone $\mathcal{C}(-\alpha, \alpha)$, os parâmetros $l, m \in \mathbb{N}^*$. Um cálculo explícito nos dá o seguinte resultado:

$$\psi_{lm}^{(C)}(\vec{x}) = \text{const} \cdot (\vec{z} \cdot \vec{e}_{\alpha})^{-l-1} (\vec{z} \cdot \vec{e}_{-\alpha})^{-m-1}, \quad (328)$$

onde introduzimos a variável complexa $\vec{z} = \vec{x} + i\vec{\eta} \in \mathbb{R}^2 + i\tilde{\mathcal{C}}$.

15.5 Algumas Aplicações da Transformada de Wavelet Contínua em Duas Dimensões

15.5.1 Deteção de Contornos e Reconhecimento de Caracteres

Exatamente como no caso unidimensional, a transformada de wavelet bidimensional é especialmente útil para detectar descontinuidades em imagens, por exemplo contornos ou pontas de objetos. Para este propósito, uma wavelet isotrópica pode ser escolhida, tal como o chapéu mexicano radial, ψ_H , dado em (325). Neste caso, o efeito da transformada de wavelet consiste em suavizar o sinal com uma Gaussiana e tomar o Laplaciano do resultado. Portanto, valores grandes da amplitude aparecerão na posição das descontinuidades, em particular, no contorno do objetos (que é uma descontinuidade na luminosidade).

A fim de testar esta propriedade, calculamos a transformada de wavelet de um objeto simples, ou seja, um conjunto com a forma de uma letra ‘A’, representada por sua função característica, para diferentes valores do parâmetro a (veja. Para valores de a grandes, a transformada de wavelet vê o objeto como um todo, portanto, permitindo-se a determinação do objeto no plano. Quando a decresce, detalhes mais finos vão aparecendo. Neste caso, a transformada de wavelet se anula-se dentro e fora do contorno, visto que o sinal é constante lá, portanto, somente os contornos sobrevivem e são perfeitamente vistos quando $a = 0.075$. Naturalmente, se o valor de a for muito pequeno, problemas numéricos aparecerão e irão destruir os resultados.

Note também que os cantos da figura são evidenciados na transformada de wavelet através de picos súbitos. A amplitude é maior nestes pontos, visto que neles o sinal é singular nas duas direções.

Este exercício nos conduz a um algoritmo para reconhecimento de caracteres. A letra ‘A’, por exemplo, é completamente caracterizada pela sucessão de 12 cantos e a concavidade (ou convexidade) deles. O algoritmo consiste em localizar os máximos locais da transformada de wavelet contínua e eliminar o resto é capaz de detectar ‘A’ sem ambiguidade.

15.5.2 Reconhecimento e Classificação de Padrões

A caracterização de uma forma bidimensional a partir de seus contornos é um problema muito importante em análise de imagens, tais como reconhecimento de caracteres, inspeção de partes de máquinas em aplicações industriais, caracterização de formas biológicas, tais como cromossomos e células neurais, e assim por diante. Além disso, no campo da visão humana e percepção, a análise de formas em duas dimensões também desempenha um papel muito importante em psicofísica e neurofisiologia.

15.5.3 Análise de Imagens Astronômicas

Imagens astronômicas têm duas características: elas superpõem objetos vivendo em distâncias muito diferentes (estrelas vizinhas, galáxias, quasars, aglomerado de galáxias) e elas têm muitos ruídos. Uma análise de wavelets em bidimensional é útil sob os dois aspectos acima e tem sido sistematicamente explorada por A. Bijaoui e seu grupo em Nice, França. Aplicações incluem a revelação da estrutura hierárquica da estrutura galáctica ou do próprio universo (contagem de galáxias, detecção de aglomerado de galáxias ou buracos), e a remoção do ruído causado pela luz do céu; através de uma técnica similar a usada em uma dimensão para a remoção de linhas indesejadas ou ruídos no espectro.

Uma nova aplicação é a detecção de arcos gravitacionais de Einstein em imagens cosmológicas. Quando a luz de um objeto brilhante distante (um quasar) é vista através da galáxia, esta comporta-se como uma lente gravitacional, de modo que a fonte pontual aparece como uma anel, ou uma porção de uma anel, se o alinhamento não é exato. Através de medida do raio daquele anel, pode-se inferir sobre a distância da fonte. Isto pode ser feito em dois passos: O centro do anel é obtido com uma wavelet de forma anular,

$$\hat{\psi}_\kappa(\vec{k}) \sim e^{-(|\vec{k}|^2 - \kappa)}, \quad (329)$$

usada a uma escala bastante grande (por exemplo, $a = 2$). Esta determinação é bastante robusta a ruído, em particular, pontos brilhantes indesejáveis, que simulam estrelas vizinhas. O próprio arco é obtido com uma wavelet chapéu mexicano, a uma escala menor (por exemplo, $a = 0.5$). Por superposição das duas transformadas e aplicando um corte severo (de até 95%) para eliminar-se o ruído, obtem-se uma imagem com três pontos brilhantes: dois pontos do arco, em torno das extremidades, e o centro do círculo correspondente. Disso, pode-se reconstruir o arco sem ambiguidade, e portanto, obtem-se uma ferramenta para medir de maneira simples, a distância entre quasars, por exemplo.

15.5.4 Algumas Aplicações de Wavelets Direcionais

Como uma consequência de suas boas seletividades direcionais, as wavelets de Morley e de Cauchy são muito eficientes para filtragem direcional. A fim de ilustrar este fato, poderíamos analisar um padrão de varas em diferentes direções. Aplicando-se a transformada de wavelet discreta com uma direção fixa, aqui horizontal, selecionamos todas aquelas varas com aproximadamente a mesma direção, enquanto que aquelas que estão desalinhadas, dão origem a um sinal fantasma correspondendo às suas pontas. Como

estes são ruídos, podem ser eliminados através de uma filtragem dos mesmos, obtendo-se uma imagem nítida. Desta maneira, pode-se contar o número de objetos que estão numa direção particular.

Para ver outras aplicações de wavelets tais como detecção de simetrias, detecção de falhas geológicas, determinação de texturas, análise de imagens médicas, e outras mais, veja a referência [2].

Referências

- [1] Ingrid Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS - NSF Regional Conferences Series in Applied Mathematics, 1992.
- [2] J. C. van den Berg, *Wavelets in Physics*, Cambridge Press, 1999.
- [3] A. Haar, *Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme*, Math. Ann, **69**, pp. 331-371, 1910.
- [4] Ingrid Daubechies, *Orthonormal Basis of Compactly supported wavelets*, Comm. Appl. Math., **41**, pp. 909-996, 1988.
- [5] G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin, *Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I*, Communications in Pure and Applied Mathematics, volume XLIV, 141-183, 1991.
- [6] Beylkin, G. *On the Representation of Operators in Bases of Compactly Supported Wavelets*, SIAM J. on Numerical Analysis, Vol. 6, pp. 1716-1740
- [7] P. Wojtaszczyk, *A Mathematical Introduction to Wavelets*, London Mathematical Society, Student Texts **37**, 1997.
- [8] C. K. Chui, *On Cardinal Spline Wavelets*, in Ruskai et al. (1992), 419-438.
- [9] Stéphane Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, Second Edition, 1999.
- [10] Christian Blatter, *WAVELETS - A Primer*, A K Peters, Natick, Massachusetts, 1998.
- [11] M.K. Mandal, S. Panchanathan e T. Abounasr. *Choice of wavelets for image compression*. In Proceedings of Canadian Workshop on Information Theory 1995, vol 1133, 239-249, 1996]
- [12] E.C. Jacobs, A. Finkstein e D. Salesin. *Fast multiresolution image querying*. In Computer Graphics Proceedings -SIGGGRAPH 95, 277-286, 1995.
- [13] E.J. Stollniz, T. D. Deroose e D.H. Salesin. *Wavelets for Computer Graphics*.
- [14] A. Graps. *An Introduction to Wavelets*. IEEE Computational Science and Engineering, 2(2), 23-27, 1998. Morgan Kaufmann Publishers In. 1996.