

Wavelets: uma introdução

Paulo Cupertino de Lima
Departamento de Matemática - ICEX - UFMG

29 de julho de 2003

Resumo

Este artigo é uma introdução a uma das ferramentas matemáticas que se tornaram necessárias em muitas aplicações: as wavelets. Nos restringiremos às wavelets discretas e, pela sua simplicidade, daremos uma atenção especial à wavelet de Haar que é amplamente usada em muitas aplicações, especialmente em processamento de imagens digitais. Descreveremos algoritmos rápidos para calcular os coeficientes de wavelets (decomposição e reconstrução), a partir de seus coeficientes de filtros. Introduziremos as wavelets de Daubechies [1], bem como o conceito de análise de resolução múltipla, que é o contexto em que wavelets podem ser entendidas e construídas naturalmente. Em particular, a partir desse conceito, podemos ver as wavelets como uma ferramenta matemática para se representar o incremento de informações entre duas escalas ou resoluções sucessivas. Finalmente, veremos porque a representação com wavelets é esparsa e usaremos esta propriedade na compactação de dados (imagens digitais).

1 Introdução

Embora a primeira menção às wavelets tenha acontecido em 1909, por A. Haar [2], as wavelets de Haar ficaram no anonimato por muitos anos e, por um período muito longo, elas continuaram a ser a única base ortonormal de wavelets conhecida. Só recentemente, 1985, Stephane Mallat deu às wavelets um grande impulso através de seu trabalho em processamento digital de imagens e, inspirado nos resultados de Mallat, Y. Meyer construiu a primeira wavelet não-trivial (suave). Ao contrário das wavelets de Haar, as wavelets de Meyer são continuamente diferenciáveis; contudo, elas não têm suportes compactos. Poucos anos mais tarde, Ingrid Daubechies usou os trabalhos de Mallat para construir um conjunto de bases ortonormais de wavelets suaves, com suportes compactos. Os trabalhos de Daubechies são os alicerces das aplicações atuais de wavelets.

As transformadas de wavelets podem ser vistas como mecanismos para decompor ou quebrar sinais nas suas partes constituintes, permitindo analisar os dados em diferentes domínios de frequências com a resolução de cada componente amarrada

à sua escala. Além disso, na análise de wavelets, podemos usar funções que estão contidas em regiões finitas, tornando-as convenientes na aproximação de dados com descontinuidades.

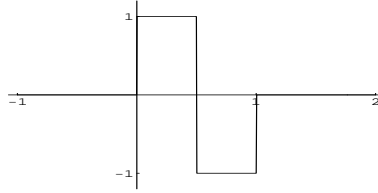
O princípio mais geral na construção das wavelets é o uso de dilatações e translações. As wavelets mais usadas formam um sistema ortonormal de funções com suportes compactos construído desta forma. Esta é a razão pela qual elas podem distinguir as características locais de um sinal em diferentes escalas e, por translações, elas cobrem toda a região na qual o sinal é estudado. Na análise de sinais não-estacionários, a propriedade de localidade das wavelets nos conduz às suas vantagens sobre a transformada de Fourier.

Os algoritmos de wavelets processam dados em diferentes escalas ou resoluções e, independentemente da função de interesse ser uma imagem, uma curva ou uma superfície, wavelets oferecem uma técnica elegante na representação dos níveis de detalhes presentes. Elas constituem uma ferramenta matemática para decompor funções hierarquicamente, permitindo que uma função seja descrita em termos de uma forma grosseira, mais outra forma que apresenta detalhes que vão desde os menos delicados aos mais finos. O objetivo na análise de wavelets é “ver a floresta e as árvores”.

Se pudermos escolher as wavelets que melhor se adaptam aos dados, ou truncarmos os coeficientes de wavelets menores do que um valor previamente estabelecido, os dados são esparsamente representados. Esta “codificação esparsa” faz das wavelets uma excelente ferramenta no campo de compressão de dados.

Por causa de suas propriedades únicas, wavelets foram usadas em análise funcional em matemática, em estudo de propriedades (multi)fractais, singularidades ou oscilações locais de funções, em solução de equações diferenciais, em reconhecimento de padrões, em compressão de imagens e de sons, em processamento de geometria digital, na solução de vários problemas de física [3], biologia, medicina, astronomia, acústica, engenharia nuclear, grupo de renormalização em mecânica estatística, problemas de computação gráfica, neurofisiologia, música, ressonância magnética, identificação de vozes, ótica, fractais, turbulência, previsão de terremotos, radar, visão humana.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2 introduzimos o espaço das funções de quadrados integráveis, $L^2(\mathbb{R})$, o conceito de ortogonalidade neste espaço e definimos as wavelets discretas. Como exemplo, consideramos a wavelet Haar e mostramos como representar uma função em $L^2(\mathbb{R})$ em termos desta. Introduzimos algoritmos rápidos para se calcular os coeficientes de wavelets de Haar e fazemos uma introdução sucinta às wavelets de Daubechies. Na Seção 3 introduzimos o conceito de Análise de Resolução Múltipla e enunciamos o Teorema 3.1 que é um dos resultados mais importantes naquele contexto. Na Seção 4 introduzimos os algoritmos rápidos para se calcular coeficientes de wavelets para uma wavelet geral. Na Seção 5 aplicamos wavelets à compressão de dados, com ênfase à compressão de imagens digitais.

Figura 1: A wavelet de Haar, ψ .

2 Transformada Discreta de Wavelets

No que se segue denotaremos por $L^p(\mathbb{R})$ o espaço das funções, f , definidas em \mathbb{R} , assumindo valores em \mathbb{C} (ou \mathbb{R}), tais que $\|f\|_p \equiv \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Para caso particular quando $p = 2$, definiremos o produto interno de duas funções f e g como $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$, onde a barra representa o complexo conjugado. Dizemos que f e g são ortogonais se $\langle f, g \rangle = 0$.

Definição 2.1 Dizemos que uma função f tem suporte compacto, se existe um intervalo fechado e limitado, fora do qual $f(x) = 0$.

Definição 2.2 Uma wavelet é uma função $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, tal que a família de funções

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)$$

onde j e k são inteiros arbitrários, seja uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

Observação 2.1 Da definição acima, se ψ é uma wavelet, então, $\psi_{j,k}$ também o será para qualquer $j, k \in \mathbb{Z}$.

Quando olhamos para a definição de wavelets pela primeira vez, uma pergunta surge imediatamente: será que existem wavelets? A esta pergunta daremos uma resposta afirmativa, através de um exemplo simples.

2.1 A Wavelet de Haar

Definição 2.3 A wavelet de Haar dada pela Definição 2.2, com ψ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

A seguir, mostraremos que a família de Haar de fato constitui uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Mostraremos que

1. O conjunto $\{\psi_{m,n}\}$ é um conjunto ortonormal, ou seja, $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$, onde $\delta_{m,n} = 1$ se $m = n$ e zero, caso contrário.

2. Toda função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser arbitrariamente aproximada por uma combinação linear finita de $\psi_{m,n}$.

(i) Note que $\|\psi_{j,k}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$.

(ii) Para j fixo e $k \neq k'$, temos, $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = \langle \psi, \psi_{0,k'-k} \rangle = 0$, pois, $\psi(x)$ se anula fora do intervalo $[0, 1)$ e $\psi_{0,k''} = \psi(x - k'')$ se anula fora do intervalo $[k'', k'' + 1)$ e estes intervalos são disjuntos para $k'' \neq 0$.

(iii) Se $j > j'$, temos $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 2^{\frac{j-j'}{2}} \langle \psi, \psi_{j'',k''} \rangle$, onde $k'' = k' - k2^{j-j'}$ é inteiro e $j'' = j' - j$ é um inteiro negativo.

Note que

$$\begin{aligned} 1 &= 2^{|j''|} 2^{j''} \\ 1/2 &= 2^{|j''|-1} 2^{j''}, \end{aligned}$$

portanto, $1/2$ e 1 são múltiplos inteiros de $2^{j''}$, em particular, se dividirmos a reta real em intervalos da forma $[l2^{j''}, (l+1)2^{j''})$ onde $l \in \mathbb{Z}$, então, 0 , $1/2$ e 1 serão extremidades de tais intervalos, portanto, teremos uma das seguintes possibilidades: (i) $[k''2^{j''}, (k''+1)2^{j''}) \subset (-\infty, 0)$, (ii) $[k''2^{j''}, (k''+1)2^{j''}) \subset [0, 1/2)$, (iii) $[k''2^{j''}, (k''+1)2^{j''}) \subset [1/2, 1)$ ou (iv) $[k''2^{j''}, (k''+1)2^{j''}) \subset [1, \infty)$. Nos casos (i) e (iv) temos $\psi_{j'',k''} = 0$ para todo x , nos casos (ii) e (iii) como ψ é constante em cada um dos subintervalos $[0, \frac{1}{2})$ ou $[\frac{1}{2}, 1)$, temos que $\psi_{j'',k''}$ é proporcional a $\psi_{j'',k''}$, mas $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j'',k''}(x) dx$ é proporcional a $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$. Isto mostra que o $\psi_{j,k}$ e $\psi_{j',k'}$ são ortogonais.

A função

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2)$$

desempenha um papel muito importante no que se segue, seu gráfico aparece na Figura 2, ela é denominada **função escala** associada a wavelet de Haar.

Das definições de ϕ e ψ temos as seguintes relações de escala:

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1) \quad (3)$$

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1). \quad (4)$$

Note que $\phi(2^{-j}x - k)$ vale 1 no intervalo $[k2^j, (k+1)2^j)$ e zero, caso contrário; em particular, se V_j for o subespaço de $L^2(\mathbb{R})$ das funções constantes por partes em intervalos da forma $[k2^j, (k+1)2^j)$, onde $k \in \mathbb{Z}$, então, $\{\phi_{j,k}(x)\}_k$ forma uma base ortonormal para V_j . Claramente, $V_{j+1} \subset V_j$. O subconjunto de V_j formado pelas funções, f , tais que $\langle f, g \rangle = 0$ para todo $g \in V_{j+1}$, é o complemento ortogonal de V_{j+1} em relação a V_j e será denotado por W_{j+1} , neste caso escrevemos $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$. É fácil mostrar que para todo $k, l \in \mathbb{Z}$, o produto escalar de $\phi(2^{-j}x - k)$ e $\psi(2^{-j}x - l)$ é zero, logo, qualquer combinação linear finita de $\psi(2^{-j}x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, está em W_j . O conjunto $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma uma base ortonormal para W_j .

A seguir, mostraremos que o conjunto $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ forma uma base para $L^2(\mathbb{R})$, a demonstração se baseará na idéia por trás da análise de resolução múltipla que será vista na Seção 3. No presente caso, nosso ponto de partida é que as funções com suportes compactos e constantes por partes em intervalos da forma $[k2^j, (k+1)2^j)$, são

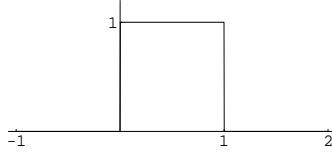


Figura 2: A função escada, ϕ , associada a wavelet de Haar.

densas em $L^2(\mathbb{R})$, ou seja, dada uma função f neste espaço e um número positivo ϵ , existe uma função h_0 , constante por partes em intervalos da forma $[k2^{j_0}, (k+1)2^{j_0}]$, se anulando fora de $[-2^{j_1}, 2^{j_1}]$; ou seja, $h_0(x) = \sum_{k=-2^{j_1-j_0}}^{2^{j_1-j_0}-1} a_{0,k} \phi(2^{-j_0}x - k)$, tal que $\|f - h_0\|_2 < \epsilon$, onde $j_0 < j_1$ são inteiros. Em virtude disso, basta provarmos que qualquer função h_0 da forma

$$h_0(x) = \sum_{k=-2^{j_1-j_0}}^{2^{j_1-j_0}-1} a_{0,k} \phi(2^{-j_0}x - k) \in V_{j_0},$$

pode ser arbitrariamente aproximada por uma combinação linear finita de wavelets.

A seguir, escrevemos $h_0 = h_1 + \delta_1$ onde h_1 é a seguinte função constante por partes em intervalos da forma $[k2^{j_0+1}, (k+1)2^{j_0+1}]$:

$$h_1(x) = \sum_{k=-2^{j_1-j_0-1}}^{2^{j_1-j_0-1}-1} a_{1,k} \phi(2^{-(j_0+1)}x - k) \in V_{j_0+1},$$

onde

$$a_{j+1,k} \equiv \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{2},$$

portanto, $a_{1,k}$ é a restrição de h_1 ao intervalo $[k2^{j_0+1}, (k+1)2^{j_0+1}]$. O que estamos fazendo é projetando h_0 sobre o subespaço, V_{j_0+1} , com isso obtendo uma versão de menor resolução de h_0 , onde perdemos a resolução por um fator de dois.

Como $\delta_1 = h_1 - h_0$, as restrições de δ_1 aos intervalos $[k2^{j_0+1}, (k + \frac{1}{2})2^{j_0+1}]$ e $[(k + \frac{1}{2})2^{j_0+1}, (k+1)2^{j_0+1}]$ serão $d_{1,k}$ e $-d_{1,k}$, respectivamente, onde

$$d_{j+1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{2},$$

logo, δ_1 restrita ao intervalo $[k2^{j_0+1}, (k+1)2^{j_0+1}]$ é $d_{1,k} \psi(2^{-(j_0+1)}x - k)$, pois, $\psi(2^{-j}x - k) = \phi(2^{-(j-1)}x - 2k) - \phi(2^{-(j-1)}x - (2k+1))$. Assim, temos

$$\delta_1(x) = \sum_{k=-2^{j_1-j_0-1}}^{2^{j_1-j_0-1}-1} d_{1,k} \psi(2^{-(j_0+1)}x - k) \in W_{j_0+1}.$$

Neste procedimento passamos de h_0 para sua versão de menor resolução por um fator de 2, h_1 . O que fizemos foi substituir os valores de h_0 nos subintervalos $[2k2^{j_0}, (2k+1)2^{j_0}]$ e $[(2k+1)2^{j_0}, (2k+2)2^{j_0}]$, por suas médias, $a_{1,k}$, veja Figura 3. Com isso escrevemos $h_0 = h_1 + \delta_1$, com $\delta_1 \in W_{j_0+1}$; portanto, vemos que o incremento de informação necessária para irmos de h_0 para h_1 , δ_1 , é dado pela função combinação linear finita de wavelets.

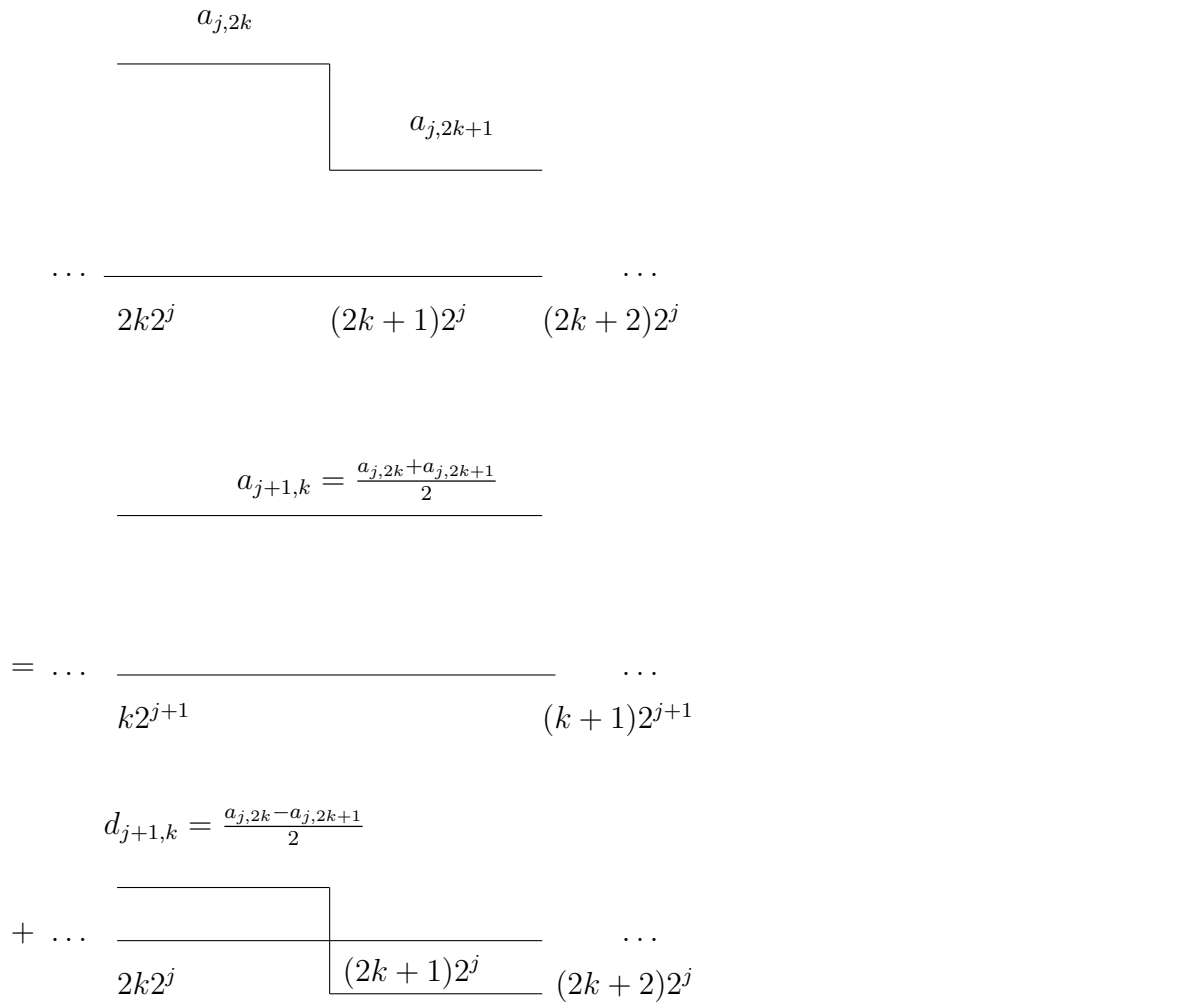


Figura 3: A passagem da escala j para $j + 1$

A seguir, escrevemos $h_1 = h_2 + \delta_2$, onde h_2 é a seguinte função constante por parte em intervalos da forma $[k2^{j_0+2}, (k+1)2^{j_0+2}]$:

$$h_2 = \sum_{k=-2^{j_1-j_0-2}}^{2^{j_1-j_0-2}-1} a_{2,k} \phi(2^{-(j_0+2)}x - k) \in V_{j_0+2},$$

então,

$$\delta_2 = \sum_{k=-2^{j_1-j_0-2}}^{2^{j_1-j_0-2}-1} d_{2,k} \psi(2^{-(j_0+2)}x - k) \in W_{j_0+2}.$$

Portanto,

$$h_0 = h_2 + \delta_1 + \delta_2 = h_2 + \sum_{j=1,2} \sum_{k=-2^{j_1-j_0-j}}^{2^{j_1-j_0-j}-1} d_{j,k} \psi(2^{-(j_0+j)}x - k),$$

ou seja, h_0 é escrita como uma versão de baixa resolução, $h_2 \in V_{j_0+2}$, mais detalhes correspondentes as passagens de V_{j_0} para V_{j_0+1} e de V_{j_0+1} para V_{j_0+2} , representados por δ_1 e δ_2 , respectivamente.

Repetindo-se o procedimento acima $j_1 - j_0$ vezes, teremos

$$h_0(x) = h_{j_1-j_0}(x) + \sum_{j=1}^{j_1-j_0} \sum_{k=-2^{j_1-j_0-j}}^{2^{j_1-j_0-j}-1} d_{j,k} \psi(2^{-(j_0+j)}x - k),$$

onde $h_{j_1-j_0}(x) = a_- \phi(2^{-j_1}x) + a_+ \phi(2^{-j_1}x + 1)$, $a_- = 2^{-j_1} \sum_{k=-2^{j_1}}^{-1} a_{0,k}$ e $a_+ = 2^{-j_1} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} a_{0,k}$.

Aplicando-se o procedimento acima n vezes a $h_{j_1-j_0}$, teremos,

$$\begin{aligned} h_{j_1-j_0} &= \frac{a_-}{2^n} \phi(2^{-(j_1+n)}x + 1) + \frac{a_+}{2^n} \phi(2^{-(j_1+n)}x) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_-}{2^j} \psi(2^{-(j_1+j)}x + 1) + \frac{a_+}{2^j} \psi(2^{-(j_1+j)}x) \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$h_0(x) = \frac{a_-}{2^n} \phi(2^{-(j_1+n)}x + 1) + \frac{a_+}{2^n} \phi(2^{-(j_1+n)}x) + \Delta_n$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sum_{j=1}^{j_1-j_0} \sum_{k=-2^{j_1-j_0-j}}^{2^{j_1-j_0-j}-1} d_{j,k} \psi(2^{-(j_0+j)}x - k) \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_-}{2^j} \psi(2^{-(j_1+j)}x + 1) + \frac{a_+}{2^j} \psi(2^{-(j_1+j)}x) \right) \end{aligned}$$

é uma combinação linear finita de wavelets $\psi_{j,k}$.

Para finalizar, temos $\|h_0 - \Delta_n\|_2 = 2^{\frac{j_1}{2}} |a_- + a_+| 2^{-\frac{n}{2}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. ■

Note que as wavelets nos permitem recuperar os detalhes que seriam perdidos com a diminuição de resolução quando se passa de uma escala para a escala seguinte, ou seja, elas medem o incremento de informação entre duas escalas consecutivas.

A wavelet de Haar é a única wavelet com suporte compacto para a qual se tem uma forma analítica fechada. As wavelets de Daubechies [1, 4] também têm suportes compactos e podem ser tomadas tão suaves (e com quantos momentos nulos quanto desejamos); entretanto, não se conhece uma forma analítica fechada para as mesmas e elas são calculadas numericamente, veja, por exemplo, [1, 6].

2.1.1 Cálculo Rápido dos Coeficientes de wavelets na Base de Haar

Das relações (3) e (4), temos

$$\phi(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x-1) \right) \equiv \sqrt{2} (h_0 \phi(2x) + h_1 \phi(2x-1)) \quad (5)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x-1) \right) \equiv \sqrt{2} (g_0 \phi(2x) + g_1 \phi(2x-1)) \quad (6)$$

As relações (5) e (6) são válidas em geral, ou seja, se ψ é uma wavelet e ϕ é a **função escala** associada a ψ (veja Definição 3.1), então, necessariamente (veja relações (32) e (31)),

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x-k) \quad (7)$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x-k). \quad (8)$$

Os coeficientes h_n são denominados coeficientes de filtros da wavelet. No caso das wavelets de suportes compactos, apenas um número finito de valores de h_n serão diferentes de zero.

Das relações (6) e (5), temos

$$\psi_{j,n}(x) \equiv 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - n) = \frac{\phi_{j-1,2n} - \phi_{j-1,2n+1}}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

$$\phi_{j,n}(x) \equiv 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}x - n) = \frac{\phi_{j-1,2n} + \phi_{j-1,2n+1}}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Se definirmos o coeficiente de wavelet $d_{j,k}$ e a “média” $a_{j,k}$ como as projeções de f sobre $\psi_{j,k}$ e $\phi_{j,k}$, respectivamente, ou seja, $a_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$ e $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$, ao

multiplicarmos as equações (9) e (10) por $f(x)$, as integrarmos de $-\infty$ a ∞ e usarmos a ortogonalidade dos $\phi_{j,k}$ para uma mesma escala, teremos as seguintes relações

$$d_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j-1,2n} - d_{j-1,2n+1}) \quad (11)$$

$$a_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j-1,2n} + d_{j-1,2n+1}) \quad (12)$$

que nos permitem o cálculo rápido dos coeficientes de wavelets, $d_{j,k}$, $j > j_0$, a partir de $\{a_{j_0,k}\}_k$, onde j_0 pode ser visto como uma escala fina, tal que a projeção de f sobre o espaço das funções constantes em intervalos da forma $[k2^{j_0}, (k+1)2^{j_0})$, ou seja, $\sum_k a_{j_0,k} \phi_{j_0,k}$, seja uma boa aproximação para f .

Das relações (11) e (12), temos graficamente o seguinte algoritmo em cascada para calcular os coeficientes de wavelets $\{d_{j,n}\}$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{j_0,.} & \longrightarrow & a_{j_0+1,.} & \longrightarrow & a_{j_0+2,.} & \longrightarrow & a_{j_0+3,.} \cdots a_{j_0+J-1,.} & \longrightarrow & a_{j_0+J,.} \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & d_{j_0+1,.} & & d_{j_0+2,.} & & d_{j_0+3,.} \cdots & & d_{j_0+J,.} \end{array} \quad (13)$$

Na Seção 4, veremos que para uma wavelet em geral, temos as seguintes relações

$$a_{j,n} = \sum_k \bar{h}_k a_{j-1,2n+k} \quad (14)$$

e

$$d_{j,n} = \sum_k \bar{g}_k a_{j-1,2n+k}, \quad (15)$$

portanto, o algoritmo descrito por (13) vale para uma wavelet em geral, onde a passagem de $j-1$ para j é feita através das relações (14) e (15). Como os coeficientes h_k e g_k são em geral reais, a barra representando o complexo conjugado poderá ser omitida.

Somando-se (11) e (12), temos

$$a_{j-1,2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j,n} + d_{j,n}) \quad (16)$$

Subtraindo-se (11) e (12), temos

$$a_{j-1,2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j,n} - d_{j,n}). \quad (17)$$

Da relações (16) e (17), temos graficamente o seguinte algoritmo em cascada para reconstruir f , ou seja, $\{a_{j_0,k}\}_k$, a partir de $a_{j_0+J,.}$, $d_{j_0+J,.}$, $d_{j_0+J-1,.}$, \dots , $d_{j_0+2,.}$, $d_{j_0+1,.}$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{j_0+J,.} & \longrightarrow & a_{j_0+J-1,.} & \longrightarrow & a_{j_0+J-2,.} & \cdots & a_{j_0+1,.} & \longrightarrow & a_{j_0,.} \\ d_{j_0+J,.} & \nearrow & d_{j_0+J-1,.} & \nearrow & & & d_{j_0+1,.} & \nearrow & \end{array} \quad (18)$$

Na Seção 4, veremos que para uma wavelet em geral, temos as seguintes relações

$$a_{j-1,n} = \sum_k \overline{h_{n-2k}} a_{j,k} + \sum_k \overline{g_{n-2k}} d_{j,k}, \quad (19)$$

ou seja, o algoritmo descrito por (18) vale para uma wavelet geral.

Das relações (16) e (17), podemos reconstruir a função a partir de seus coeficientes de wavelets.

Na prática, dado uma coleção arbitrária de $N = 2^n$ valores, tratamos estes como se fossem $a_{0,k}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1 = N - 1$ e através das relações (11) e (12) obtemos uma nova representação para a mesma, ou seja, $\{a_{n,0}, d_{j,k}, j = 1, \dots, n, k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1\}$ e a partir deste e das relações (16) e (17), podemos voltar aos valores iniciais. Nos problemas de interesse, devido à grande correlação local, a representação em termos de coeficientes de wavelets é esparsa no sentido que a maioria dos coeficientes $d_{j,k}$ são nulos ou muito pequenos e podemos ignorá-los, daí a idéia de compressão por trás da representação em bases de wavelets. Note que o procedimento descrito pelas equações (11) e (12) para se calcular os coeficientes de wavelets Haar requer $\sum_{j=0}^{n-1} 2 \cdot 2^{n-j} = 4(N - 1)$ operações (somadas e multiplicações). Para uma wavelet em geral, este número é proporcional a N e dizemos que os algoritmos para calcular coeficientes de wavelets são da ordem de N .

2.2 As wavelets de Daubechies

Em [4] são construídas as wavelets de Daubechies, ${}_N\psi$; tais wavelets possuem todos os momentos até ordem $N - 1$ nulos, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^l {}_N\psi(x) dx = 0, \quad l = 0, \dots, N - 1.$$

Para $N \gg 1$, ${}_N\psi \in C^{\mu N}$, onde $\mu \simeq 0.2$, ou seja, a regularidade de ${}_N\psi$ aumenta com o parâmetro N ; além disso, existe um intervalo de comprimento $2N - 1$, tal que ${}_N\psi$ se anula fora deste, neste caso, dizemos que ${}_N\psi$ tem suporte compacto.

A wavelet de Haar pode ser vista como um caso particular das wavelets de Daubechies quando $N = 1$.

No caso das wavelets de Daubechies, ${}_N\psi$, os valores de ${}_N h_k$ serão diferentes de zero apenas para $2N$ valores de k , digamos $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$, eles são raízes de equações algébricas, calculadas por métodos numéricos (veja tabela 6.1 de [1]). Conforme será visto na Seção 3, os valores de g_k e h_k estão relacionados e uma possível relação entre eles é, por exemplo, $g_k = (-1)^k h_{2N-1-k}$. Em cálculos numéricos envolvendo wavelets, tudo que precisamos são os seus coeficientes h_n 's.

Em nossas aplicações ao problema de processamento de imagens digitais, nos restringiremos a wavelet ${}_2\psi$, também conhecida na literatura por Daub4; neste caso, os valores exatos de seus coeficientes de filtros são

$$h_0 = (1 + \sqrt{3})/4\sqrt{2}, \quad h_1 = (3 + \sqrt{3})/4\sqrt{2}, \quad h_2 = (3 - \sqrt{3})/4\sqrt{2}, \quad h_3 = (1 - \sqrt{3})/4\sqrt{2}$$

e $h_k = 0$, para os demais valores de k . Esta wavelet tem os momentos de ordem zero e ordem um nulos, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}_N\psi(x) dx = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x {}_N\psi(x) dx.$$

Necessariamente, toda wavelet satisfaz $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$, ou seja, ela tem o momento de ordem zero nulo. Sob o ponto de vista prático, quanto mais momentos nulos uma wavelet possuir, menores serão os coeficientes de wavelets correspondentes as partes de f que são suaves, ou seja, os coeficientes de wavelets serão apreciáveis onde f não for suave, o que nos permite usar wavelets para detectar singularidades de f . Em contra-partida, para uma função escala, ϕ , necessariamente, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \neq 0$.

Observação 2.2 *A vantagem de uma wavelet ψ ter vários momentos nulos nos conduz a uma alta compressividade, porque os coeficientes de wavelets das escalas mais finas de uma função são essencialmente nulos onde a função é suave. Veremos que também é desejável que a função escala tenha momentos nulos: seja ϕ tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^l \phi(x) dx = 0, \quad \text{para } l = 1, \dots, L-1$$

e suponha que f tenha derivadas até ordem L numa vizinhança do ponto $k2^{-J}$. Fazendo-se uma expansão de Taylor $f(k2^{-J} + 2^{-J}x)$ em torno de este ponto, para J suficientemente grande, temos $\langle f, \phi_{-J,k} \rangle \simeq 2^{-\frac{J}{2}} f(2^{-J}k)$. Com isto temos um método simples para calcularmos os coeficientes $a_{-J,k} \equiv \langle f, \phi_{-J,k} \rangle$ de uma escala mais fina, evitando-se indesejáveis integrações numéricas na obtenção da seqüência inicial, necessária no primeiro passo nos cálculos dos coeficientes de wavelets de uma função, veja Observação 4.2.

Em 1989, Coifman sugeriu a Daubechies a construção de uma base ortonormal de wavelets onde não somente ψ , como também ϕ , tivesse momentos nulos, mais precisamente,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^l \psi(x) dx &= 0, \quad l = 0, \dots, L-1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx &= 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^l \phi(x) dx = 0, \quad l = 1, \dots, L-1. \end{aligned}$$

Tais wavelets foram denominadas de coiflets e foram usadas nos algoritmos numéricos de [5], nos quais são feitas compressões de operadores via wavelets. Para uma discussão das coiflets, veja [1], Seção 8.2.

3 A Análise de Resolução Múltipla

As primeiras construções de bases ortonormais de wavelets pareciam um pouco miraculosas. A situação mudou com o a chegada da análise de resolução múltipla

(*ARM*), formulada em 1986 por Mallat e Meyer. A *ARM* fornece um referencial onde bases de wavelets são naturalmente compreendidas, bem como permite a construção de novas bases. Quando Mallat trabalhou com wavelets de Meyer pela primeira vez, ele estava trabalhando com análise de imagens, onde a idéia de se estudar imagens em várias escalas simultaneamente era popular. Isto o estimulou a ver bases ortonormais de wavelets como uma ferramenta para descrever matematicamente o “incremento na informação” necessário para se ir de uma aproximação grosseira para uma aproximação com maior resolução.

Definição 3.1 *Uma ARM é uma seqüência, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, de subespaços fechados de $L^2(\mathbb{R})$, representando os sucessivos níveis de resoluções, tais que eles satisfaçam às seguintes condições:*

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots; \quad (20)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}; \quad (21)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \quad \text{é denso em } L^2(\mathbb{R}); \quad (22)$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0; \quad (23)$$

$$f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x - n) \in V_0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}; \quad (24)$$

Existe $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, denominada função escala, tal que

$$\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ constitui uma base ortonormal para } V_0. \quad (25)$$

A propriedade (23) expressa que todos os espaços estão relacionados por escala a um mesmo espaço, V_0 (este é o aspecto da “multiresolução”). Ainda por causa desta propriedade, se $f(x) \in V_j$, então, $f(x - 2^j n) \in V_j$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. As condições (25) e (23) implicam que $\{\phi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_j para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Se definirmos P_j como o operador projeção ortogonal sobre V_j , a condição (22) assegura que $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Cada V_j pode ser interpretado como um espaço de aproximação sucessiva: a aproximação de $f \in L^2(\mathbb{R})$ na resolução 2^j é definida como a projeção de f sobre V_j e quanto menor j , mais fina é a resolução obtida. A condição (23) significa que nenhuma escala é privilegiada. Os detalhes adicionais necessários para aumentar a resolução de 2^j para 2^{j-1} são dados pela projeção de f sobre o complemento ortogonal de V_j em relação a V_{j-1} , o qual denotamos por W_j : $V_j \oplus W_j = V_{j-1}$. Note que

$$W_j \perp W_{j'}, \quad \text{se } j \neq j'. \quad (26)$$

(Se $j > j'$, por exemplo, então $W_j \subset V_{j'} \perp W_{j'}$.) Segue-se que, para $j < J$, podemos decompor V_j como a seguinte soma direta de subespaços:

$$V_j = W_{j+1} \oplus W_{j+2} \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J, \quad (27)$$

onde todos estes subespaços são ortogonais. Em virtude das condições (21) e (22), isto implica que o espaço todo, $L^2(\mathbb{R})$, pode ser decomposto como uma soma direta de subespaços mutuamente ortogonais, os W_j 's. Além disso, os subespaços W_j herdam a propriedade de escala (23) de V_j :

$$f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_0. \quad (28)$$

Por causa de (28), se $\{\psi(x - k)\}_k$ for uma base ortonormal para W_0 , então, $\{\psi_{j,k}(x)\}_k$ será uma base ortonormal para W_j .

A decomposição (27) nos permite escrever uma função dada na escala 2^j como a soma da sua versão onde a sua resolução foi reduzida por um fator de 2^{j-J} , mais os detalhes correspondentes às escalas intermediárias entre as escalas 2^j e 2^J . Além disso, como o espaço todo é uma soma direta dos W_j 's, o “dissecamos” em fatias correspondendo a detalhes que vão dos mais delicados aos mais grossos, sendo que fatias distintas são ortogonais. Para cada uma destas fatias, digamos, W_j , temos a família de wavelets $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ como uma base ortonormal.

No caso das wavelets de Haar, a função ϕ é dada por (2) e definimos

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f|_{[2^j k, 2^j(k+1))} = \text{constante}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

As condições acima são trivialmente satisfeitas (a propriedade (22) é uma imediata conseqüência do fato de que as funções degraus com saltos nos racionais da forma $k 2^j$ são **densas** em $L^2(\mathbb{R})$).

Para a wavelet de Haar, temos

$$P_{j-1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (29)$$

A beleza da abordagem usando *ARM* é que desde que exista uma seqüência de subespaços $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ e uma função ϕ satisfazendo as condições (20)-(25), então existe uma função ψ tal que (29) ocorra.

O teorema enunciado abaixo é um dos resultados mais importantes da *ARM* (veja [1, 6]):

Teorema 3.1 *Se uma seqüência de subespaços fechados $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ em $L^2(\mathbb{R})$ e ϕ satisfazem as condições (20)-(25) da Definição 3.1, então existe uma base ortonormal de wavelets $\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ para $L^2(\mathbb{R})$, tal que para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$P_{j-1} f = P_j f + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (30)$$

Uma possível escolha de ψ é

$$\psi = \sum_n (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \phi_{-1,n} \quad (31)$$

onde $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$.

Como $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ e $\{\phi(x-n)\}_n$ forma uma base ortonormal para V_{-1} , temos a seguinte relação de escala

$$\phi(x) = \sum_n h_n \phi_{-1,n}(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x-n). \quad (32)$$

Segue-se da demonstração do Teorema 3.1, que a wavelet ψ é determinada a menos de um fator de fase (um múltiplo escalar com módulo 1); ocasionalmente, faz-se a seguinte escolha:

$$g_n = (-1)^n h_{-n+1+2N}, \quad (33)$$

com uma escolha conveniente de $N \in \mathbb{Z}$.

4 Algoritmos Rápidos

Havíamos descrito um algoritmo rápido para se calcular os coeficientes de wavelets para o caso particular da wavelet de Haar. A seguir, obteremos algoritmos rápidos para se fazer a decomposição (análise) e reconstrução (síntese) de uma função no caso de uma wavelet arbitrária, por exemplo, as wavelets de Daubechies.

A seguir transcreveremos as relações (31) e (32), ou seja,

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x-k), \quad (34)$$

e

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x-k) \quad (35)$$

onde $h_k = \langle \phi, \phi_{-1,k} \rangle$. Além destas relações, também usaremos que V_{j-1} é uma soma direta de V_j e W_j , ou seja,

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j. \quad (36)$$

Note que de (35), temos

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}(x) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n) \\ &= 2^{-(j-1)/2} \sum_k h_k \phi(2^{-(j-1)}x - 2n - k) \\ &= \sum_k h_k \phi_{j-1,2n+k}(x), \quad \forall j, n. \end{aligned} \quad (37)$$

De maneira análoga, de (34), temos

$$\psi_{j,k} = \sum_k g_k \phi_{j-1,2n+k}, \quad \forall j, n. \quad (38)$$

De (37), temos

$$\begin{aligned}\langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j,k} \rangle &= \sum_l \bar{h}_l \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j,2k+l} \rangle \\ &= \sum_l \bar{h}_l \delta_{n,2k+l} = \overline{h_{n-2k}}.\end{aligned}\quad (39)$$

De (38), temos

$$\begin{aligned}\langle \phi_{j-1,n}, \psi_{j,k} \rangle &= \sum_l \bar{g}_l \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j,2k+l} \rangle \\ &= \sum_l \bar{g}_l \delta_{n,2k+l} = \overline{g_{n-2k}}.\end{aligned}\quad (40)$$

Seja P_j a projeção ortogonal sobre V_j , então, como $\{\phi_{j,k}\}_k$ forma uma base para V_j , temos

$$P_j f = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k}, \quad (41)$$

e em virtude da ortonormalidade dos $\phi_{j,k}$, $a_{j,k} = \langle P_j f, \phi_{j,k} \rangle$. Como $1 - P_j$ é a projeção ortogonal sobre o complemento de V_j , temos que $\langle (1 - P_j)f, \phi_{j,k} \rangle = 0$, logo, $\langle f, \phi_{j,k} \rangle = \langle P_j f, \phi_{j,k} \rangle$.

A análise de wavelets agora procede na direção de j crescente. Descreveremos o passo $j - 1 \mapsto j$. Assuma que os coeficientes $\{a_{j-1,k}\}_k$ sejam conhecidos e estejam armazenados numa matriz. De (41) e (37), temos

$$\begin{aligned}a_{j,n} &= \langle P_j f, \phi_{j,n} \rangle \\ &= \langle f, \phi_{j,n} \rangle \\ &= \langle f, \sum_k h_k \phi_{j-1,2n+k} \rangle \\ &= \sum_k \bar{h}_k \langle f, \phi_{j-1,2n+k} \rangle \\ &= \sum_k \bar{h}_k a_{j-1,2n+k}.\end{aligned}$$

Portanto, a passagem de $a_{j-1,\cdot} \mapsto a_{j,\cdot}$ é dada pela seguinte relação

$$a_{j,n} = \sum_k \bar{h}_k a_{j-1,2n+k} = \sum_k \overline{h_{k-2n}} a_{j-1,k}. \quad (42)$$

Seja Q_j a projeção ortogonal sobre W_j , então, $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \langle Q_j f, \psi_{j,k} \rangle$, assim, se fizermos $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$, então,

$$Q_j f = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}. \quad (43)$$

Substituindo-se (38) em (43) e multiplicando-se o resultado escalarmente por $\psi_{j,n}$, temos

$$\begin{aligned}
 d_{j,n} &= \langle Q_j f, \psi_{j,n} \rangle \\
 &= \langle f, \psi_{j,n} \rangle \\
 &= \langle f, \sum_k g_k \phi_{j-1,2n+k} \rangle \\
 &= \sum_k \overline{g_k} \langle f, \phi_{j-1,2n+k} \rangle \\
 &= \sum_k \overline{g_k} a_{j-1,2n+k},
 \end{aligned}$$

o que nos dá a seguinte recursão $d_{j-1,\cdot} \mapsto d_{j,\cdot}$:

$$d_{j,n} = \sum_k \overline{g_k} a_{j-1,2n+k} = \sum_k \overline{g_{k-2n}} a_{j-1,2n+k}. \quad (44)$$

Observação 4.1 *Na passagem $j-1 \rightarrow j$, f perde-se a resolução por um fator de 2. A nova versão de baixa resolução de f , que é a projeção de f sobre V_j , é obtida a partir dos coeficientes $a_{j,n}$ e os detalhes correspondentes a esta perda, ou seja, a diferença das projeções de f sobre V_{j-1} e V_j , respectivamente, são armazenados nos coeficientes $d_{j,n}$.*

Dados $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, como $\|P_j f - f\|_2 \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow -\infty$, existe um $j_o \in \mathbb{Z}$ tal que $\|P_{j_o} f - f\|_2 < \epsilon$; assim, há uma escala mais fina, j_o , com a qual começaremos, poderíamos até mesmo supor que a função inicial $f \in V_{j_o}$. O nosso ponto de partida será a seqüência $a_{j_o,k} = \langle f, \phi_{j_o,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\phi_{j_o,k}(x)} dx$, a qual poderá ser determinada, por exemplo, por integração numérica o que requer o conhecimento de ϕ (veja na Observação 2.2 como evitar isso). Em [1, 6], são descritos algoritmos rápidos para se calcular numericamente ϕ .

Observação 4.2 *Vimos que no primeiro passo do algoritmo acima precisamos dos valores de ϕ , pois, $a_{j_o,k} = \langle f, \phi_{j_o,k} \rangle$. Em muitos casos, como por exemplo, para as wavelets de Daubechies, não existe uma fórmula analítica fechada para $\phi(x)$ e $\psi(x)$ (exceto, para o caso trivial da wavelet de Haar). No entanto, conforme havíamos mencionado, existem algoritmos rápidos para se calcular ϕ com uma precisão arbitrária e em tais algoritmos, como nos descritos acima, precisamos apenas dos coeficientes h_n . No caso do processamento de imagens que descreveremos na Seção 5, podemos tomar $j_o = 0$ como sendo a escala mais fina e seqüência inicial $a_{0,k}$, representa os valores dos pixels da imagem.*

Tudo que precisamos é de uma tabela com os valores de h_k para começarmos um trabalho numérico concreto. Nem a função escala ϕ nem a wavelet mãe ψ precisam ser armazenadas, seja numericamente ou não.

A seguir, veremos como reconstruir f a partir de seus coeficientes de wavelets. De (36), temos

$$P_{j-1}f = P_j f + Q_j f = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}. \quad (45)$$

De um lado, temos $a_{j-1,n} = \langle P_{j-1}f, \phi_{j-1,n} \rangle$. Por outro lado, de (45), (39) e (40), temos

$$\begin{aligned} \langle P_j f, \phi_{j-1,n} \rangle &= \left\langle \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \right\rangle \\ &= \sum_k a_{j,k} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle + \sum_k d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle \\ &= \sum_k a_{j,k} h_{n-2k} + \sum_k d_{j,k} g_{n-2k}, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$a_{j-1,n} = \sum_k h_{n-2k} a_{j,k} + \sum_k g_{n-2k} d_{j,k}. \quad (46)$$

5 Aplicações

5.1 A Necessidade da Compressão de Dados

Como sabemos, a quantidade de informações armazenadas, transmitidas e manuseadas por computadores tem crescido exponencialmente nas últimas décadas. Dois desenvolvimentos recentes têm contribuído para este efeito, um deles é o surgimento dos sistemas de multi-mídia juntamente com suas numerosas aplicações. O tempo em que o computador manuseava apenas texto e números já se passou e foi substituído pela era dos sons, imagens, filmes e realidade virtual. Outro desenvolvimento é a crescente disponibilidade da internet que fez com que tais informações estivessem à disposição de uma quantidade enorme de usuários. Este dois desenvolvimentos resumem-se no chamado “World Wide Web”, um sistema interativo e de multi-mídia baseado na informação.

Este desenvolvimento só foi possível por causa da rápida evolução dos hardwares. O desempenho das CPU's, discos e canais de transmissão têm crescido enormemente. Mesmo assim temos alguns problemas e para entendermos melhor mencionaremos os seguintes fatos:

1. Para armazenar uma imagem moderadamente grande, digamos com 512×512 pixels e 24 bit de cor, requer cerca de 0.75 MBytes. Um vídeo de sinal tipicamente tem 30 imagens por segundo.
2. Uma fotografia padrão de 35 mm digitalizada a uma resolução de $12 \mu m$ requer 18 MBytes.
3. Um segundo de vídeo colorido NTSC requer 23 MBytes.

Isto mostra que os atuais hardwares são inadequados (ou tecnicamente ou economicamente). As técnicas de compressão fornecem uma solução.

Se pudermos representar a informação numa forma comprimida, podemos obviamente: economizar espaço, tempo de cpu e tempo de transmissão.

A maioria da informação que usamos é altamente correlacionada, em outras palavras, ela inerentemente contém redundância; portanto, parece ser possível compressão sem perda de informação. O requerimento básico da compressão é que se possa mudar rapidamente dos dados originais aos comprimidos e vice-versa.

5.1.1 A Idéia Geral Por Trás da Compressão Via Wavelets

Existem dois tipos de esquemas de compressão: com perda e sem perda.

No caso de compressão sem perda, estamos interessados em reconstruir os dados exatamente, sem qualquer perda de informação, como nos arquivos de texto.

No caso de compressão com perda, permitimos um erro, desde que a qualidade depois da descompressão seja aceitável. O esquema de compressão com perda tem a vantagem que podemos atingir fatores de compressões muito maiores do que nas compressões sem perda; entretanto, ele só pode ser usado no caso em que pode-se substituir os dados originais por uma aproximação que seja fácil de se comprimir. Temos que ser específicos no que significamos uma representação “aceitável”. Por exemplo, na compressão de imagens, uma aproximação aceitável de uma imagem é uma que seja visualmente indistinguível da imagem original.

Nesta seção consideraremos a aplicação de wavelets ao problema de compressão de dados. Este, sem dúvida, é um assunto de suma importância nos dias atuais, visto que em todos momentos temos que receber ou enviar uma enorme quantidade de dados que podem, por exemplo, ser arquivos de uma imagem ou de um áudio, digitais.

A idéia por trás de qualquer esquema de compressão é a de se remover a correlação presente nos dados. Dados correlacionados são caracterizados pelo fato que a partir de uma parte dos dados, podemos preencher a parte que esteja faltando. Existem vários tipos de correlações, daremos alguns exemplos:

1. Correlação espacial: pode-se freqüentemente predizer o valor de um pixel numa imagem olhando-se para os pixels vizinhos.
2. Correlação espectral: A transformada de Fourier de um sinal é geralmente suave, isto significa que pode-se freqüentemente predizer uma componente de freqüência olhando-se para as freqüências vizinhas.
3. Correlação temporal: Num video digital, a maioria dos pixels de duas imagens mudam muito pouco na direção do tempo.

A idéia é de se representar os dados usando-se uma base matemática diferente na esperança que esta nova representação revelará ou não a correlação. Com isto queremos dizer que nesta nova base a maioria dos coeficientes são muito pequenos. Assim, a compressão é alcançada calculando-se a transformada associada a esta base, fazendo-se os coeficientes menores do que um certo limiar iguais a zero. A informação será, portanto, caracterizada por um pequeno número de coeficientes.

Na prática procura-se uma transformada que tenha as seguintes propriedades:

1. Seja independente dos dados.
2. Exista um algoritmo rápido (linear ou linear-logaritmico) para calculá-la.

3. Seja capaz de remover a correlação para um conjunto grande e geral de dados.

Um candidato possível para uma transformada é a transformada de Fourier rápida. Ela definitivamente tem as duas primeiras propriedades; entretanto, não possui a terceira propriedade. A base é perfeitamente local na frequência, mas de maneira alguma local no tempo. Portanto, ela é incapaz de revelar correlação local no tempo. A maioria dos sinais tem correlação local na frequência e no espaço. Precisamos uma base adaptada a este comportamento, mais precisamente, precisamos uma base que seja local no tempo e na frequência. Existem duas maneiras de se construir tais bases:

1. Divide-se o domínio espacial em pedaços e usamos uma série de Fourier em cada pedaço separadamente. Desta forma, obtém-se uma base trigonométrica local.
2. Pode-se usar uma base de wavelets.

Ambos os métodos resultam numa transformada que é independente dos dados, rápida e que nos conduz a uma representação compacta para um enorme e geral conjunto de dados.

Para termos uma idéia de como a compressão ocorre na representação de wavelets, basta darmos uma olhada na relação (44): os coeficientes de wavelets, $d_{j,k}$, medem as flutuações locais dos valores dos “pixels” na escala j , pois, ao calcularmos estes, o fazemos como uma combinação linear cuja soma dos coeficientes é $\sum_k g_k = 0$, de modo que a referida combinação linear será nula quando os valores de “pixels” adjacentes forem iguais e pequenos quando os valores destes forem próximos (isto ocorre numa imagem típica, devido às correlações locais no espaço). Assim, os valores de $d_{j,k}$ são pequenos em regiões de suavidade de uma função. Com isso eles podem ser usados para caracterizar a regularidade de uma função, localmente.

Para vermos que $\sum_k g_k = 0$, temos que usar o fato que uma wavelet ψ e a sua função escala associada, ϕ , satisfazem $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \neq 0$. Portanto, integrando-se (34) sobre a reta real, temos $0 = (\sum_k g_k) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$.

Numa imagem típica o que se vê são regiões enormes onde os valores dos pixels são iguais ou muito próximos, o que significa que os coeficientes de wavelets a elas associadas ou são nulos ou desprezíveis. Somente em regiões de transições, próximas aos contornos separando as regiões onde os valores dos “pixels” variam muito, é que teremos uma flutuação local significativa nos valores dos “pixels”, portanto, coeficientes de wavelets apreciáveis.

5.2 Processamento de Imagens Digitais

Existem diferentes sistemas para se representar uma imagem. No sistema *RGB*, uma imagem digital é caracterizada atribuindo-se a cada *pixel*, um vetor com três componentes, cada uma das quais representando as intensidades das cores vermelho, verde e azul, respectivamente. O valor de cada componente é um número inteiro entre 0 e 255. No caso de uma imagem em preto e branco, as três componentes são iguais e a imagem é completamente caracterizada pelo escalar, que é o valor comum das três intensidades.

Dada uma função f em V_0 , ela pode ser escrita de maneira única como

$$f(x) = \sum_k a_{0,k} \phi(x - k) \quad (47)$$

e de (27) podemos reescrevê-la como

$$f(x) = f_J(x) + \sum_{j=1}^J \Delta_j(x), \quad (48)$$

onde $f_J \in V_J$ e $\Delta_j \in W_j$, portanto, $f_J(x) = \sum_k a_{J,k} \phi_{J,k}$ e $\Delta_j(x) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x)$, onde os coeficientes $a_{J,\cdot}$ e $d_{j,\cdot}$ são calculados recursivamente a partir de $a_{0,\cdot}$, por meio das relações (42) e (44).

De maneira análoga, se conhecermos os coeficientes $a_{J,\cdot}$ e $d_{j,\cdot}$, $j = 1, \dots, J$, podemos, a partir de (46), recursivamente, calcular os $a_{0,\cdot}$ e reconstruir a função f , dada em (47).

Dada uma imagem digital unidimensional, em preto e branco, com 2^l *pixels*, onde l é um inteiro não-negativo, sejam $\{a_{0,k}\}_{k=0, \dots, 2^l-1}$ os valores de cada um dos seus *pixels*. Associamos a esta imagem a seguinte função em V_0 : $f(x) = \sum_k a_{0,k} \phi(x - k)$. Com tal definição, os algoritmos acima nos permitem calcular os coeficientes de wavelets de f , $d_{j,k}$, $j = 1, \dots, J = 2^l$ e os coeficientes $a_{J,k}$. Ao projetarmos f sobre um dos subespaços V_j , o que estamos fazendo é obter uma versão de baixa resolução de f , reduzimos a resolução por um fator de 2^j e ao passarmos de V_j para V_{j+1} perdemos a resolução por um fator de 2 e os detalhes que perderíamos são representados por Δ_j . Assim, ao decompor f de acordo com (48), o que fazemos é obter uma versão da imagem onde todos os *pixels* possuem o mesmo valor, que é a “média” de todos os *pixels*, mais detalhes correspondentes às escalas intermediárias.

Sob o ponto de vista computacional, começamos com uma imagem unidimensional com 2^l *pixels*, armazenada num vetor A , com 2^l posições. No primeiro passo passamos de V_0 para V_1 , usando-se as relações (42) e (44), geramos 2^{l-1} coeficientes $\{a_{1,k}\}_{k=0}^{2^{l-1}-1}$ e 2^{l-1} coeficientes $\{d_{1,k}\}_{k=0}^{2^{l-1}-1}$; fazemos $A[k] = a_{1,k}$, para $k = 0, \dots, 2^{l-1} - 1$ e $A[2^{l-1} + k] = d_{1,k}$, para $k = 0, \dots, 2^{l-1} - 1$. Com isso, temos uma imagem de baixa resolução, $f_1 \in V_1 \subset V_0$, com resolução diminuída por fator de dois, armazenada nas primeiras 2^{l-1} posições de A , nas posições seguintes estão os detalhes, correspondentes a passagem de V_0 para V_1 , que é a projeção de f sobre W_1 . Podemos repetir este processo a f_1 e partindo-se de seus coeficientes $\{a_{1,k}\}_{k=0}^{2^{l-1}-1}$ e das relações (42) e (44) e encontrarmos os coeficientes $\{a_{2,k}\}_{k=0}^{2^{l-2}-1}$ e $\{d_{2,k}\}_{k=0}^{2^{l-2}-1}$; estes serão armazenados nas 2^{l-1} primeiras posições de A , sendo que $A[k] = a_{2,k}$ para $k = 0, \dots, 2^{l-2} - 1$ e $A[2^{l-2} + k] = d_{2,k}$, para $k = 0, \dots, 2^{l-2} - 1$. Nas primeiras 2^{l-2} posições de A temos a versão de f , $f_2 \in V_2 \subset V_0$, onde a resolução foi diminuída por um fator 2, em relação à versão anterior, nas posições seguintes os detalhes correspondentes às escalas intermediárias, em ordem decrescente. Repetindo-se o processo l vezes, na l -ésima vez, a partir da versão $f_{l-1} \in V_{l-1} \subset V_0$ de f e das relações (42) e (44), obtemos $a_{l,0}$ e $d_{l,0}$ que serão armazenados em $A[0]$ e $A[1]$, respectivamente. Com isso teremos passado de um vetor A para um vetor CW ,

sendo que neste temos os coeficientes de wavelets de f . Cada passo no processo acima pode ser implementado por uma matriz invertível (ortogonal, nos exemplos que consideraremos), o que significa que podemos a partir do vetor CW obter o vetor A e, portanto, reconstruir a imagem.

No caso de uma imagem colorida, os coeficientes acima $a_{j,k}$ e $d_{j,k}$ serão vetores com três componentes e aplicamos o procedimento acima a cada componente, separadamente.

Imagine que tenhamos uma imagem com $2^l \times 2^l$ pixels, a qual pode ser armazenada numa matriz quadrada, $A[i, j]$, $i, j = 0, \dots, 2^l - 1$. Neste caso, tratamos cada linha ou coluna como se fosse uma imagem unidimensional, aplicando-se o processo acima no cálculo dos coeficientes de wavelets.

Existem dois tipos de decomposições de imagens digitais: a **padrão** e a **não-padrão**, que descreveremos abaixo.

5.2.1 A Decomposição Padrão

Na decomposição padrão, no primeiro passo, associamos a cada linha da imagem uma função em V_0 , conforme foi descrito acima, em seguida, para cada linha calculamos os coeficientes de wavelets. A seguir, associamos a cada uma das colunas transformadas no processo anterior uma função em V_0 e aplicamos o processo acima às mesmas e obtemos os respectivos coeficientes de wavelets. Note que em $A[0, 0]$ está a “média” dos *pixels*, nas demais posições estão armazenados os coeficientes de wavelets, propriamente ditos. Como estas operações são invertíveis, podemos inverter o processo de decomposição e reconstruir a imagem inicial.

5.2.2 A Decomposição Não-Padrão

Na decomposição não-padrão, veja Figura 4, aplicam-se operações em linhas e colunas alternadamente. Associamos à cada linha da imagem uma função em V_0 ; a seguir, decompomos cada linha aplicando-se apenas um passo no processo descrito na passagem de V_0 para $V_1 \oplus W_1$, depois, tratamos cada coluna resultante como se fosse uma função em V_0 e as decompomos, como feito no passo anterior, onde as linhas foram substituídas pelas colunas. No passo seguinte tomaremos a versão de baixa resolução da imagem original a qual está armazenada numa submatriz, de A , restrita aos $A[i, j]$ com $i, j = 0, \dots, 2^{l-1} - 1$ (nas demais posições teremos os coeficientes de wavelets). A seguir, repetimos o processo à versão de baixa resolução da imagem obtida no passo anterior e teremos uma submatriz de A , restrita a $A_1[i, j]$ com $i, j = 0, \dots, 2^{l-2} - 1$, na qual está uma nova versão de baixa resolução da imagem (nas demais posições os coeficientes de wavelets). Prosseguindo desta forma, após, l passos, encontraremos uma submatriz de A , formada por $A[0, 0]$ contendo a “média” de todos os *pixels* e nas demais posições estarão os coeficientes de wavelets.

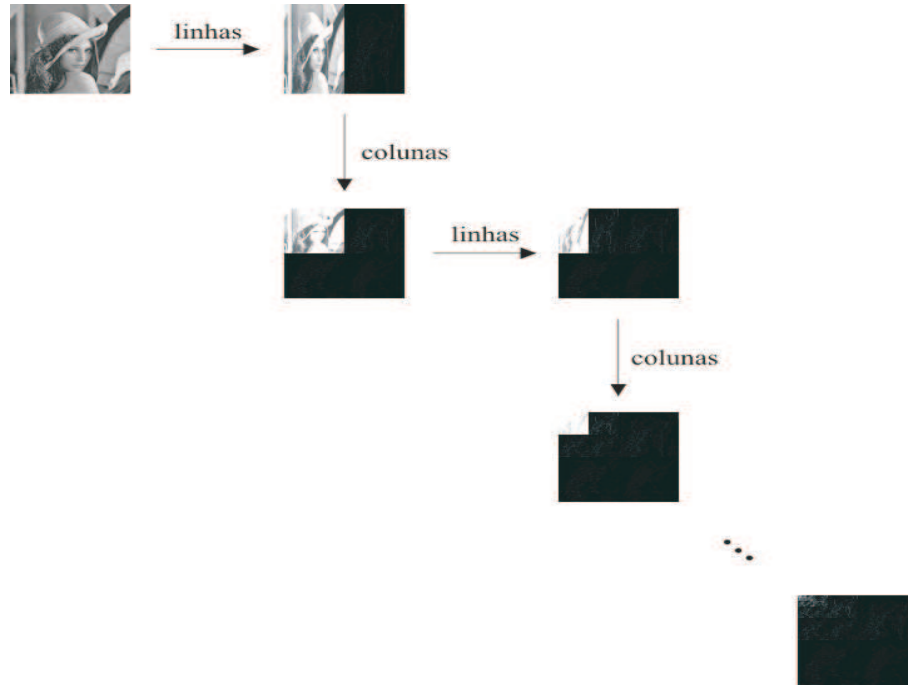


Figura 4: A Decomposição Não-Padrão

5.2.3 Implementação para as Wavelets de Haar e Daub4

Vimos que quando consideramos uma imagem digital (bi-dimensional), para calcularmos seus coeficientes de wavelets tratamos suas linhas e suas colunas como se fossem “imagens unidimensionais”, onde uma imagem unidimensional, digamos com 2^l de pixels é a seqüência numérica $\{a_{0,k}\}_{k=0,\dots,2^l-1}$ com os valores dos pixels, ou se preferirmos, a função $f(x) = \sum_{k=0}^{2^l-1} a_{0,k} \phi(x - k)$ em V_0 .

Veremos como implementar a passagem de V_{j-1} para $V_j \oplus W_j$ ($j = 1, \dots, l$), para as wavelet de Haar e Daub4.

No j -ésimo passo, o vetor $a_{j-1} = (a_{j-1,0}, \dots, a_{j-1,2^{l-j+1}-1})$, é transformado no vetor em

$$(a_{j,0}, \dots, a_{j,2^{l-j}-1}, d_{j,0}, \dots, d_{j,2^{l-j}-1}) \equiv Q_j a_{j-1}. \quad (49)$$

Onde a matriz Q_j é obtida através das relações (42) e (44). Para a wavelet de Haar, Q_j é a seguinte matriz de ordem 2^j :



Figura 5: Reconstrução com a wavelet Daub4

os coeficientes de wavelets $d_{j,k}$, juntamente com com a “média” dos *pixels*, $a_{l,0}$; se preferirmos, passamos da representação $f(x) = \sum_{k=0}^{2^l-1} a_{0,k} \phi(x-k)$ para

$$f(x) = a_{l,0} \phi_{l,0}(x) + \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{2^{l-j}-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$

onde ϕ é a função escala associada a wavelet ψ , que no presente caso pode ser a wavelet de Haar ou Daub4.

A Figura 5 mostra a reconstrução de uma imagem usando-se diferentes porcentagens de seus coeficientes de wavelets. Note que mesmo usando-se cerca de 5 por cento dos coeficientes de wavelets a reconstrução é visivelmente perfeita.

O autor gostaria de agradecer ao CNPq e à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] Ingrid Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS - NSF Regional Conferences Series in Applied Mathematics, 1992.
- [2] A. Haar, *Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme*, Math. Ann, **69**, pp. 331-371, 1910.
- [3] J. C. van den Berg, *Wavelets in Physics*, Cambridge Press, 1999.
- [4] Ingrid Daubechies, *Orthonormal Basis of Compactly Supported Wavelets*, Comm. Appl. Math., **41**, pp. 909-996, 1988. G.
- [5] Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin, *Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I*, Communications in Pure and Applied Mathematics, volume XLIV, 141-183, 1991.
- [6] Paulo Cupertino de Lima, *Wavelets: Teoria, Algoritmos e Aplicações*, em preparação.