FUNDAMENTOS DE FÍSICA I

Wagner Corradi
Rodrigo Dias Társia
Wanderson Silva de Oliveira
Sérgio Luiz Araújo Vieira
Maria Carolina Nemes
Karla Balzuweit

FUNDAMENTOS DE FÍSICA I

Belo Horizonte
Editora UFMG
2010

F981 Fundamentos de Física I / Wagner Corradi ...[et al.]. – Belo Horizonte : Editora UFMG, 2010
514 p. – il (Educação a Distância)

Outros autores: Rodrigo Dias Társia, Wanderson Silva de Oliveira, Sérgio Luiz Araújo Vieira, Maria Carolina Nemes, Karla Balzuweit.
Inclui referências.
ISBN: 978-85-7041-852-4

1. Física – Estudo e ensino. 2. Mecânica. 3. Gravitação.
I. Corradi, Wagner. II. Társia, Rodrigo Dias. III. Oliveira, Wanderson Silva de. IV. Vieira, Sérgio Luiz Araújo. V. Nemes, Maria Carolina . VI. Balzuweit, Karla. VII. Série.

CDD: 530
CDU: 53

Elaborada pela DITTI – Setor de Tratamento da Informação
Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

COORDENAÇÃO EDITORIAL Danivia Wolff
ASSISTÊNCIA EDITORIAL Eliane Sousa e Euclídia Macedo
COORDENAÇÃO DE TEXTOS Maria do Carmo Leite Ribeiro
PREPARAÇÃO DE TEXTOS Michel Gannam
REVISÃO DE PROVAS Juliana Santos e Nathalia Campos
COORDENAÇÃO GRÁFICA Cássio Ribeiro
PROJETO GRÁFICO E CAPA Eduardo Ferreira
FORMATAÇÃO Sérgio Luz
PRODUÇÃO GRÁFICA Diêgo Oliveira

EDITORA UFMG
Av. Antônio Carlos, 6.627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4650 - Fax: + 55 31 3409-4768
www.editora.ufmg.br - editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
Av. Antônio Carlos, 6.627 - Reitoria - 6º andar
Campus Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte - MG
Tel.: + 55 31 3409-4054 - Fax: + 55 31 3409-4060
www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

A Educação a Distância (EAD) é uma modalidade de ensino que busca promover inserção social pela disseminação de meios e processos de democratização do conhecimento. A meta é elevar os índices de escolaridade e oferecer uma educação de qualidade, disponibilizando uma formação inicial e/ou continuada, em particular a professores que não tiveram acesso a esse ensino.

Não se pode ignorar que é fundamental haver, sempre, plena conexão entre educação e aprendizagem. A modalidade a distância é um tipo de aprendizagem que, em especial na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), já está concretizada como um ensino de qualidade. Hoje, a aprendizagem tornou-se, para todos os profissionais dessa universidade envolvidos no programa de Educação a Distância, sinônimo de esforço e dedicação de cada um.

Este livro visa desenvolver no curso a distância os mesmos conhecimentos proporcionados num curso presencial. Os alunos estudarão o material nele contido e muitos outros, que lhes serão sugeridos em bibliografia complementar. É importante terem em vista que essas leituras são de extrema importância para, com muita dedicação, avançarem em seus estudos.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas e cada uma delas trata de determinado tema, que é explorado de diferentes formas – textos, apresentações, reflexões e indagações teóricas, experimentações ou orientações para atividades a serem realizadas pelos alunos. Os objetivos propostos nas aulas indicam as competências e habilidades que os alunos, ao final da disciplina, devem ter adquirido.

Os exercícios indicados ao final das aulas possibilitam aos alunos avaliarem sua aprendizagem e seu progresso em cada passo do curso. Espera-se, assim, que eles se tornem autônomos, responsáveis, críticos e decisivos, capazes, sobretudo, de desenvolver a própria capacidade intelectual. Os alunos não podem se esquecer de que toda a equipe de professores e tutores responsáveis pelo curso estará, a distância ou presente nos polos, pronta a ajudá-los. Além disso, o estudo em grupo, a discussão e a troca de conhecimentos com os colegas serão, nessa modalidade de ensino, de grande importância ao longo do curso.

Agradeço aos autores e à equipe de produção pela competência e pelo empenho e tempo dedicados à preparação deste e dos demais livros dos cursos de EAD. Espero que cada um deles possa ser valioso para os alunos, pois tenho certeza de que vão contribuir muito para o sucesso profissional de todos eles, em seus respectivos cursos, e na educação em todo o país.

Ione Maria Ferreira de Oliveira

Sumário

Prefácio

A elaboração deste livro nasceu da necessidade de se produzir um material didático adequado ao Ensino a Distância (EAD) das disciplinas de física básica na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Ele foi construído a partir de um conjunto de textos que vêm sendo utilizados e aprimorados durante vários anos no projeto-piloto de EAD do Departamento de Física da UFMG (DF-UFMG).

Acreditamos que para se fazer EAD não basta disponibilizar o material na internet, em um sítio muito colorido e com várias animações. É preciso que se tenha um material impresso de boa qualidade, com uma organização adequada, concatenação e sequência lógica das ideias, numa linguagem coerente e acessível ao estudante. Sem isso, é quase impossível aprender física estudando de maneira autônoma.

Há ainda a necessidade de se fornecer acesso ao material didático independente da disponibilidade de um computador, já que nem sempre o acesso aos recursos computacionais é possível. Mesmo quando há essa disponibilidade, é difícil aprender física na frente do computador apenas lendo os textos durante horas e acessando os links disponíveis.

A utilização de um livro voltado para o ensino presencial requer um professor que pondere a linguagem do material, acrescente toda sua experiência e modere o ritmo de estudo em sala de aula. Sem essa intervenção você não teria como saber, de antemão, qual ritmo de estudos deveria seguir em cada capítulo ou seção do livro. Já no EAD, o livro deve suprir a falta do professor, agindo como um roteiro de estudo. Para tanto, ele deve ser dividido em aulas, que contenham mais subdivisões do conteúdo. No fundo, uma tentativa de se colocar no papel o que o professor faria na sala de aula.

Mas lembre-se: este livro não deve ser sua única referência bibliográfica. O material já consagrado no ensino presencial é uma fonte imprescindível para o completo aprendizado de física básica, mesmo porque é inegável a forte influência destes textos na estrutura e organização desta obra.

Os tópicos aqui apresentados seguem a forma histórica. A física moderna é introduzida ao longo do texto sempre que possível ou conveniente. O nível matemático leva em conta que você já fez ou está fazendo um curso introdutório de cálculo. Durante o desenvolvimento das equações básicas, todos os passos são mostrados e a matemática é introduzida à medida que se faz necessária.

O trabalho de elaboração, adequação e preparação dos manuscritos e figuras que deram origem a este livro é de responsabilidade dos autores da presente obra. Grande parte desse esforço contou com a colaboração imprescindível dos estudantes de graduação e pós-graduação do DF-UFMG, em particular Marcelo Ângelo Diniz Alessio, Alexandre Ferreira de Freitas Lages e Gustavo Henrique Reis de Araújo Lima. Um agradecimento especial para Hugo José da Silva Barbosa, de 11 anos de idade, que desenhou a maioria das figuras do livro. Agradecemos ainda o suporte de nossos familiares, dos vários colegas do DF-UFMG e da Editora UFMG.

Os autores

Informações gerais

FUNDAMENTOS DE FÍSICA I NA MODALIDADE DE ENSINO A DISTÂNCIA

Nesta disciplina as atividades são propostas em várias unidades, divididas em aulas, conforme mostra a tabela abaixo. No início de cada aula você encontrará os objetivos. Eles querem dizer: "Ao final desta aula você deverá ser capaz de...". Certifique-se de ter atingido todos eles antes de passar para a próxima aula.

UNIDADES	
1. Um convite à compreensão da natureza	8. Sistemas de partículas
2. Movimento em uma dimensão	9. Forças impulsivas e colisões
3. Movimento em duas e três dimensões	10. Cinemática da rotação
4. Leis de Newton	11. Dinâmica de corpo rígido
5. Aplicações das leis de Newton	12. Leis de conservação para sistemas de partículas
6. Energia e trabalho	13. Equilíbrio de corpos rígidos
7. Energia potencial e conservação da energia	14. Gravitação

As atividades que se encontram ao longo do livro devem ser resolvidas no espaço em branco disponível ao lado do texto. As soluções de quase todas as atividades propostas estão no final de cada aula. Evite pular diretamente para as soluções, ou estará fadado ao insucesso. Há também um conjunto de questões teóricas, uma lista de exercícios de fixação e uma lista de problemas.

Os exercícios de fixação são considerados apenas a primeira parte do aprendizado, pois você deve entender bem os conceitos e princípios básicos antes de passar para a resolução dos problemas. Para obter sucesso nas avaliações, é importante resolver os problemas propostos. Neles você aplicará o que aprendeu em situações mais elaboradas que exigirão uma estratégia adequada para sua solução. O item "Pense e responda", propositalmente, não tem resposta. Ele tem a intenção de fazer você pensar um pouco mais sobre o assunto.

Lembre-se de que o estudo autônomo exige mais perseverança e muita dedicação, como em um curso presencial. Siga o cronograma da forma mais fiel possível, para evitar atropelos. Não ler as aulas e não fazer as atividades propostas é enganar a si mesmo.

Descubra seu ritmo de estudo e faça apenas o número de disciplinas que lhe permita ter bom rendimento. Lembre-se de que a UFMG permite um tempo de integralização curricular bem maior que os tradicionais quatro anos, caso seja necessário.

Ao longo dos vários anos de prática de ensino, curiosamente, chegamos a três ensinamentos que sintetizam bem as situações vividas pela maioria dos professores e estudantes de física. São eles:

- Ninguém ensina o que não sabe;
- Só se aprende o que se quer;
- Roda de carro apertada é que canta.

Sem saber o conteúdo não é possível ensinar a ninguém, no máximo repassar o conhecimento. Ainda, de nada adianta ter um ótimo professor se não houver interesse e vontade de aprender por parte do estudante. Por último, mas não menos importante, cada um sabe de seus problemas e de suas dificuldades, mas não há conquistas sem esforço.

Sucesso!

UNIDADE 1
Um convite à compreensão da natureza

Esta unidade tem a intenção de convidá-lo para uma jornada rumo à compreensão da natureza. Portanto, sinta-se convidado!

AULA 1

A física e a compreensão da natureza

Objetivos

- Discutir com seus colegas alguns aspectos históricos da mecânica newtoniana;
- Reconhecer os limites de validade das teorias físicas e as simplificações envolvidas;
- Descrever o que são as grandezas físicas, seus padrões e suas unidades;
- Entender o Sistema Internacional de Unidades e a notação científica;
- Fazer análise dimensional, conversão de unidades e estimar ordem de grandeza;
- Operar com algarismos significativos e expressar a incerteza de uma medida;
- Distinguir entre precisão e exatidão de uma medida e calcular o valor mais provável.

1.1 ALGUMAS RAZÕES PARA NÃO SE ESQUECER DA FÍSICA

Quase todo livro de física que conhecemos começa com um discurso sobre o quanto a física é bela e importante. Quanto a isso não restam dúvidas. Mas se a física é assim tão bacana e tão fundamental, por que será que as pessoas sempre nos dizem, educadamente, que "não gostam muito de física"? Normalmente a razão desse desencanto é consequência da dificuldade com a linguagem empregada (no caso, a matemática), e não com a física propriamente dita. Outras vezes o problema não é com a matemática, mas com o entendimento dos conceitos. Também, não é para menos, você deve se lembrar de ter passado horas discutindo sobre determinado assunto, escrevendo fórmulas e mais fórmulas no quadro, sem, contudo, ter feito o mais simples dos experimentos para observar o que acontece.

Por exemplo, você entende que velocidade média é o deslocamento durante um dado intervalo de tempo, sabe escrever que $v_m = \Delta x/\Delta t$, sabe que depende da direção e do sentido, mas não compreende exatamente o que isso significa. Faça então o seguinte experimento: escolha um local em sua casa que esteja ligado ao seu quarto por uma linha reta. Experimente andar do seu quarto até esse local, contando o número de passos e cronometrando o tempo gasto no percurso. Calcule agora sua velocidade média.

No nosso caso, para ir do quarto para o banheiro, foram percorridos 10 passos durante um intervalo de tempo de 10 segundos. Logo, a velocidade média foi de um passo por segundo. Mas, velocidade é uma grandeza vetorial. Quer dizer, depende da direção e do sentido. Como assim? Se o objetivo fosse tomar um banho, andar um passo por segundo na “direção” quarto-cozinha não serviria. Também não adiantaria estar na direção correta, quarto-banheiro, seria preciso andar no “sentido” correto: do quarto para o banheiro.

Como se pode ver, **para aprender física é preciso vivenciar a física**. E é com esse intuito que gostaríamos de lhe convidar para uma jornada fascinante rumo ao entendimento do comportamento da natureza e, consequentemente, da própria física. Mesmo porque você já vivencia a física em seu dia a dia. Vamos lembrar algumas situações em que isso ocorre.

Imagine como seria comprar uma calça ou um sapato, se em cada lugar que você chegasse o número 37 dependesse do tamanho do pé do prefeito. Como seriam as relações comerciais entre os países? E a comparação entre os trabalhos científicos? Pois é, o Sistema Internacional de Unidades estabelece os padrões de comprimento, tempo e massa que permitem uma uniformização das medições em todo o mundo.

Será que você conseguiria chegar a tempo em seu trabalho sem levar em conta o tempo necessário para o **deslocamento** de sua casa até o local de trabalho? E sem levar em conta a **velocidade média** dos automóveis no horário de pico do trânsito em sua cidade? Você já experimentou descer de um ônibus em movimento? Por sua própria experiência, já sabe que sua **velocidade relativa** ao chão é maior, portanto precisará aumentar o ritmo de sua passada quando colocar o pé no chão, ou acabará caindo.

Seria possível andar se não houvesse **atrito**? Experimente correr de meias sobre um chão bem encerado e depois sobre um piso bem grosso. Percebeu como a rugosidade do piso interfere? Tente agora abrir a porta de sua casa empurrando-a próximo à maçaneta e depois próximo à dobradiça. Qual é o jeito mais fácil? Aplicar uma força mais longe do ponto de rotação gera maior **torque**, portanto, menor força para se realizar o mesmo movimento.

É mais fácil frear um carro ou um caminhão andando à mesma velocidade? Todo mundo sabe que é o carro. Isso mesmo, precisa se fazer menos força para frear o objeto com menor **momentum** ou **quantidade de movimento**.

Uma brincadeira que sempre fazemos com os alunos novatos no laboratório é pedir a eles que fervam um pouco de água até 110 °C. Depois de um bom tempo fervendo a água eles voltam dizendo: “Professor, o termômetro não passa de 100 °C !!!!” E nós respondemos: "Por que será?" Pior seria ter de tomar remédio para febre toda vez que alguém resolvesse “medir” sua **temperatura** com a mão.

Você já viu um ovo que tenha espatifado no chão, espontaneamente, fazer o movimento inverso e voltar, inteirinho, para cima da mesa? Você já vivenciou uma situação em que todo o ar da sala, sozinho, resolve ficar num só canto? Pois é, como a probabilidade de certos eventos ocorrerem é infinitamente pequena, os fenômenos naturais ocorrem de forma irreversível, como se existisse uma linha do tempo. Como os físicos costumam dizer, a **entropia**, grandeza física que tenta mensurar essas probabilidades, sempre aumenta em processos naturais.

Poderíamos continuar por várias páginas, mas já foi suficiente. Reforçamos então nosso convite para que você continue a sua leitura desta aula, cujo objetivo é apresentar alguns aspectos do contexto histórico e das questões e ferramentas que levaram os cientistas à construção dessa tão bem-sucedida teoria, que é a mecânica Newtoniana. Esse, certamente, é o ponto de partida para que você aprecie mais a física e deseje aprofundar ainda mais seus estudos.

Nossa ideia é ilustrar, com situações reais vividas pelos estudiosos, como é importante aprender, com cuidado, a usar ferramentas que parecem, à primeira vista, tão longe dos objetivos finais. Por exemplo, por que foi crucial para o entendimento da órbita dos planetas em torno do Sol o conhecimento dos algarismos significativos, unidades e dimensões? Como tentaremos expor adiante utilizando o episódio da verificação da órbita de Marte por Kepler, a partir das observações de Tycho Brahe, foi absolutamente fundamental conhecer a precisão da medida. Isso fez a diferença entre a previsão de uma órbita circular e elíptica. Mas vamos mais para trás na História.

1.2 A FÍSICA E A COMPREENSÃO DA NATUREZA

A compreensão da natureza, em especial durante os primórdios da civilização, foi fortemente impulsionada pelas necessidades materiais e sociais do homem. Dada a escassez de informações da época, o que faremos a seguir é oferecer nossa própria visão de como teria sido o despertar da curiosidade pelo desenvolvimento de objetos e/ou ideias mais abstratas do que as oferecidas pela própria natureza na época.

Uma ilustração possível é o que aconteceu na região da Mesopotâmia, entre o Rio Eufrates e o Rio Tigre. Devido à fertilidade da região entre esses rios, foram surgindo pequenas aldeias em suas margens, e o homem começou a deixar de ser nômade, exigindo-se uma convivência social. Em primeiro lugar foi preciso aprender a plantar e a criar rebanhos. Para inventariar seus bens, a memória, certamente, deixou de ser eficiente, levando à invenção de símbolos gravados em blocos de barro, que representavam os bens tanto em qualidade quanto em quantidade. Essa necessidade concreta deu origem à escrita cuneiforme.

A proximidade e a convivência social deram origem à troca de mercadorias entre indivíduos. Surgiu então a necessidade de um sistema contábil, bem como o estabelecimento de regras regulamentando o princípio de trocas. Se um dono de rebanho quisesse adquirir dois bois, teria que dar quantas ovelhas? Um boi muito grande e gordo equivaleria a quantos bois magros? Eis aí um importante problema que impulsionou a matemática. Da necessidade de contar e de enumerar os objetos teve origem a aritmética. O estudo do peso, volume e densidade dos corpos passou a ser importante no comércio, dado que várias mercadorias eram assim avaliadas.

A economia foi também a grande geradora da necessidade de conhecimento da álgebra! Na Babilônia, por exemplo, a exponenciação já era conhecida e utilizada para o cálculo de juros. A geometria, ramo mais antigo da matemática, teve sua origem provavelmente situada no período neolítico. Foi no Antigo Egito e na Mesopotâmia, porém, onde ela teve o seu maior desenvolvimento. Por quê? É fácil imaginar: surgiu a necessidade de se medir distâncias, arcos e ângulos com o objetivo de demarcação de territórios, por exemplo. Posteriormente, a medição de ângulos se estendeu para a astronomia.

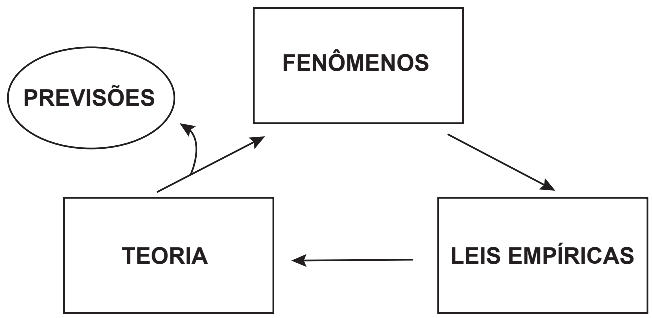
A mecânica surgiu de forma bastante análoga e natural quando o homem começou a acompanhar o movimento dos astros. Inclusive, do ponto de vista social, começava a ficar importante estabelecer o tempo: o dia, a noite, o frio, o calor, as enchentes, as secas, as marés, as fases lunares e as estações – que se repetem regularmente e acabaram por fazer parte do cotidiano coletivo.

Surgiu assim, aos poucos, a necessidade de se elaborar um calendário que disciplinasse não somente o trabalho coletivo, como a semeadura, a colheita e a estocagem dos alimentos, mas também a organização das atividades religiosas e lúdicas.

Enfim, com a construção das primeiras cidades da Mesopotâmia e do Egito e com a necessidade de se deslocar grandes volumes de massa para a construção de templos, palácios e sepulcros, surgiram as primeiras máquinas simples, como alavancas e planos inclinados, cuja utilização e descrição dão origem ao termo “mecânica”, em grego.

1.2.1 O comportamento da natureza: a física e a matemática

A física é a ciência que procura **compreender** e **descrever** as leis que regem o comportamento da natureza. A construção da maior parte das teorias físicas, dentre elas a mecânica, segue o seguinte padrão esquemático:



Fenômenos

A maior parte dos fenômenos característicos da mecânica Newtoniana é visível a olho nu e assim que o homem começou a viver em agrupamentos a observação sistemática de alguns fenômenos, como discutimos, foi essencial para a sobrevivência do grupo.

Muito mais tarde, a curiosidade sobre os planetas e suas órbitas levou Tycho Brahe, aristocrata de muitas posses, a fazer um mapa do movimento de todos os corpos celestes que conseguia observar com seu telescópio. Extremamente perfeccionista e meticuloso, seus números referentes à posição de objetos celestes tinham uma incrível precisão, limitada apenas pelo aparato experimental. No que se refere, por exemplo, à órbita de Marte, a precisão angular era de 1° (um grau). O que quer dizer isso? Quer dizer que, **até esse limite**, uma descrição teórica daquelas observações deve ser condizente com esses dados.

Leis empíricas

Devido a problemas político-religiosos, Johannes Kepler foi obrigado a deixar a Itália e recebeu um auxílio para trabalhar com Tycho Brahe na descrição analítica da órbita de Marte. Nessa altura da história, a influência das ideias de perfeição na religião e nas ciências, advinda de Platão, ainda estava impregnada nas mentes mais iluminadas, e um dos símbolos dessa perfeição era o círculo. Por isso, Kepler passou cinco anos de sua vida tentando ajustar círculos nos dados observacionais de Tycho Brahe.

Mas dentro da precisão dos dados isso era impossível. Até certo grau de precisão, os algarismos que localizavam as órbitas eram todos significativos, de modo que deveriam pertencer à curva de Kepler.

Após cinco anos tentando a "perfeição", Kepler descobriu (muito por causa da crença inabalável nos dados do colega) que as órbitas eram elípticas, contendo o Sol num dos focos. De repente, aquela miríade de números obtidos por Tycho Brahe começava a se unificar em torno de algumas leis: a órbita de todos os planetas se dá num plano; os planetas percorrem áreas iguais (a partir do Sol até o planeta em movimento), em intervalos de tempo iguais; e, por último, há uma relação "universal" entre o semieixo maior da órbita e o período da mesma. Como vimos então, Kepler conseguiu reduzir os incontáveis pontos observados por Tycho Brahe a três leis empíricas, rigorosamente obedecidas.

E por que isso ainda não é uma teoria? Porque falta descobrir qual é a causa fundamental que provoca esse comportamento regular no movimento dos planetas. Isso só iria acontecer mais tarde, através dos trabalhos de Isaac Newton.

Teoria

A teoria de gravitação de Newton será abordada mais adiante, quando poderemos avaliar sua capacidade de explicar a essência dos fenômenos do nosso dia a dia, utilizando um pequeno número de grandezas físicas. É importante ressaltar que ela não explica tudo.

Para a descrição apropriada dos movimentos em altas velocidades (próximas à velocidade da luz), precisaremos da teoria da relatividade restrita. Isso porque, na teoria de Newton, não há um limite superior para a velocidade dos corpos, o que é incompatível com a experimentação. A teoria de Newton também não leva em conta fenômenos na escala atômica, para os quais a própria noção de trajetórias fica comprometida. Nesse caso teremos de recorrer à mecânica quântica.

Então, é importante saber que mesmo as teorias mais consagradas têm seu limite de validade. A unificação de todas as teorias em todas as escalas é um sonho dos físicos e norteia muitas pesquisas atuais.

Outro aspecto importante é que as **teorias** nos permitem fazer **previsões**. Por exemplo, com a lei da gravitação de Newton, que descreve a interação gravitacional entre os corpos, podemos explicar desde o movimento de um carro até a translação dos planetas. Por si só isso já seria algo de muita valia. Contudo, você ainda pode fazer mais e desenvolver **tecnologia**. Por exemplo, com um pouco de engenhosidade, você será capaz de colocar um satélite em órbita em torno da Terra. Agora, nem é preciso dizer o quanto você já deve ter se beneficiado da tecnologia de comunicação via satélite.

1.3 A COMPREENSÃO DA NATUREZA E A EXPERIMENTAÇÃO

Os trabalhos de Tycho Brahe e de Kepler foram, sem dúvida, fundamentais para Newton. Porém, muito antes de Newton formular sua teoria, Galileu já havia descoberto importantes propriedades do movimento, sem, no entanto, se preocupar com o porquê das coisas serem do jeito que ele observava.

Galileu resolveu quantificar a queda dos corpos. Ele não estava interessado, como Newton, em saber por que os corpos caíam como caíam, mas queria responder, por exemplo, a questões como: "Quais são as propriedades essenciais para a descrição da queda dos corpos? Será que o movimento depende da massa? Da forma do objeto? Do seu tamanho? Da sua cor?". É claro que, nesse contexto, isso pode parecer quase uma brincadeira, mas o sucesso das ideias de um cientista depende fundamentalmente de se descobrir quais são as propriedades cruciais para aquele dado fenômeno. O que, frequentemente, está longe de ser uma tarefa simples e direta.

Se você tivesse de analisar um dado fenômeno e considerasse todos os fatores envolvidos, desde os mais significativos até os menos relevantes, tudo de uma só vez, não conseguiria estudá-lo. Geralmente utiliza-se o bom senso para avaliar quais fatores são significativos e quais podem ser desprezados na análise de determinado problema. Desse modo, a análise inicial do problema fica relativamente simples e lhe permite avaliar como os diversos fatores afetam o experimento em questão.

1.3.1 Entendendo um experimento

Vamos tentar fazer, esquematicamente, o que Galileu fez para quantificar a queda dos corpos. Execute a Atividade 1.1, como indicado abaixo.

ATIVIDADE 1.1

Para que você possa ter uma ideia do trabalho de um físico, vamos escolher um tema bem simples: "O tempo de queda dos corpos". Pode parecer meio sem sentido, mas imagine que você esteja passando tranquilamente por uma rua, quando um vaso de flores cai da sacada de um prédio na direção de sua cabeça. Será que saber sobre o tempo de queda dos corpos seria útil nesse momento? E se fosse um piano?

Para começar estamos lhe propondo deixar cair da mesma altura diferentes objetos, para que esses experimentos lhe forneçam a base para formular hipóteses acerca do que foi observado. Finalmente você poderá tirar conclusões a partir de suas hipóteses, refinar suas ideias e, certamente, poderá perceber algo que identifique um comportamento geral da natureza.

Vai aqui uma sugestão inicial: **o tempo de queda dos corpos depende do seu peso?**

Materiais utilizados

- Um livro, folhas de papel e uma bolinha de gude (ou algo similar, como uma borracha ou uma pedra).

Procedimentos

a) Deixe cair da mesma altura uma bolinha de gude e uma folha de papel (sem dobrar, na horizontal e segura por uma das extremidades). Qual chega ao chão primeiro? Faça suposições razoáveis do por quê.

b) Amasse bem a folha fazendo uma bola de papel e repita o item **a**. Qual chega ao chão primeiro, a bolinha de gude ou a bolinha de papel?

c) Confronte as observações dos itens **a** e **b** e faça algumas suposições acerca do que aconteceu.

d) Solte agora a bolinha de papel e a bolinha de gude de alturas **próximas** de 1 m e 2 m. Repita esse procedimento várias vezes para ambas as alturas. Observe atentamente o que ocorreu. Isso poderá lhe ajudar a descartar algumas hipóteses e refinar outras.

e) Escreva suas hipóteses sobre o tempo de queda dos corpos.

f) Solte agora da mesma altura e ao mesmo tempo uma folha de papel e um livro. Você já sabe qual dos dois chegará ao chão primeiro? Explique.

g) Coloque então a folha **sob** o livro (ou seja, embaixo do livro) e antes de soltá-los diga o que vai ocorrer. Por quê?

h) Com base nas suas hipóteses feitas para o tempo de queda dos corpos até o momento, o que você acha que irá ocorrer se colocar a folha de papel **sobre** o livro e soltá-los de certa altura?

i) Faça então o experimento colocando uma folha de papel em cima do livro e soltando-os de uma altura qualquer. Sua previsão está de acordo com o que você observou?

j) Levando em consideração tudo o que foi feito, o que você pode dizer sobre o tempo de queda dos objetos?

Figura 1.1 – Tempo de queda dos corpos. Acima, um pequeno objeto e uma folha de papel (sem dobrar, na horizontal, e segura por uma de suas extremidades) são soltos ao mesmo tempo por Hugo. Abaixo, a situação se repete, mas a folha agora foi amassada na forma de uma bola. A sequência de fotos tem um intervalo de 0,03s entre cada exposição. Pelas ideias de Galileu, em uma região onde a resistência do ar fosse desprezível, a folha (aberta ou amassada) e o objeto chegariam ao chão no mesmo instante de tempo.

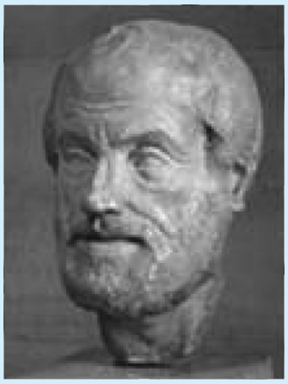
Como já foi dito, você deve estar ciente de que toda teoria física tem um **limite de aplicação ou limite de validade** no qual, fora desse limite, ela não pode ser aplicada **diretamente**. Isso se deve ao fato de as leis e os princípios físicos serem baseados em modelos. Um modelo físico é utilizado na tentativa de tornar a compreensão de um dado fenômeno mais clara e sua análise mais simples.

Por exemplo, quando você diz que o tempo de queda de um corpo não depende do peso do corpo, você está utilizando um modelo no qual se desprezou a resistência do ar (veja a Atividade 1.1). Mas você sabe que, no entanto, soltando uma bolinha de gude e uma folha de papel da mesma altura, a bolinha de gude cai primeiramente. Sabe também que se a folha de papel for amassada, fazendo uma bolinha de papel, as duas bolinhas chegarão praticamente juntas ao chão, quando soltas de uma pequena altura.

Obviamente o uso de modelos não tira a importância das teorias físicas. Ao contrário, isso mostra um grande avanço no pensamento humano. Aristóteles foi um dos maiores pensadores da humanidade e não conseguiu definir de forma precisa o movimento por não abstrair algumas ideias importantes. Ele não acreditava na existência do vácuo e por isso não concebia o movimento dos corpos sem a resistência do ar. Galileu foi o primeiro a dar esse grande passo.

Segundo Galileu, se pudéssemos remover todo o ar de uma sala, por exemplo, e deixássemos cair em seu interior uma pena e uma pedra, elas cairiam simultaneamente. Ao contrário de Aristóteles, Galileu propôs um modelo no qual os corpos caiam sem a resistência do ar, e esse era o limite de validade de sua teoria.

Desse modo Galileu fez da **física** uma **ciência experimental**. A última palavra é sempre da natureza. Qualquer teoria, independentemente da quantidade de dados que tenha sido capaz de descrever, se falhar ao explicar um único experimento, dentro da precisão dos aparelhos de medida, deve ser revista.



Aristóteles (384-322 a.C)

SAIBA MAIS

Filósofo grego, Aristóteles foi um dos maiores pensadores da humanidade. Escreveu sobre vários temas: ética, lógica, política, psicologia, filosofia natural, poesia, retórica e outros.

Aristóteles escreveu sua teoria do movimento, classificando-o em dois tipos: o movimento natural e o movimento violento. Em suas descobertas, os princípios válidos aqui na Terra não eram válidos para os corpos celestes.

Segundo ele os corpos se moviam pela tendência natural em alcançar seu lugar apropriado (movimento natural) ou devido a um agente que os forçasse a se moverem, como o vento e a ação humana (movimento violento).

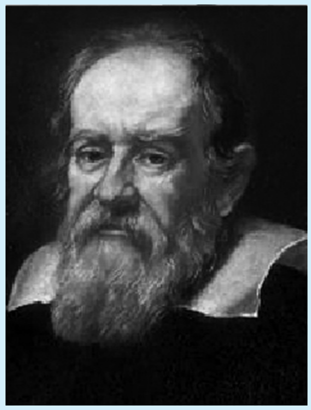
Qualquer corpo na Terra era constituído de certa proporção dos quatro elementos: água, terra, ar e fogo. Uma pedra, por exemplo, apresentava em sua constituição uma maior proporção de terra e o seu lugar apropriado era então a terra. A fumaça tinha em sua constituição uma proporção maior de ar e por isso se esforçava para alcançar o céu que era o seu lugar apropriado. Um líquido tinha uma tendência maior de se escoar em direção ao seu lugar apropriado que era a água e assim por diante.

A partir dessas ideias concluía-se que a velocidade de queda dos corpos deveria ser proporcional aos seus pesos. Se a pedra possui em sua constituição uma proporção maior de terra, ela tem uma tendência maior de ir para o seu lugar apropriado (a terra) do que uma pena. Então a pedra se esforça mais para ir em direção à Terra, ou seja, sua velocidade de queda será sempre maior que a da pena.

O movimento violento era o movimento originado devido a agentes que interagiam com esses corpos, puxando-os ou empurrando-os. Para ele, um corpo só poderia estar se movendo devido ao movimento natural ou devido a uma força imprimida a ele, caso contrário ele estaria em repouso. Se você empurrar um livro, por exemplo, ele para logo que você deixa de empurrá-lo. Para Aristóteles, o livro só poderia se mover se alguém fizesse força continuamente sobre ele.

Com essas duas definições de movimento, Aristóteles explicava de maneira satisfatória o movimento dos corpos na época em que viveu, e suas ideias perduraram por cerca de dois mil anos, quando Galileu propôs de forma clara outra teoria para o movimento criticando a visão aristotélica com base na experimentação.

SAIBA MAIS



Galileu Galilei (1564-1642)

Físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano, Galileu contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da teoria sobre o movimento, concluída posteriormente por Isaac Newton.

Ele foi o primeiro a refutar as ideias aristotélicas, sustentando suas afirmações em observações e experimentação.

Diz a lenda que ele soltou diferentes objetos da torre inclinada de Pisa e comparou os tempos de queda, chegando à conclusão de que o tempo de queda não depende do peso. Não há confirmação dos historiadores sobre essa passagem e por isso ela é contada como uma lenda.

Além disso estudou o movimento com aceleração dos corpos utilizando seus famosos planos inclinados. Melhorou o telescópio, que foi utilizado para o estudo dos corpos celestes, o que lhe rendeu várias descobertas importantes, como as manchas solares, quatro das luas de Júpiter e os anéis de Saturno.

Devido a sua forte defesa da experimentação, Galileu é considerado por muitos como o pai do desenvolvimento da metodologia científica.

Como você já percebeu, a física é muito mais que uma coleção de dados e leis. Ela é nossa incessante busca pela compreensão da natureza. Diz a lenda que ao descobrir a solução para um problema, enquanto tomava seu banho, Arquimedes saiu nu pelas ruas gritando: “Eureca! Eureca!” (Encontrei! Encontrei!). Nós temos certeza de que à medida que você prosseguir em seus estudos vai se sentir do mesmo jeito que Arquimedes. Só não precisa sair correndo sem roupa por aí.

ATIVIDADE 1.2

Escolha algum assunto de seu interesse em física e discuta os limites de validade da teoria vigente. Compartilhe os detalhes com seus colegas.

1.3.2 Definição de partícula

Ao descrever o movimento de um carro ao longo de uma trajetória retilínea, de um caminhão se movendo ao longo de uma curva ou de um avião se movendo em uma trajetória qualquer em três dimensões, é mais simples e conveniente tratar esses corpos como se fossem **partículas**. Em todas essas situações as suas dimensões não estão sendo levadas em conta e, toda sua massa, considerada como se estivesse concentrada em um único **ponto**.

É óbvio que, em alguns casos, não se pode desprezar as dimensões dos corpos e tratá-los como se fossem partículas. Em particular, quando se trata dos conceitos relacionados à rotação dos **corpos rígidos**. Um corpo rígido pode ser imaginado como uma coleção muito grande de partículas com posições fixas umas em relação às outras. Nesse caso consideram-se as dimensões do corpo, desprezando, no entanto, as possíveis deformações que ele possa sofrer.

Perceba então que um corpo rígido também é uma idealização. Você sabe que sua borracha não é um corpo rígido, porque quando a puxa ou a aperta ela aumenta ou diminui o seu tamanho e, sendo assim, a posição de uma partícula da borracha em relação à outra muda. Uma mesa, um tijolo, um pedaço de aço e, enfim, qualquer objeto sofre deformações quando você os comprime ou os estica. Algumas deformações são grandes e por isso são visíveis, como o da sua borracha ou a de um elástico. Outras deformações são muito pequenas e imperceptíveis ao nosso olho, como a de uma viga de *aço* sujeita a uma dada variação de temperatura. Da mesma forma, um líquido ou um gás não pode ser considerado um corpo rígido. O estudo da elasticidade dos materiais será abordado na mecânica dos *sólidos e o estudo dos líquidos e gases*, na mecânica dos fluidos.

ATIVIDADE 1.3

Identifique outras situações em física em que normalmente se usa um modelo idealizado e discuta as consequências das simplificações envolvidas.

1.4 GRANDEZAS FÍSICAS, PADRÕES E UNIDADES

Qualquer quantidade utilizada para descrever um dado fenômeno físico é denominada uma grandeza física. Você sabe dizer qual é a sua massa e a sua altura? Eu tenho 80 *kg* e 1,70 *m*. Então, massa e comprimento são duas grandezas físicas que descrevem as características de qualquer pessoa.

1.4.1 Grandezas físicas diretas e indiretas

Algumas grandezas físicas podem ser medidas **diretamente**, como o **deslocamento** que você faz quando vai de seu quarto para a sala de sua casa, bem como o intervalo de **tempo** que dura a sua caminhada nesse percurso. Basta utilizar uma trena (Figura 1.2) e um relógio.

Figura 1.2 – A trena é um aparelho portátil para a medição de comprimento.

Outras grandezas físicas são obtidas indiretamente, como, por exemplo, a velocidade desenvolvida por você durante esse percurso. Para isso, basta dividir o deslocamento pelo intervalo de tempo, medidos anteriormente. Veja então que a velocidade é uma grandeza física que depende de outras duas grandezas, o deslocamento e o tempo, e por isso ela é dita uma grandeza física indireta.

1.4.2 Grandezas físicas escalares e vetoriais

Certas grandezas físicas, como comprimento, volume, temperatura e pressão, ficam completamente determinadas quando se especifica um número e a unidade correspondente. Por exemplo: a temperatura do planeta elevou-se cerca de **0,5 ºC** devido ao aquecimento global; uma jovem modelo morreu com **38 kg** devido a uma anorexia nervosa; o porta-malas de um carro popular tem um volume de **285 ℓ**. Todas essas grandezas físicas são descritas por um número seguido de uma unidade – a unidade de volume utilizada foi o litro [ℓ], a unidade de massa foi o quilograma [*kg*] e a unidade de temperatura foi o grau Celsius [ºC]. As grandezas descritas por um número e por uma unidade, **apenas**, são denominadas **grandezas escalares**.

Existem grandezas físicas que, além de um número e da unidade correspondente, necessitam da especificação da direção e do sentido; elas são chamadas **grandezas vetoriais**. A velocidade de um avião a jato é de **900 km/h do sul para o norte**. O deslocamento de um aluno dentro da sala de aula foi de **3,2 m da porta para o fundo da sala**. Todos esses exemplos são de grandezas vetoriais, nos quais se especificam uma **intensidade** ou **módulo** (900 *km/h* e 3,2 *m*), uma **direção** (sul-norte, porta-fundo da sala) e um **sentido** (de sul para norte, da porta para o fundo da sala).

1.4.3 Padrões e unidades

Quando se especifica as grandezas físicas, sejam elas escalares ou vetoriais, utiliza-se sempre um conjunto de **unidades**, como o metro, o quilograma, o segundo, entre outras. Isso significa que, quando se mede uma grandeza física diretamente, a comparamos com um **padrão** preestabelecido.

Você pode medir o comprimento de uma porta e dizer que ela possui 2,12 *m*. Isso significa que a porta é 2,12 vezes maior que uma barra que, por convenção, lhe foi atribuída 1 *m*. Então, para qualquer medida de comprimento, utilizamos como padrão essa barra comparando seu comprimento com o de outros objetos, cujo tamanho queremos especificar (o padrão de comprimento, que era baseado no comprimento de uma barra adotada como padrão, foi modificado para maior precisão das medidas; atualmente a unidade de comprimento é baseada na velocidade da luz).

Essa comparação, usando um padrão para uma dada unidade, é feita de modo análogo para todas as outras grandezas físicas diretas. Por isso é desejável que todas as pessoas as conheçam e as utilizem não apenas no trabalho científico, mas também nas relações cotidianas. Imagine se cada país tivesse seu próprio sistema de medidas, ou melhor, se em cada região de determinado país, como o Brasil, houvesse sistemas de medidas baseados em unidades arbitrárias, tais como o palmo, o pé e outras. Como seriam as relações comerciais entre essas diferentes regiões e países?

Pense como seria se você quisesse comprar 1 m de elástico e o comerciante medisse o comprimento pelo palmo de sua mão. Nos Estados Unidos, por exemplo, uma unidade de comprimento muito utilizada é o pé (1 *m* = 3,281 *ft*) e uma unidade de massa também muito utilizada é a *oz* (lê-se “onça” e 1 *kg* é aproximadamente igual a 35 *oz*). Observe então que, existindo vários sistemas de unidades, as relações científicas e comerciais entre países podem ficar prejudicadas, trazendo vários inconvenientes.

ATIVIDADE 1.4

Você conhece alguma situação na qual a falta de um padrão prejudicou as relações comerciais do Brasil? Compartilhe com seus colegas alguma experiência que você já tenha vivido em que a falta de um padrão também tenha lhe causado algum inconveniente

1.5 O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Em ciência não é diferente. Para que as medidas realizadas sejam precisas e aceitáveis em qualquer parte do planeta, definiu-se um conjunto de unidades padronizadas a serem utilizadas em todos os lugares. Esse sistema de unidades é conhecido, hoje, como **Sistema Internacional de Unidades**, abreviado por **SI** (do francês Le Système International d' Unités).

O **SI** surgiu da necessidade de acabar com os inconvenientes causados pela utilização arbitrária de várias unidades de medidas. Nele são definidas duas classes de unidades, as **unidades base** e as **unidades derivadas**, que são unidades formadas pela combinação de unidades base. A Tabela 1.1 mostra as unidades bases do SI, as grandezas físicas correspondentes e os símbolos utilizados. Na Tabela 1.2 você pode ver alguns exemplos de **unidades derivadas** do SI.

Tabela 1.1
Unidades base do SI.

Grandeza	**Unidades base do SI**	
	Nome	**Símbolo**
Comprimento	Metro	*m*
Massa	Quilograma	*kg*
Tempo	Segundo	*s*
Corrente elétrica	Ampère	*A*
Temperatura	Kelvin	*K*
Quantidade de matéria	Mole	*mol*
Intensidade luminosa	Candela	*cd*

Tabela 1.2
Algumas unidades derivadas do SI.

Grandeza	**Unidades derivadas do SI**	
	Nome	**Símbolo**
Velocidade	Metro por segundo	m/s
Aceleração	Metro por segundo ao quadrado	m/s^2
Massa específica	Quilograma por metro cúbico	kg/m^3
Frequência	Hertz	Hz ou s^{-1}
Força	Newton	N ou $m.kg.s^{-2}$
Carga elétrica	Coulomb	C ou $s.A$
Força eletromotriz	Volt	V ou $m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$

No Apêndice A você encontrará as definições das unidades básicas e uma lista mais extensa de unidades derivadas do SI. Você poderá conhecer mais sobre o SI no sítio eletrônico do Inmetro (Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial). Acesse o site <www.inmetro.gov.br> e procure a seção "Unidades legais de medida".

1.5.1 Notação científica: operando com potências de 10

Utiliza-se potência de 10 para representar números muito grandes ou muito pequenos. Nessa notação científica o número é escrito como um produto de um número entre 1 e 10 e uma potência de 10 com o expoente adequado. Um carro, por exemplo, tem 1.500 *kg* e representamos sua massa por $1{,}5\times10^3$ *kg*. A frequência de operação dos telefones celulares no Brasil situa-se entre 9.000 Hertz (*Hz*) e 300.000.000.000 *Hz* e representamos essas grandezas por 9×10^3 *Hz* e 3×10^{11} *Hz*. Expoentes negativos são utilizados quando os números têm módulo menor que um. Por exemplo, o diâmetro do núcleo atômico é da ordem de 10^{-15} *m*.

Por conveniência, em 1991, a 19ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM) recomendou a utilização de prefixos para a representação das unidades. A Tabela 1.3 mostra os prefixos para os fatores correspondentes e os símbolos utilizados. Sendo assim, as grandezas físicas mencionadas acima podem ser escritas de uma forma mais compacta, como 9 *kHz* e 300 *GHz*. No caso do núcleo atômico seria 1 *fm*.

Tabela 1.3
Prefixos utilizados para as unidades do SI.

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
10^{24}	iota	*Y*	10^{-24}	iocto	*y*
10^{21}	zeta	*Z*	10^{-21}	zepto	*z*
10^{18}	exa	*E*	10^{-18}	ato	*a*
10^{15}	peta	*P*	10^{-15}	femto	*f*
10^{12}	tera	*T*	10^{-12}	pico	*p*
10^{9}	giga	*G*	10^{-9}	nano	*n*
10^{6}	mega	*M*	10^{-6}	micro	μ
10^{3}	quilo	*k*	10^{-3}	mili	*m*
10^{2}	hecto	*h*	10^{-2}	centi	*c*
10^{1}	deca	*da*	10^{-1}	deci	*d*

Com o avanço da ciência e da tecnologia, as definições das unidades de medida evoluíram. As redefinições das unidades de comprimento e de tempo, por exemplo, foram necessárias devido à necessidade de maior precisão nas medidas realizadas.

1.5.2 Unidade de tempo: o padrão do segundo

De 1889 a 1967 o segundo era definido como uma fração do dia solar médio, ou seja, igual a 1/86.400 desse dia. Sabemos que os períodos de duração dos dias variam de milésimos de segundos ao longo dos meses, devido às irregularidades no período de rotação da Terra. Alguns dias podem ter um período de duração maior, outros um período menor e por isso os astrônomos eram os responsáveis pela definição do dia solar médio. Observe então que a precisão das medidas realizadas baseadas nesse padrão de tempo era limitada.

Em 1967 a 13ª CGPM substituiu a definição do segundo baseada em um padrão atômico, a partir da frequência da radiação emitida por um isótopo do átomo de Césio: "O segundo é a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os níveis hiperfinos do estado fundamental do Césio 133."

A partir desse padrão, utilizado atualmente, é feita a padronização e a calibração dos relógios e aparelhos de medidas de tempo. No Brasil a manutenção de padrões para medições do tempo é responsabilidade do Observatório Nacional (ON), no estado do Rio de Janeiro.

Você pode conhecer mais sobre o Observatório Nacional e ajustar seu relógio diretamente do relógio de Césio (Hora Legal Brasileira) visitando o sítio eletrônico http://www.on.br.

Figura 1.3 – Relógio atômico de césio instalado no ON.

Pense e responda: Qual é a frequência da radiação tomada como padrão para a definição do segundo?

1.5.3 Unidade de comprimento: o padrão do metro

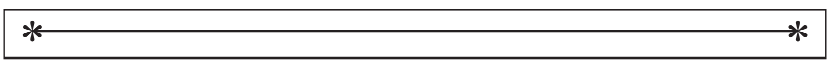
Assim como o segundo, a definição do metro sofreu várias mudanças com o objetivo de se adequar à necessidade de medidas cada vez mais precisas, devido ao avanço da ciência e tecnologia.

De 1889 a 1960 o metro era definido com base na distância entre o Polo Norte e a Linha do Equador. O metro era a décima milionésima parte dessa distância definida como $10^7\,m$. A partir dessa definição, certa barra de platina e irídio foi convencionada como tendo 1 m (Figura 1.4). Cópias dessa barra foram enviadas como padrões secundários a vários laboratórios para padronização e calibração em diversas partes do planeta.

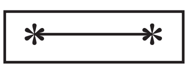
Figura 1.4 – Barra de platina e irídio, à qual foi atribuído um comprimento de 1 m, igual a $10^{-7}\,m$, a distância entre o Polo Norte e a Linha do Equador.

Em 1960, devido a uma maior precisão, o padrão do metro foi substituído por um padrão atômico. Nesse ano o metro foi definido a partir do comprimento de onda, no vácuo, de determinada luz vermelho-alaranjada emitida por átomos de criptônio (^{86}Kr). Com essa nova definição, o metro passou a ser igual a 1.650.763,73 comprimentos de onda dessa luz.

Em 1983 nem mesmo o padrão atômico era satisfatório e a definição do metro sofreu uma mudança radical. Com a definição da velocidade da luz no vácuo como $c = 299.792.458\ m/s$, o metro foi redefinido para se ajustar a essa definição. Atualmente é definido do seguinte modo: "O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo igual a 1/299.792.458 do segundo."



Em 1 s a luz percorre uma distância igual a 299.792.458 m.



Em 1/299.792.458 do segundo a luz percorre uma distância igual a 1 m.

1.5.4 Unidade de massa: o padrão do quilograma

O quilograma é definido como a massa de um cilindro de platina e irídio, chamado Quilograma Protótipo Padrão, mantido no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, na França. Então 1 *kg* é igual à massa desse cilindro (Figura 1.5).

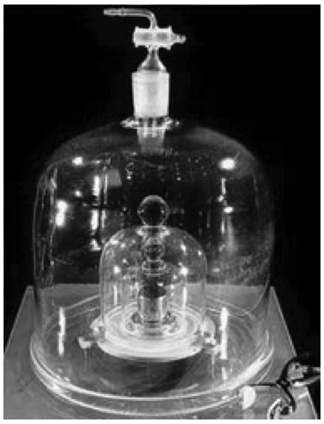


Figura 1.5 – Quilograma Protótipo Padrão. Esse cilindro é mantido no Bureau Internacional de Pesos e Medidas em uma dupla campânula de vidro sob condições especiais.

Cópias do Quilograma Padrão foram enviadas para laboratórios de vários países como padrões secundários para a padronização e calibração. A cópia brasileira, denominada Quilograma Protótipo nº 66, é mantida no Laboratório de Massa (Lamas) do Inmetro, órgão responsável pela padronização e calibração do padrão de massa em nosso país.

Até o momento não existe um padrão de massa mais **preciso e confiável** que o atual. Esse é o único padrão que define uma unidade base do SI por comparação com um objeto. Todas as outras unidades base podem ser medidas por qualquer laboratório habilitado do planeta, enquanto para a calibração de massa deve ser feita uma comparação com o protótipo internacional na França.

Existe um padrão de massa muito utilizado na escala atômica, conhecido como massa atômica (u). A Tabela 1.4 mostra algumas massas atômicas de certos átomos. Foi convencionado para esse padrão que o átomo de carbono (^{12}C) tem exatamente 12 unidades de massa atômica, de modo que a massa atômica dos outros átomos é dada em relação a ela. A relação entre o padrão atômico e o padrão do quilograma é a seguinte:

$$1u = 1\,uma = (1,660538782 \pm 0,000000083) \times 10^{-27}\,kg$$

Tabela 1.4
Massa atômica de alguns isótopos.

Isótopo	Massa atômica relativa	Incerteza
^{12}C	12,0000000	(exata)
^{1}H	1,007825032	0,000000004
^{23}Na	22,98976967	0,00000023
^{27}Al	26,98153844	0,00000014
^{40}Ca	39,9625912	0,0000003
^{54}Fe	53,9396148	0,0000014
^{63}Cu	62,9296011	0,00000015
^{107}Ag	106,905093	0,000006
^{197}Au	196,966552	0,000003

ATIVIDADE 1.5

Elabore uma tabela com pelo menos cinco valores de comprimento, de massa e de tempo para grandezas físicas das mais variadas dimensões. Por exemplo, qual é o diâmetro de um próton, o tamanho, a massa e a idade da Terra, a distância da Terra ao quasar mais distante, a massa de um elétron e a de uma galáxia, a idade média de seus colegas?

1.6 ANÁLISE DIMENSIONAL, CONVERSÃO DE UNIDADES E ORDEM DE GRANDEZA

1.6.1 Análise dimensional

Como foi dito anteriormente, a linguagem da física é a matemática. Ela nos permite expressar as ideias e as relações entre as grandezas físicas de maneira mais clara, objetiva, compacta e sem ambiguidades. Independentemente da unidade, a dimensão de uma grandeza física indica a sua natureza. Não importa se a distância entre sua casa e a universidade é dada em quilômetros ou em metros, ela continua a ser uma distância. Nesse caso dizemos que sua dimensão é o comprimento. Para indicar a dimensão de uma dada grandeza usa-se o símbolo [], de modo que uma dimensão de distância é dada por [L], enquanto uma dimensão de tempo é dada por [T].

Com isso você tem uma ferramenta poderosa em mãos, a **análise dimensional**. Imagine que você queira saber quais as grandezas envolvidas na velocidade de propagação v de uma onda em uma corda. Depois de um pouco de pensamento, você imagina que vai depender da tensão F que você faz para esticar a corda (tente enviar um pulso através de uma corda relaxada) e da densidade linear de massa μ (já que é mais fácil enviar um pulso em uma linha de costura que em uma corda de amarrar navio; e o que interessa é a quantidade de massa por unidade de comprimento da corda, e não o tamanho da mesma).

Quais serão então os expoentes a e b das grandezas F e μ, se em sua hipótese:

$$[v] = [F]^a[\mu]^b$$

Tendo em vista as dimensões das grandezas envolvidas, podemos escrever que:

$$[L/T] = [ML/T^2]^a[M/L]^b$$

$$[L/T] = [M^aL^a/T^{2a}][M^b/L^b]$$

Separando as grandezas podemos escrever que:

$M^0 = M^a M^b = M^{a+b}$ $\quad L^1 = L^a/L^b = L^{a-b}$ $\quad T^{-1} = T^{-2a}$.

Tal que:

$a+b = 0$ $\quad a-b = 1$ $\quad -1 = -2a$.

Donde podemos concluir imediatamente que $a = 1/2$ e $a = -b = -1/2$. Portanto:

$$[v] = [F]^{1/2}[\mu]^{-1/2}.$$

Tal que:

$$v = (F/\mu)^{1/2}.$$

ATIVIDADE 1.6

Suponha que você queira obter a expressão para a posição x em função do tempo t para um carro que se move com aceleração constante a, que começa a andar do repouso a partir de um instante de tempo $t = 0$ s. Obtenha, por análise dimensional, os valores dos expoentes da aceleração e do tempo.

1.6.2 Conversão de unidades

Toda equação científica deve possuir uma **coerência dimensional**, ou seja, deve-se operar com essas equações mantendo uma coerência com as unidades das grandezas envolvidas. Você pode somar, subtrair, multiplicar ou dividir unidades, desde que elas sejam correspondentes – não faz sentido somar laranjas com maçãs, e isso também é válido para as grandezas físicas. Você somará dois ou mais termos de uma equação somente se eles possuírem a mesma unidade, e o mesmo vale para operações com multiplicação, divisão etc.

Veja alguns exemplos:

a) Coloca-se em um recipiente três quantidades diferentes de água: 10 ℓ, 500 $m\ell$ e 47 $m\ell$. Qual será a quantidade final em litros?

Somando essas quantidades obtemos:

$10\ \ell + 500\ m\ell + 47\ m\ell$

$10\ \ell + 547\ m\ \ell$

Como $1\ m\ell = 10^{-3}\ \ell$

$547\ m\ell = 0{,}547\ \ell$.

Então: $10\ \ell + 0{,}547\ \ell = 10{,}547\ \ell$

b) A letra grega ρ pode representar a massa específica de uma dada substância, m a sua massa e V o volume que ela ocupa no espaço. A densidade de qualquer substância é dada pela razão entre a massa e o volume:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Um quilograma (kg) de água, por exemplo, em certas condições, ocupa um volume igual a $10^{-3}\,m^3$, o que equivale a 1 litro. A densidade da água então é dada por:

$$\rho = \frac{1kg}{10^{-3}\,m^3},$$

$$\rho_{água} = 1\times10^3\ {}^{kg}\!/_{m^3} \quad \text{ou} \quad \rho_{água} = 1\ kg/\ell.$$

Então você pode determinar a massa de qualquer porção de água sabendo o volume que ela ocupa, pois:

$$m = \rho V.$$

No exemplo acima, se um recipiente contém 400 $m\ell$ de água, qual é a massa dessa quantidade? Devemos fazer inicialmente uma **conversão de unidades**, pois sabemos que:

1 ℓ de água possui 1 kg de água.

$1\ m\ell = 10^{-3}\ \ell$. Logo:

$400\ m\ell = 400\times10^{-3}\ \ell$

$= 4\times10^{-1}\ \ell$.

Como: $m = \rho V$

$$m = 1\frac{kg}{\cancel{\ell}} \times 4,00 \times 10^{-1}\cancel{\ell}$$

$$m = 4,00 \times 10^{-1} kg = 0,400 kg \text{ ou } m = 400 g.$$

Ou seja, 400 *g* de água ocupam um volume de 400 $m\ell$.

ATIVIDADE 1.7

Se um carro está andando a 100 *km/h*, qual será sua velocidade em metros por segundo (*m/s*) e em milhas/horas (*mi/h*)? Um motorista dirigindo a 100 *mi/h* seria multado nas estradas brasileiras?

1.6.3 Estimativas e ordem de grandeza

Ordem de grandeza de uma certa quantidade é a potência de 10 do número que descreve a quantidade. Se uma quantidade aumenta **duas** ordens de grandeza dizemos que ela é 100 vezes maior que a outra, ou seja, 10^2 vezes maior que a outra. Por exemplo, a espessura da banda de rodagem de um pneu deve ser da ordem de 1 cm. Certamente 10 *cm* é muito grande (uma ordem de grandeza maior), enquanto 1 *mm* (uma ordem de grandeza menor) parece muito pouco.

Com isso você acaba de descobrir outra ferramenta muito poderosa: a capacidade de **estimar** o valor de uma grandeza física. Por exemplo, estime a espessura de um pneu de borracha que foi gasta após ele percorrer 1 *km*, sabendo que um pneu é capaz de rodar tipicamente 50.000 *km*. Se a espessura da borracha for da ordem de 1 *cm*, o pneu sofrerá um desgaste de 1 *cm*/50.000 *km*, o que corresponde a 20×10^{-6} *cm/km*. Portanto, ao rodar 1 *km*, terá gasto aproximadamente 20×10^{-8} *m* = 0,2 μm.

ATIVIDADE 1.8

a) Estime quantos fios de cabelo há em sua cabeça.
b) Certa vez um aluno mediu o volume de uma caneta e achou 1 milhão de m^3. Ele argumentou que esse seria um erro bobo. Descubra as dimensões de cubo com esse volume. Será que ele tinha razão?

1.7 TRABALHANDO COM ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS E INCERTEZAS NAS MEDIDAS

Uma característica bela e desejável de toda teoria em física é que ela possa ser confirmada em qualquer lugar do planeta – e extrapolando – em qualquer parte do Universo. Por isso foi necessária a padronização e a adoção de um sistema de unidades internacional que serve de base para as nossas medidas. Veja a partir de agora como expressar as medidas de grandezas físicas, sejam elas determinadas através de experimentos com instrumentos simples ou em laboratórios com instrumentos muito mais sofisticados e precisos.

1.7.1 Algarismos significativos

Qualquer medida de uma grandeza física deve ser expressa por um número que nos permita inferir sua intensidade e uma unidade que caracterize sua natureza.

ATIVIDADE 1.9

Utilize uma régua milimetrada (régua comum) para medir o comprimento de uma folha de papel A4. O seu resultado será utilizado ao longo desta seção.

Três alunos mediram o comprimento de uma mesma folha de papel expressando suas medidas da seguinte forma:

- João: 30 *cm*
- Maria: 29,7 *cm*
- Zé: 29,69 *cm*

Observe que cada um expressou sua medida com um número diferente de **algarismos significativos. Um algarismo significativo é um número que expressa a medida de forma confiável.** João expressou sua medida com dois algarismos significativos; Maria, com três algarismos significativos; e Zé, com quatro. Perceba que o número de algarismos significativos revela a "qualidade" de uma medida – a medida de Zé é melhor que as de João e Maria, ou, em outras palavras, ela é a mais **precisa**.

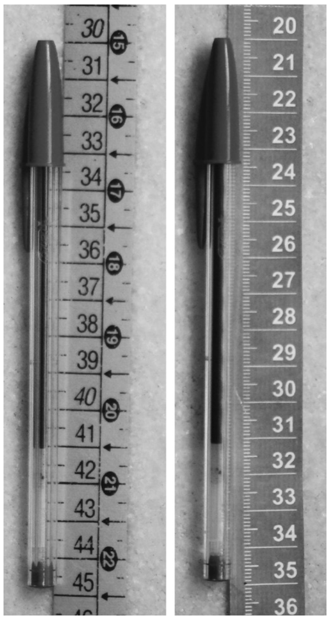
A precisão de uma medida é expressa pelo número de algarismos significativos.

Quanto maior o número de algarismos significativos, maior é a precisão de uma medida.

A medida feita por João apresenta dois algarismos significativos, em que o dígito 3 é dito **correto** e o algarismo 0 é dito **duvidoso ou incerto**. Na medida de Maria os algarismos 2 e 9 são corretos, enquanto o dígito 7 é o duvidoso. De modo semelhante, a medida de Zé apresenta três algarismos corretos (os dígitos 2, 9 e 6), e o último dígito 9 é o algarismo duvidoso. O último algarismo é dito duvidoso porque é nele que está a incerteza da medida realizada.

Em qualquer medida estão envolvidos erros ou incertezas devido ao processo de medição, à limitação dos aparelhos de medida e à capacidade da pessoa que faz a medição.

Observe atentamente a Figura 1.6a. Medindo o comprimento de uma caneta utilizando uma fita métrica, você sabe (com certeza) que ela possui 14,5 *cm*. Na verdade, seu comprimento é um pouco maior que 14,5 *cm*. Então podemos dizer que ela possui 14,7 *cm*. Outra pessoa que fizesse essa medida poderia dizer que seu comprimento não é de 14,7 *cm*, mas de 14,6 *cm* ou ainda 14,8 *cm*. Utilizando essa fita métrica podemos ter certeza sobre meio centímetro (14,5 *cm*), mas não sobre a casa dos milímetros e por isso o último digito dessa medida é o **algarismo duvidoso**.



a b

Figura 1.6 – (a) Medida de uma caneta com uma fita métrica; (b) medida da mesma caneta com uma régua milimetrada ou uma trena.

Figura 1.7 – Paquímetro e micrômetro.

A Figura 1.6b mostra a medida da caneta quando se utiliza uma régua milimetrada. Agora podemos ter certeza sobre a casa dos milímetros, pois a menor divisão (ou graduação) da régua utilizada é de 1 *mm*. Portanto esse é o menor valor que ela é capaz de medir com confiança. Então podemos dizer que a caneta possui (com certeza) 14,7 *cm*, sendo um pouco maior que isso – sua medida é portanto 14,78 *cm*. Nesse caso o último dígito (8) é que é o **algarismo duvidoso**, conforme estimamos pela figura.

Utilizando outros aparelhos como micrômetros e paquímetros você pode aumentar a precisão das medidas de comprimento realizadas, ou seja, diminuir as incertezas dessas medidas (Figura 1.7).

Na maioria das vezes a incerteza vem expressa explicitamente com a medida. Quando isso não ocorre, geralmente atribuimos uma incerteza de uma unidade, para mais ou para menos, na casa do algarismo duvidoso.

Por exemplo: em uma ficha de diagnóstico, um médico coloca a temperatura de sua paciente como 36,7 ºC. Entenda então que essa medida não deve ser menor que 36,6 ºC nem maior que 36,8 ºC ou, de modo alternativo, se expressa (36,7 ± 0,1) ºC. O último dígito (o algarismo 7) é o duvidoso e, portanto, a incerteza de uma unidade cabe a ele. Outra forma de representar uma medida e sua incerteza é colocar a incerteza (ou desvio) entre parênteses como 36,7(0,1) ºC.

ATIVIDADE 1.10

Qual dos três alunos, João, Maria ou Zé, fez a medida mais precisa? Expresse agora as medidas que você fez, com as respectivas incertezas, e compare os resultados.

1.7.2 Incertezas em medidas diretas

A menor graduação de um instrumento utilizado para uma medição representa o menor valor que ele é capaz de medir com confiança. Enquanto a precisão de uma fita métrica é de centímetros, a precisão de uma régua comum é de milímetros.

Medindo, por exemplo, o diâmetro de uma moeda, Zé obteve 2,7 *cm* com uma fita métrica, enquanto João obteve 2,72 *cm* utilizando uma trena. As duas medidas estão expressas corretamente! Como a menor graduação da fita métrica utilizada por Zé é de 1 *cm*, a sua precisão pode ser expressa com uma precisão de centímetros, sendo a casa dos milímetros incerta – por isso o algarismo 7 é duvidoso. A menor divisão de uma trena é de 1 *mm* e por isso temos uma confiança na casa dos milímetros, sendo a casa dos décimos de milímetros incerta.

Observe que se Zé expressasse sua medida do diâmetro da moeda como 2,70 *cm* ela estaria incorreta, uma vez que apresenta uma precisão maior que a do aparelho de medida utilizado. Numericamente pode-se dizer que 2,7 = 2,70, mas cientificamente não!

$$2,7cm \neq 2,70cm$$

É comum adotarmos a metade da menor divisão de um instrumento como incerteza de uma medida direta. Sendo assim as incertezas das medidas feitas com fita métrica e trena são de 0,5 *cm* e 0,5 *mm* (0,05 *cm*), respectivamente. As medidas de Zé e de João podem ser expressas da seguinte maneira:

- Zé: (2,7 ± 0,5) *cm*,
- João: (2,72 ± 0,05) *cm*.

Isso significa que o diâmetro da moeda não deve ser menor que 2,2 *cm* nem maior que 3,2 *cm* de acordo com a medida de Zé. Pela medida de João, sabemos que seu diâmetro está entre 2,67 *cm* e 2,77 *cm*. Você consegue perceber então por que a medida de João é a mais precisa?

Pense e responda: Utilize o bom senso quando adotar a convenção da metade da menor graduação como incerteza de um aparelho de medida. Suponha que você queira medir o comprimento do quarteirão em que mora utilizando uma régua milimetrada de 30 *cm*. Você deveria adotar a incerteza de sua medida como 0,05 *mm*? Justifique a sua resposta.

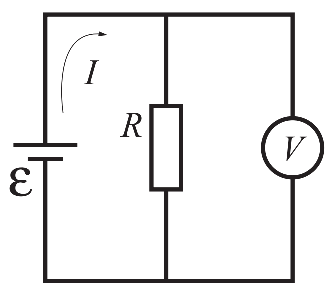


Figura 1.7 – Um voltímetro mede a diferença de potencial (ddp) ou voltagem entre os terminais de uma bateria, como a bateria de um carro, de um celular ou de uma pilha.

A incerteza de aparelhos digitais geralmente vem indicada nos manuais de uso por um **erro percentual** (ou erro fracionário). Um voltímetro, por exemplo, mede a diferença de potencial (ou voltagem) nos terminais de uma fonte (Figura 1.7). No manual do aparelho da figura é indicado um erro de 1%. Isso significa que quando você for medir a voltagem de uma bateria de automóvel deverá expressar seu valor da seguinte maneira:

Bateria: $12\ V \pm 1\%$ ou $(12{,}0 \pm 0{,}1)\ V$,

já que 1% de 12 V é igual a 0,1 V.

ATIVIDADE 1.11

Meça o diâmetro de uma moeda de cinco centavos e expresse o resultado com o número correto de algarismos significativos. Faça o mesmo para uma moeda de um real. Indique o algarismo duvidoso e a incerteza correspondente a ambos os casos.

1.7.3 Incerteza em medidas indiretas

Considere o seguinte exemplo: para determinar o valor correto do número π, Maria mede o perímetro P e o diâmetro D de uma moeda de um real com uma régua milimetrada:

$$P = 8{,}55\ cm\ ,$$

$$D = 2{,}72\ cm\ .$$

Ela sabe que o número π é igual à razão entre o comprimento e o diâmetro da moeda:

$$\pi = \frac{P}{D} = \frac{8{,}55\ cm}{2{,}72\ cm}\ .$$

Utilizando uma calculadora, ela obtém:

$$\pi = 3{,}143382352\ .$$

O valor obtido não está correto, pois ele tem 10 algarismos significativos, ou seja, o resultado apresenta uma precisão muito maior que a do instrumento de medida utilizado.

O número de algarismos significativos define a precisão de uma medida, portanto, quando você for expressar seus resultados, atente para esse fato. As calculadoras simples fornecem seus resultados com até 10 algarismos, o que obviamente não corresponde a um resultado com o número correto de algarismos significativos. Você deverá avaliar quantos algarismos utilizar.

Regras para operações com algarismos significativos

A seguir veremos algumas regras que são úteis para a determinação do número de algarismos significativos que deve ser expresso em uma medida indireta.

1. Quando você multiplica ou divide números, o número de algarismos significativos do resultado não deve ser maior que o menor número de algarismos significativos envolvido na operação.

Exemplos:

a) Maria deve expressar o número π por $\pi = \dfrac{P}{D} = \dfrac{8{,}55\ cm}{2{,}72\ cm} = 3{,}14$;

b) No produto $(2{,}7\ \ cm)$ x $(1{,}11\ \ cm)$ x $(3{,}1415\ \ cm) = 9{,}4\ \ cm$, o menor fator possui dois significativos e, portanto, o resultado também deve possuir dois algarismos significativos;

c) No quociente $\dfrac{3{,}14\ m}{2{,}023} = 1{,}55\ m$, como o numerador possui o menor número de algarismos significativos, o resultado da divisão terá o seu mesmo número de significativos, portanto, três significativos;

d) Observe o produto $(8{,}2dm)\times(1{,}5dm) = 2{,}3dm^2$.

Um pouco de raciocínio levará à conclusão de que nesse caso coube o bom-senso.

2. Ao somar ou subtrair números, atente para a posição da vírgula. Nesse caso NÃO É IMPORTANTE o número de algarismos significativos das parcelas. O número de algarismos significativos da soma ou da diferença deve ocupar a mesma posição do algarismo duvidoso dos números que estão sendo somados ou subtraídos.

Exemplos:

a) Na soma 2,2 + 1,53 = 3,73. Como o menor número de significativos é dois, o resultado da operação fica 3,7. Observe que nesse caso foi feito um **arredondamento** e não um **truncamento**!

b) Calcule 2,2 x 10^3 – 4,33. É mais fácil colocar na mesma escala, usando potências de dez, o que ficaria 2,2 × 10^3 – 0,00433 × 10^3 = 2,19633 × 10^3. Ou seja, 2,2 × 10^3.

3. A representação de alguns números não informa nada sobre o número de algarismos significativos. O número 1.000 é um bom exemplo. Para não ser ambíguo, sempre que possível escreva os números em notação científica. Desse modo você poderá expressar quão preciso é o resultado assinalado.

1 × 10^3	1 algarismo significativo
1,0 × 10^3	2 algarismos significativos
1,00 × 10^3	3 algarismos significativos

4. Os dígitos zero à esquerda não são significativos em números entre 0 e 1.

Exemplos:

a) 0,02	1 algarismo significativo
b) 0,003	1 algarismo significativo
c) 0,030	2 algarismos significativos
d) 0,030314	5 algarismos significativos
e) 2,0003	5 algarismos significativos

Escreva os números acima em potência de 10 e você terá certeza sobre o número de algarismos significativos e que os dígitos zero à esquerda não são algarismos significativos para números entre 0 e 1:

a) 2×10^{-2}	1 algarismo significativo
b) 3×10^{-3}	1 algarismo significativo
c) $3{,}0\times10^{-2}$	2 algarismos significativos
d) $3{,}0314\times10^{-2}$	5 algarismos significativos

Sempre que possível expresse seus resultados em potência de 10.

Anteriormente foi dito que a precisão de uma medida estava associada ao número de algarismos significativos expressos. Em outras palavras, quanto mais precisa a medida, menor era a sua incerteza. Veja os exemplos descritos a seguir:

1ª Medida:	$(9{,}78 \pm 0{,}02)\ m/s^2$
2ª Medida:	$(9{,}7893 \pm 0{,}0003)\ m/s^2$
3ª Medida:	$(9{,}7893745 \pm 0{,}0000004)\ m/s^2$

A 3ª Medida é mais precisa que a 2ª Medida, que é mais precisa que a 1ª.

1.7.4 A diferença entre precisão e exatidão

A **exatidão ou acurácia** é o grau de aproximação do valor medido com o valor real de uma grandeza física. Quanto menor a diferença entre o valor medido e o valor real, mais acurada (ou exata) é a medida realizada. A **precisão** revela a incerteza associada com a medida em questão.

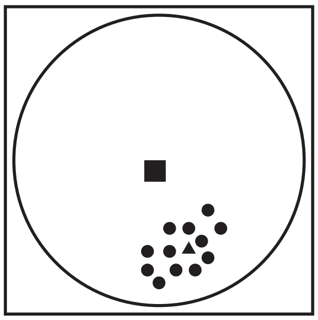


Figura 1.8a – Uma medida com boa precisão, mas com acurácia ruim.

Se você possui 1,70 *m* de altura e dois processos diferentes de medida lhe fornecem 1,71 *m* e 1,752 *m*, o primeiro deles fornece uma medida mais acurada (ou exata) que a do segundo método. Embora esse segundo método forneça uma medida mais precisa (com uma incerteza menor), a diferença entre esse valor e o valor real de sua

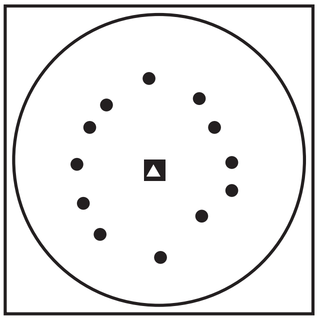


Figura 1.8b – Uma medida com boa acurácia, mas pouca precisão.

altura é consideravelmente maior se comparado ao valor da medida feita pelo primeiro método.

Na prática, em laboratórios, fazemos várias medidas e adotamos como **valor mais provável** de uma medida a média entre todas as medidas realizadas.

Para um conjunto de medidas, a distinção entre precisão e acurácia é facilmente exemplificada através da Figura 1.8, que mostra de maneira esquemática um conjunto de pontos que representam as medidas realizadas em um experimento e o valor mais provável da grandeza física em questão (representado por um quadrado central).

Note que na Figura 1.8a a diferença entre o valor de uma medida e outro é relativamente pequena – isso significa que o desvio, ou seja, a incerteza da medida é pequena. Os dados apresentam boa precisão, pois se encontram bem agrupados, mas a acurácia é ruim, pois na média (a média é representada por um triângulo) eles se encontram afastados do valor mais provável.

Na Figura 1.8b a diferença entre o valor de uma medida e outro pode se relativamente pequena, mas para a maioria dos pontos essa diferença é grande – o que significa que a incerteza é grande. Os dados agora apresentam precisão ruim, pois encontram-se espalhados em torno do valor médio. Observe, no entanto, que a acurácia é boa, pois a média encontra-se perto do valor mais provável.

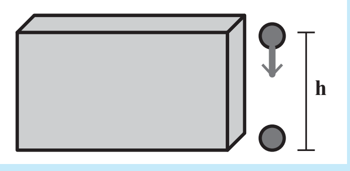
VALOR MAIS PROVÁVEL DE UMA MEDIDA

Para que você possa compreender melhor sobre o valor mais provável, considere o seguinte exemplo:

Um aluno quer determinar a altura de um muro e dispõe apenas de um cronômetro para isso. Ele conseguirá medir a altura do muro? A resposta é sim, mas não **diretamente**, já que cronômetro só mede intervalos de tempo; sua medida será, portanto, **indireta**. Utilizando a relação

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

em que h é a altura do muro, g é a aceleração da gravidade e t é o tempo necessário para que um objeto solto do topo do muro chegue à sua base, esse aluno poderá calcular a altura do muro. Soltando uma pedra do alto do muro ele verifica que ela gasta 1,02*s* para chegar ao chão.



Em seguida ele repete o procedimento e verifica em seu cronômetro que ela gastou 1,12 *s*. Os diferentes valores de tempo obtidos refletem a dificuldade intrínseca do ato de medir. Qual das duas medidas ele deve utilizar?

Nenhuma delas! Ele deve utilizar o valor mais provável, que é obtido fazendo-se uma **média das medidas**. A precisão do cronômetro é de centésimo de segundo. Esse aluno deve então fazer um conjunto de medidas para tornar o resultado mais preciso.

Veja as medidas na tabela abaixo.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tempo (s)	0,99 s	1,12 s	0,97 s	0,95 s	0,99 s	1,11 s	1,02 s	0,94 s	0,89 s

O valor mais provável do tempo de queda t_p é a média dessas nove medidas de tempo.

$$t_p = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} t_i$$

$$t_p = \frac{(0,99+1,12+0,97+0,95+0,99+1,11+1,02+0,94+0,89)s}{9} = 0,95s$$

A rigor, esse aluno também deverá determinar a incerteza pelas medidas realizadas. Em suas práticas de laboratório você deverá aprender como obter as incertezas das medidas realizadas de diferentes maneiras. No caso das medidas de tempo realizadas pelo aluno, a incerteza Δt é dada pelo desvio padrão da média das diferenças entre o valor mais provável e cada valor individual das medidas:

$$\Delta t = \left[\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - t_p)^2\right]^{1/2}$$

$$\Delta t = \left[\frac{|0,95-0,99|^2+|0,95-1,12|^2+|0,95-0,97|^2+|0,95-0,95|^2+|0,95-0,99|^2+|0,95-1,11|^2+|0,95-1,02|^2+|0,95-0,94|^2+|0,95-0,89|^2}{9(9-1)}\right]^{1/2}$$

$$\Delta t = 0,08s.$$

Logo o valor mais provável das medidas de tempo realizadas é

$$t_p = (0,95 \pm 0,08)s.$$

Esse deve ser o tempo utilizado para a determinação da altura do muro.

ATIVIDADE 1.12

Suponha que você queria confirmar se realmente é possível obter a altura de um muro utilizando a relação $h = \frac{1}{2}gt^2$. Então faça um conjunto de medidas de tempo de queda de uma pedra do muro de sua casa.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tempo (s)									

a) Determine o valor mais provável do tempo de queda da pedra.
b) Calcule a incerteza do valor mais provável.
c) Utilize então a relação $h = \frac{1}{2}gt^2$ para determinar a altura do muro.
d) Expresse seu resultado com o número correto de algarismos significativos.

Pense e responda: Como você calcularia a incerteza Δh na altura do muro?

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 1.1

O tempo de queda não depende do peso. Veja também a Figura 1.1.

Atividade 1.2

Por exemplo, a Teoria da Relatividade. Ela nos diz que, para velocidades próximas da velocidade da luz, a física clássica não prevê os resultados corretos. De acordo com as observações, há uma velocidade limite para os objetos, no caso, a velocidade da luz $c = 3 \times 10^8 \, m/s$. A física clássica não impõe nenhum limite para a velocidade dos corpos, enquanto a relatividade prevê corretamente que há uma velocidade limite.

Atividade 1.3

Por exemplo, no estudo das propriedades dos gases utiliza-se um modelo de gás ideal em que as partículas são consideradas sem dimensão, não interagem entre si, exceto durante as colisões, e a quantidade de partículas por unidade de volume é baixa. A descrição dos gases ideais falha quando a pressão é bastante alta ou a temperatura é bastante baixa, quando a equação de van der Waals fornece bons resultados.

Atividade 1.4

Por exemplo, na venda de sapatos e roupas para o exterior, cada fábrica utilizava um padrão para os tamanhos P, M e G.

Atividade 1.5

Busque nas referências bibliográficas indicadas pelas tabelas de ordens de grandeza. Há uma também no Apêndice B.

Atividade 1.6

Nesse caso, se a posição x depende da aceleração a e do intervalo de tempo t, podemos dizer que $[L] = [A]^e[T]^f$. Mas $[L] = [L/T^2]^e[T]^f = [L]^e[T]^{f-2e}$. Levando em conta os expoentes temos que $e = 1$ e $f - 2e = 0$. Como $f = 2$, podemos escrever que $x = at^2$. Observe que a análise dimensional não consegue prever as constantes corretamente. Uma análise apropriada mostrará que $x = ½ \, at^2$.

Atividade 1.7

Para converter de *km/h* para *m/s* temos de achar o fator de conversão. No caso 1 *km/h* = 1,000 *m*/3.600 s = 0,28 *m/s*. Logo, um carro andando a 100 *km/h* teria uma velocidade em *m/s* dada por 100 × (1 *km/h*) = 100 × (0,28 *m/s*) = 28 *m/s*. Sabe-se que 1 *mi* = 1,61 *km* ou 1 *km* = 0,62 *mi*. A conversão é mais simples: 100 × (1 *km/h*) = 100 × (0,62 *mi/h*) = 62 *mi/h*. Sim, seria multado, pois estaria andando a 161 *km/h*.

Atividade 1.8

a) Estime o diâmetro de um fio de cabelo e calcule a área dele. Imagine o tamanho da superfície de seu couro cabeludo. Divida a área do couro cabeludo pela área de um cabelo. Pode-se levar em conta que há uma separação entre os fios de cabelos para adequar mais o seu resultado.

b) Um cubo desse volume teria um lado de 100 *m*. Imagine um prédio com essas dimensões.

Atividade 1.9

Nossa medida foi L = 29,69 ± 0,05 *cm*.

Atividade 1.10

A mais precisa foi a medida de Zé. Os resultados com as incertezas são:

Zé: (29,69 ± 0,01) *cm*; João: (30 ± 1) *cm*; Maria: (29,7 ± 0,1) *cm*.

Quais foram os seus?

Atividade 1.11

Veja como expressar seus resultados para a moeda de um real na próxima seção. Faça o mesmo para a moeda de cinco centavos. O resultado vai depender do instrumento de medida que você usou.

Atividade 1.12

Nossas medidas:

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tempo (*s*)	1,03	1,21	1,15	1,10	1,22	1,05	1,07	1,19	1,14

Nossos resultados:

a) O valor mais provável do tempo de queda é $t = 1{,}1288s$;

b) A incerteza no valor mais provável no tempo é $\Delta t = 0{,}06$.

Logo $t \pm \Delta t = 1{,}13 \pm 0{,}06s$;

c) Considerando $g = (9{,}784 \pm 0{,}001)\ m/s^2$, podemos calcular a altura do muro:

$h = (1/2)\ gt^2 = (1/2) \times (9{,}784) \times (1{,}13)^2 = 6{,}24\ m$.

Utilize os conhecimentos adquiridos na disciplina de laboratório de física para calcular a incerteza Δh. No caso presente temos que:

$\Delta h/h = \Delta g/g + 2\times(\Delta t/t) = (0{,}001/9{,}784)+2\times(0{,}06/1{,}13) =$

$= 0.001 + 2\times 0{,}053 = 0{,}11.$

Portanto: $\Delta h = 6{,}24 \times 0{,}11 = 0{,}7\ m$. Assim: $h \pm \Delta h = 6{,}2 \pm 0{,}7\ m$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Escreva as seguintes grandezas físicas com os prefixos dados na Tabela 1.3:

a) $10\times10^{6}\,watts$

b) $1\times10^{7}\,m$

c) $0,004\times10^{-9}\,g$

d) $0,0030s$

E2. Expresse as grandezas com potencias de 10 e um algarismo significativo:

a) $30\,Gbytes$

b) $0,19\mu m$

c) $46mg$

d) $0,12\,pm$

e) $1980\times100^{2}kg$

E3. Seja o deslocamento de um corpo qualquer dado em quilômetros, o tempo em horas e sua velocidade dada em *km/h*, quais devem ser as unidades no SI das constantes **a** e **b**, quando:

a) $r = a + bt$

b) $v = \sqrt{br}$

c) $r = asen(bt)$

d) $r = a\ \exp(-bt)$

E4. Encontre a relação entre as unidades *km/h* e *m/s*.

E5. Suponha que você passe a contar uma nota por segundo. Quanto tempo levará para contar o prêmio da loteria de 52 milhões de reais se o prêmio for pago com notas de 50 reais?

E6. Quantos segundos a Terra leva para dar uma volta completa em torno de seu eixo? E em torno do Sol?

E7. No SI a unidade de força, denominada Newton (*N*), é igual ao quilograma metro por segundo ao quadrado (1 $kg.m/s^2$). A unidade de carga elétrica *q* é o Coulomb (*C*) e a unidade de distância *d* é o metro (*m*). Determine a unidade da constante ε_0 a partir da Lei de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d^2}.$$

E8. Em um treinamento de tiros da polícia, três policiais fazem 10 disparos contra alvos. Os tiros do agente Arnaldo formaram um círculo com 2 *cm* de raio a 10 *cm* do alvo central. Os tiros do soldado Arlem formaram um círculo de 10 *cm* com centro no alvo central. Os tiros do perito Anderson formaram um círculo de raio 1 *cm* a 1 *cm* do alvo central. Compare as precisões e exatidões dos três policiais.

E9. Suponha que o quilograma padrão internacional esteja perdendo massa a uma taxa de $50\mu g/ano$.Você acha essa taxa significativa? Por quê?

E10. Estime o número de batidas que seu coração dá em um ano. E durante sua vida? Qual é esse valor estimado?

PROBLEMAS DA UNIDADE 1

P1. A milha é uma unidade pouco utilizada no Brasil e muito utilizada nos países da Europa, sendo $1\ mi = 1,6\ km$.

a) Encontre a relação entre as unidades *km/h* e *mi/h*.

b) Determine o número de m^3 existentes em 1 milha cúbica.

c) Determine o número de centímetros e centímetros quadrados que existem em 1 milha e 1 milha ao quadrado.

P2. Sabe-se que a densidade do mercúrio é cerca de 13,6 vezes maior que a densidade da água. Qual é a massa de mercúrio contida em 1 ℓ? E em 1 cm^3?

P3. O consumo médio de um carro popular do Brasil é de 12 km/ℓ. Expresse esse resultado em decâmetros (*da*) por metro cúbico (m^3).

P4. Utilizando uma fita métrica mediu-se o comprimento de um dos lados de uma caixa cúbica, $L_1 = 5{,}2\ cm$. Com uma régua milimetrada, a medida é $L_2 = 5{,}24\ cm$. Calcule o perímetro de um dos lados, a área e o volume da caixa, para cada medida, expressando os valores com o número correto de algarismos significativos.

P5. Estime quantas malas seriam necessárias para levar um milhão de reais em moedas de ouro. Faça o mesmo para moedas de prata e para moedas de bronze.

P6. Estime o número de gotas que existem em um oceano.

P7. Estime o número de átomos existentes em uma geladeira.

UNIDADE 2
Movimento em uma dimensão

Iniciaremos nosso estudo da cinemática pelo movimento unidimensional, ou seja, ao longo de uma reta. Estudando agora os conceitos de posição, deslocamento, velocidade e aceleração em apenas uma dimensão você estará mais familiarizado com eles quando fizermos a generalização para os movimentos em duas e em três dimensões.

O entendimento dessas grandezas físicas é fundamental para a compreensão do movimento, a qual começou a se desenvolver de forma sistemática com Galileu. Ele foi o primeiro a perceber a diferença entre esses conceitos e a utilizar abstrações para resolver problemas relacionados com os movimentos dos corpos. Esse, inegavelmente, foi um grande passo para o desenvolvimento de uma teoria consistente sobre o movimento, concluída em seguida por Isaac Newton.

AULA 2

Cinemática

Objetivos

- Usar a noção de sistema de referência para definir posição e deslocamento;
- Distinguir os conceitos de deslocamento e distância percorrida;
- Definir velocidade média e velocidade instantânea;
- Entender velocidade como derivada da posição em relação ao tempo;
- Obter o deslocamento pela área do gráfico de velocidade por tempo.

2.1 POSIÇÃO, DESLOCAMENTO E DISTÂNCIA PERCORRIDA

2.1.1 Posição

Se alguém lhe perguntasse qual é a sua posição neste exato momento o que responderia? Certamente você diria: "Em relação a quê? Se for **em relação à porta**, é de 2 *m*, ou seja, estou a 2 *m* da porta. Se for **em relação à janela**, minha posição é de 3 *m*."

Perceba então que, para dizer qual é a sua posição, é preciso escolher um referencial, isto é, um ponto do espaço em relação ao qual se determina a posição de uma partícula. Esse ponto pode ser a origem de um sistema de coordenadas, que é a ferramenta matemática usada para expressar as distâncias em termos das coordenadas das partículas nesse sistema.

Por exemplo, o ponto P_1 da Figura 2.1 está a 3 *cm* à direita da origem e o ponto P_2 está a 2 *cm* à esquerda do ponto *O*.

A Figura 2.2 mostra um ônibus que se move sobre um trecho retilíneo de uma rodovia. O ônibus passa pelo ponto P_1 (de coordenada X_1) em um instante de tempo t_1 e pelo ponto P_2 (de coordenada X_2) em um instante de tempo t_2. A coordenada X_1 corresponde à posição do ônibus no instante de tempo t_1 e a coordenada X_2 corresponde à sua posição no instante de tempo t_2.

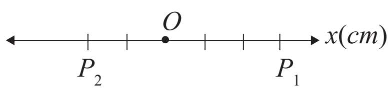


Figura 2.1 – Certa reta tem uma direção *x*. O ponto P_1 está a 3 *cm* da origem (ponto *O*) e o ponto P_2 está a 2 *cm* da origem.

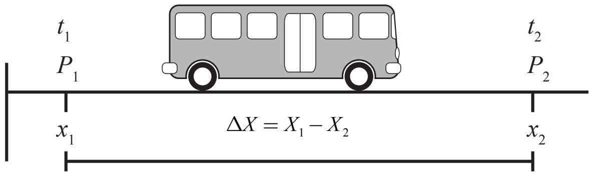


Figura 2.2 – Um ônibus se move em uma pista reta e passa pelos pontos P_1 e P_2 de coordenadas X_1 e X_2, respectivamente.

2.1.2 Deslocamento

O deslocamento de uma partícula, de um ponto P_1 a outro ponto P_2 do espaço é o vetor com origem em P_1 (posição inicial) e extremidade em P_2 (posição final). Em uma dimensão o vetor deslocamento está sempre sobre a reta que une P_1 e P_2.

Logo, o módulo do **deslocamento** ΔX do carro que se move do ponto P_1 ao ponto P_2 é igual a:

$$\Delta X = X_2 - X_1. \tag{2.1}$$

A unidade de deslocamento no SI é o metro $[m]$.

Exemplo 2.1

Suponha que um carro esteja parado em um semáforo que se encontra 0,5 *km* à direita de um posto de gasolina. Ele começa a se mover em linha reta (afastando-se do posto) e depois de algum tempo está a 3 *km* do semáforo.

a) Quais são as posições inicial e final em relação ao semáforo? E em relação ao posto de gasolina?

b) Qual é o seu deslocamento em relação ao semáforo? E em relação ao posto?

Solução

a) Em relação ao semáforo a posição inicial é $x_{is} = 0\ m$ e a posição final é $x_{fs} = 3\ km$. Já em relação ao posto de gasolina a posição inicial é $x_{ip} = 0{,}5\ km$ e a posição final é $x_{fp} = 3{,}5\ km$.

b) Com os valores das posições iniciais e finais, em relação ao semáforo e em relação ao posto de gasolina, podem ser calculados os respectivos deslocamentos. Usando a expressão 2.1 temos que:

$$\Delta x_s = x_{fs} - x_{is} = 3\ km - 0\ km = 3{,}0\ km,$$

$$\Delta x_p = x_{fp} - x_{ip} = 3{,}5\ km - 0{,}5\ km = 3{,}0\ km.$$

Observe que, apesar das diferentes posições iniciais e finais em relação ao semáforo e ao posto de gasolina, o deslocamento é o mesmo em ambos os casos.

Relembrando

Vetores em uma dimensão

Um vetor é uma entidade matemática que serve para indicar intensidade, direção e sentido de determinadas grandezas físicas como deslocamento, velocidade, aceleração e outras.

Por exemplo: um avião se desloca 100 *km* de sul a norte, como indica a Figura 2.3.

O segmento de reta que liga o ponto *S* ao ponto *N* é o **vetor deslocamento** do avião. Ele indica a direção (norte-sul), o sentido (do sul para o norte), e a sua intensidade ou módulo (100 *km*) representa o valor do deslocamento.

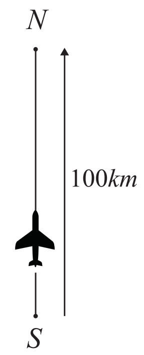


Figura 2.3 – Vetor deslocamento do avião.

2.1.3 Distância percorrida

Agora, não confunda deslocamento com distância percorrida! Considere que um avião voe 500 *km* de oeste para leste em linha reta e em seguida 300 *km* de leste para oeste, como ilustra a Figura 2.4.

A distância total D_t percorrida pelo avião foi:

$$D_t = OE + EW = 500\ km + 300\ km = 800\ km$$

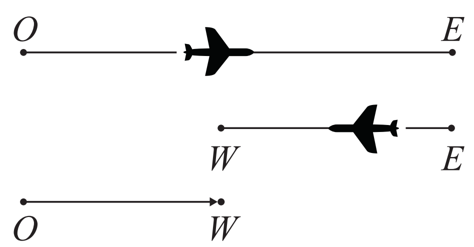


Figura 2.4 – Comparação entre a distância percorrida (*OE* + *EW*) e o deslocamento resultante (*OW*).

O deslocamento resultante Δx do avião, no entanto, é o segmento *OW*, que corresponde à variação de sua posição ao final do trajeto (ele saiu do ponto *O* e chegou ao ponto *W*). Seu módulo é:

$$\Delta x \equiv OW = OE - EW = 500\ km - 300\ km = 200\ km.$$

Como o deslocamento é uma grandeza vetorial, devemos especificar além de seu módulo, sua direção e sentido. **O deslocamento do avião foi então 200 *km* do ponto O ao ponto *W***.

Observe que, ao contrário do deslocamento, que é uma grandeza vetorial, a distância percorrida é uma grandeza escalar.

ATIVIDADE 2.1 – DESLOCAMENTO E DISTÂNCIA

Considere que um avião se desloque 900 *km* do sul para o norte em linha reta. Em seguida ele retorna para o mesmo ponto de partida saindo do norte a sul, como ilustra a Figura 2.5.

a) Qual o deslocamento resultante do avião?

b) Qual é a distância total percorrida?

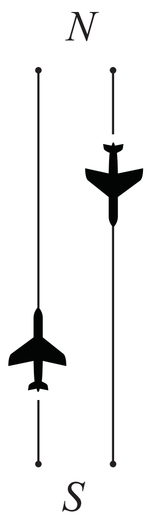


Figura 2.5 – Deslocamento norte-sul do avião da atividade 2.1.

2.2 VELOCIDADE MÉDIA, VELOCIDADE INSTANTÂNEA E VELOCIDADE ESCALAR MÉDIA

A velocidade é uma grandeza física que caracteriza a rapidez do movimento de um corpo.

2.2.1 Velocidade média

Tendo em mente a definição de deslocamento podemos determinar a **velocidade média** do carro da Figura 2.2 ao se deslocar do ponto P_1 no instante de tempo t_1 ao ponto P_2 no instante de tempo t_2.

A **velocidade média** é definida como sendo a razão entre o deslocamento Δx de um corpo e o intervalo de tempo Δt durante o qual ele se deslocou, ou seja:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

A unidade da velocidade no SI é o metro por segundo [*m/s*].

Suponha que você queira analisar o movimento do ônibus da Figura 2.6. Você tem um cronômetro em mãos e sabe que ele passa pela posição $x_A = 2,5\ m$ no instante de tempo $t_A = 1,0s$ e pela posição $x_B = 25\ m$ no instante de tempo $t_B = 2,5s$. A velocidade média do ônibus nesse trajeto é então:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{25\ m - 2,5\ m}{2,5s - 1,0s},$$

$$v_m = 15\ m/s,$$

da posição x_A até x_B (ou seja, $15\ m/s$ no sentido do eixo x crescente).

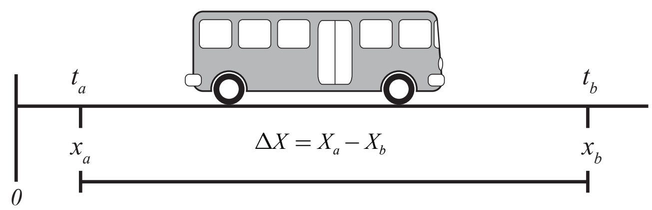


Figura 2.6 – Um ônibus se desloca da posição x_A em um instante de tempo t_A para a posição x_B em um instante de tempo t_B posterior, sendo seu deslocamento $\Delta x = x_B - x_A$.

O módulo da velocidade média de um corpo também pode ser determinado através de um gráfico de posição em relação ao tempo. A Figura 2.7a ilustra um gráfico da posição em função do tempo do movimento de um corpo que se move em uma pista reta, como a da Figura 2.6. O ponto P_A define a posição x_A do corpo no instante de tempo t_A, e o ponto P_B define a sua posição x_B no instante de tempo t_B posterior (veja a Figura 2.6).

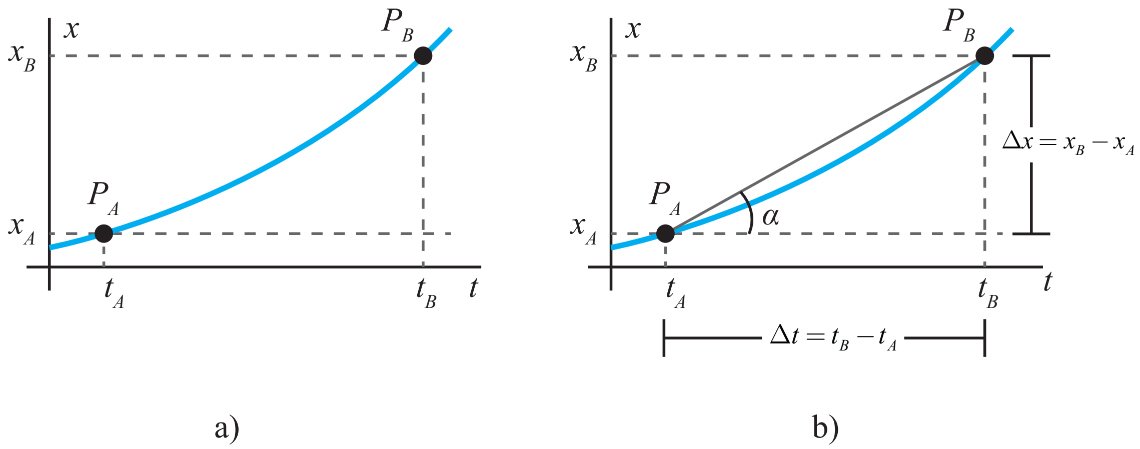


Figura 2.7 – Gráficos da posição em função do tempo para um corpo que se desloca em linha reta. A inclinação da reta secante fornece v_m.

Considere a reta que passa pelos pontos P_A e P_B do gráfico da Figura 2.7b. Perceba que no intervalo de tempo $\Delta t = t_B - t_A$ sua posição variou de x_A até x_B, ou seja, ele se deslocou de $\Delta x = x_B - x_A$. Determine agora a inclinação da reta que passa pelos pontos P_A e P_B desse gráfico. A inclinação da reta secante, como mostrado pelo ângulo α na Figura 2.7b, pode ser calculada por:

$$inclinação = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A},$$

$$inclinação = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Note então que:

A inclinação da reta entre dois pontos do gráfico de posição em função do tempo do movimento de um corpo é igual à velocidade média desse corpo.

O carro da Figura 2.6 pode ter parado ou ter sido mais rápido ou mais lento em algum ponto. Perceba que para determinar a velocidade média não se consideram essas variações. A velocidade média depende apenas do deslocamento Δx de um corpo e do intervalo de tempo Δt durante o qual ele se deslocou.

2.2.2 Velocidade instantânea

Em muitas situações interessa saber apenas a velocidade média de um corpo que se deslocou ao longo de determinada trajetória. Em outras, no entanto, será importante a determinação de sua velocidade em cada posição, ou melhor, em cada instante de tempo. Nesse caso a velocidade recebe o nome de **velocidade instantânea**.

A **velocidade instantânea** v indica a taxa de variação do vetor posição em relação ao tempo. Se a taxa de variação do vetor posição em relação ao tempo de um corpo for grande, então sua velocidade instantânea é grande, e, do mesmo modo, se essa taxa é pequena, sua velocidade instantânea é pequena (**daqui em diante entenda velocidade como velocidade instantânea**).

A velocidade instantânea nada mais é que a velocidade média em intervalo de tempo suficientemente pequeno para ser considerado "um instante", isto é, um intervalo de tempo muito menor que os intervalos de tempo envolvidos no movimento. Assim, obtemos a velocidade instantânea calculando a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores, fazendo $\Delta t \rightarrow 0$. Veja a Figura 2.6. Observe atentamente que, diminuindo gradativamente o intervalo de tempo Δt, o deslocamento Δx também diminui. Quando Δt fica bem próximo de zero, a velocidade média fica bem próxima da velocidade instantânea no ponto P_A.

Em um gráfico de posição em função do tempo, se fizermos $\Delta t \rightarrow 0$, a inclinação da reta que passa pelos pontos P_A e P_B do gráfico da Figura 2.8 se aproxima da reta tangente ao ponto P_A.

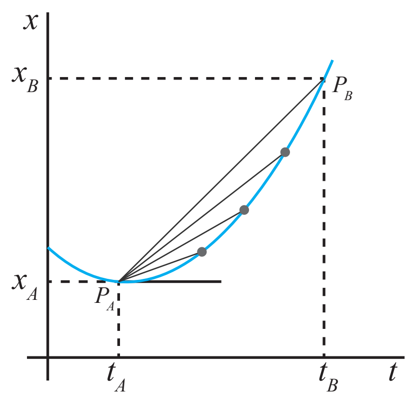


Figura 2.8 – Gráfico da posição em função do tempo para um automóvel que se desloca de x_A a x_B em um intervalo de tempo Δt. Quando os intervalos de tempo se tornam curtos, a inclinação da reta que passa pelos pontos P_A e P_B se aproxima da reta tangente ao ponto P_A. Ou seja, quando $\Delta t \rightarrow 0$, $v_m \rightarrow v$.

Portanto, a velocidade instantânea em determinado ponto é igual à inclinação da reta tangente a esse ponto em um gráfico $x - t$.

Como a derivada da função neste ponto é a inclinação da reta tangente, temos que:

A velocidade instantânea é a derivada da posição em relação ao tempo.

Em linguagem matemática:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2.3}$$

É bom lembrar que tanto a velocidade média quanto a velocidade instantânea são grandezas vetoriais e requerem, portanto, a especificação de seu módulo, direção e sentido.

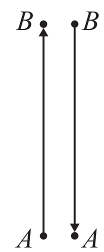


Figura 2.9 – Um corpo se desloca de A para B e em seguida de B para A.

2.2.3 Velocidade escalar média ou velocidade de percurso

Relembrando, a velocidade média não depende da distância total percorrida, mas do deslocamento de um corpo que se moveu ao longo de uma trajetória. Se um corpo se desloca 10 m de A a B e em seguida retorna, fazendo o caminho de B a A, conforme ilustra a Figura 2.9, o seu deslocamento resultante é igual a zero e, portanto, sua velocidade média é nula.

Define-se então a **velocidade escalar média** v_e (também chamada de **velocidade de percurso**) como sendo a razão entre a **distância total percorrida** $\Delta \boldsymbol{d}$ por um corpo e o intervalo de tempo Δt durante o qual ele se deslocou. Então:

$$v_e = \frac{\Delta d}{\Delta t}. \qquad (2.4)$$

Se o corpo da Figura 2.9 se desloca 10 m de A a B em 2s e em seguida 10 m de B a A em 3s, **sua velocidade média é nula** (**pois o deslocamento é zero**), mas **sua velocidade escalar média é 4,0 *m/s***, pois:

$$v_e = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{10\ m + 10\ m}{5s}$$

$$v_e = 4{,}0 m/s.$$

Ao contrário da velocidade média, que é uma grandeza vetorial, a velocidade escalar média indica a velocidade ao longo do percurso ou distância total percorrida.

Exemplo 2.2

Um motoqueiro está parado em sua motocicleta na beira de uma avenida retilínea. Ele está 10 m a leste de um posto de gasolina. No instante t = 0s, o motoqueiro começa a se mover pela rodovia no sentido contrário ao do posto. Considere que, durante os 15s iniciais do movimento do motoqueiro, a sua coordenada varia com o tempo de acordo com a equação $x(t) = 10\ m + (3{,}0\ m/s^2)t^2$.

a) Ache o deslocamento do motoqueiro durante o intervalo entre t_1 = 1,0s e t_2 = 5,0s.

b) Ache a velocidade média durante o mesmo intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

c) Calcule a velocidade instantânea para os instantes de tempo t = 1,0s e t = 5,0s.

Solução

a) No instante $t_1 = 1{,}0s$, a posição x_1 do motoqueiro é:

$$x_1 = 10\ m + (3{,}0\ m/s^2)(1{,}0s)^2$$

$$x_1 = 13\ m.$$

No instante $t_2 = 5{,}0\ s$, a sua posição x_2 é:

$$x_2 = 10\ m + (3{,}0\ m/s^2)(5{,}0s)^2$$

$$x_2 = 85\ m.$$

O deslocamento é, então:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 85\ m - 13\ m = 72\ m.$$

b) A velocidade média durante esse intervalo de tempo é:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_m = \frac{85\ m - 13\ m}{5{,}0s - 1{,}0s} = \frac{72\ m}{4s}$$

$$v_m = 18\ m/s.$$

c) A velocidade instantânea é calculada derivando a expressão de x com relação a t:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{d}{dt}\left[10\ m + \left(3{,}0\ m/s^2\right)t^2\right] = 0 + \left(3{,}0\ m/s^2\right)\left(2t\right)$$

$$v = \left(6\ m/s^2\right)t$$

$$v_1 = \left(6\ m/s^2\right)\left(1{,}0s\right) = 6\ m/s$$

$$v_2 = \left(6\ m/s^2\right)\left(5{,}0s\right) = 30\ m/s.$$

ATIVIDADE 2.2

A posição de uma partícula que se move em linha reta é dada pela equação $x(t) = 0{,}500t^3 - 0{,}200t^2 + 0{,}600t$, sendo x dado em km e t em horas.

a) Determine a posição da partícula nos instantes de tempo $t_1 = 1{,}0h$ e $t_3 = 3{,}0h$.

b) Calcule o seu deslocamento entre esses instantes de tempo.

c) Determine a velocidade $v(t)$ dessa partícula.

d) Determine sua velocidade média entre os instantes de tempo $t_5 = 5{,}0h$ e $t_7 = 7{,}0h$

2.3 MOVIMENTO COM VELOCIDADE CONSTANTE

Dá-se o nome de Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) ao movimento de um corpo ao longo de uma linha reta com **velocidade constante**.

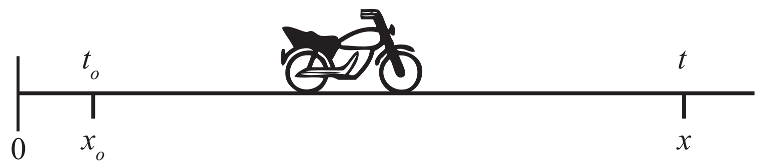


Figura 2.10 – Movimento de uma moto em uma via retilínea com velocidade constante.

Considere que o movimento de uma moto, como a da Figura 2.10, seja retilíneo e uniforme. Seja x_o sua posição no instante de tempo t_o e x sua posição em um dado instante de tempo t posterior.

Os gráficos de velocidade e posição em função do tempo para um movimento retilíneo uniforme são mostrados na Figura 2.11. Observe com bastante atenção esses gráficos. Você pode perceber que a área sob a curva do gráfico v-t é igual ao produto da velocidade pelo tempo $v \times t$ (na verdade, pelo intervalo de tempo $t - t_o$, pois $t_o \neq 0$). Esse produto, de acordo com a equação 2.5, corresponde ao deslocamento Δx durante o intervalo de tempo Δt .

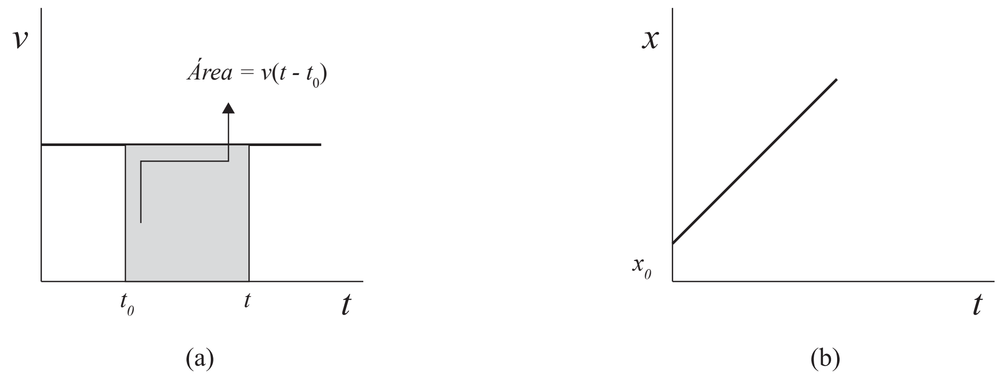


Figura 2.11 – Gráficos de (a) velocidade em função do tempo e (b) posição em função do tempo para um movimento retilíneo uniforme.

Mesmo quando o movimento não for uniforme, utilizamos a área sob a curva de um gráfico $v \times t$ para obter o deslocamento.

Pela equação 2.2 vemos que:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_o}{t - t_o}.$$

Então:

$$\Delta x = v \Delta t$$

$$x - x_o = v(t - t_o)$$

E, portanto:

$$x = x_o + v(t - t_o) \qquad (2.5)$$

A equação 2.5 fornece a posição *x(t)* de um corpo qualquer com velocidade v constante em qualquer instante de tempo t, conhecidos sua posição inicial x_o e o instante de tempo inicial t_o.

Exemplo 2.3 – Deslocamento e velocidade média

Um aluno de física anota as posições de dois atletas, A e B, que correm em uma pista retilínea. Com o auxílio de um cronômetro, faz uma tabela de posição *versus* tempo.

$t\,(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_A\,(m)$	1	10	19	28	37	46	55	64	73
$x_B\,(m)$	3	11	19	27	35	44	52	60	68

a) Faça um gráfico da posição em função do tempo para os dois atletas. Faça também um gráfico da velocidade em função do tempo para os dois atletas. Qual dos dois é o mais veloz?

b) Determine uma função que expresse a posição *x(t)* e a velocidade *v(t)* em função do tempo.

c) Qual é a velocidade média e a velocidade instantânea dos atletas nos instantes de tempo 1*s*, 2*s* e 3*s*.

d) Determine o deslocamento dos dois atletas nos quatro primeiros segundos.

e) Determine o deslocamento dos atletas nos quatro primeiros segundos pelos gráficos de velocidade em função do tempo de ambos.

Solução

a) Representando os valores de x_A e de x_B para os respectivos tempos, obtêm-se os gráficos de posição em função do tempo para os dois atletas:

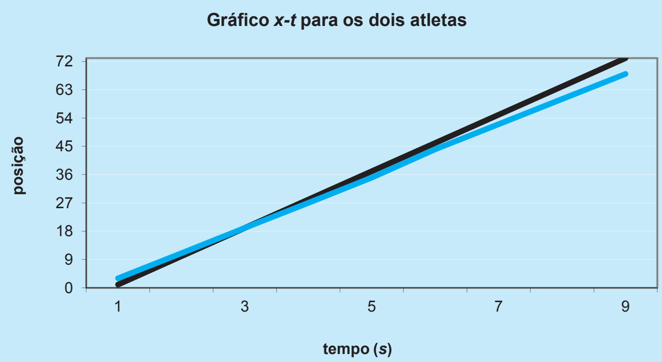


Figura 2.12 – Gráfico da posição em função do tempo para os dois atletas do exemplo 2.3.

A velocidade média é obtida tomando a variação da posição Δx em um determinado instante de tempo Δt :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Para o atleta A:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 9\ m/s,$$

para qualquer intervalo de tempo. Isso significa que sua velocidade é constante ao longo de seu trajeto retilíneo.

Para o atleta B:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 8\ \ m/s,$$

para qualquer intervalo de tempo, ou seja, sua velocidade também é constante.

O gráfico de velocidade em função do tempo para os dois atletas é, então,

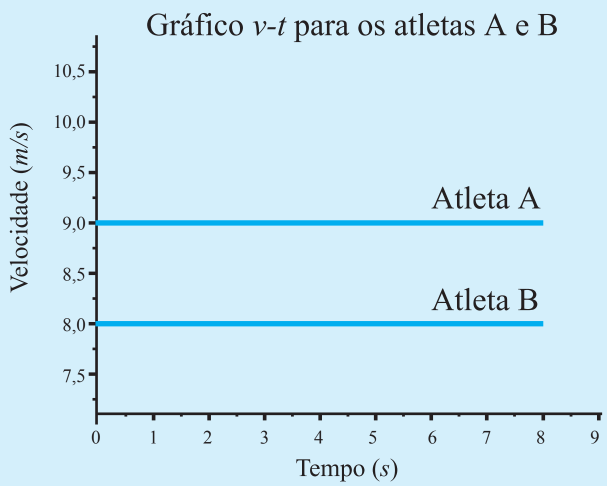


Figura 2.13 – Gráfico da velocidade em função do tempo para os atletas A e B.

É evidente que o atleta A é mais veloz que o atleta B.

b) Como o gráfico de posição em função do tempo dos atletas é uma reta, a função correspondente será do tipo

$$x(t) = a + bt,$$

em que *b* é a inclinação da reta.

Sabemos que a derivada da função em um dado ponto é igual à inclinação da reta tangente a esse ponto. Então:

$$b = tg\,\alpha,$$

sendo *a* o ângulo entre o eixo do tempo e a reta. Do mesmo modo,

$$b = \frac{dx}{dt} = v.$$

Para o atleta A, então:

$$x_A(t) = 1\,m + (9\,m/s)\,t.$$

Para o atleta B:

$$x_B(t) = 3\,m + (8\,m/s)\,t.$$

Tendo os dois atletas velocidade constante, a função que expressa a velocidade em função do tempo é:

$$v_A(t) = 9\,m/s$$
$$v_B(t) = 8\,m/s.$$

c) Como o movimento é retilíneo e com velocidade constante, em qualquer instante de tempo, tanto a velocidade média quanto a velocidade instantânea são iguais, de modo que:

$v_m = v,$

$v_m = v = 9{,}0\,m/s$, para o atleta A,

$v_m = v = 8\,m/s$, para o atleta B,

em qualquer instante de tempo. Atente para o fato de que isso só é verdade porque o movimento se dá ao longo de uma reta e com velocidade constante.

d) Nos quatro primeiros segundos o atleta A se deslocou da posição 1 *m* para a posição 37 *m*. Seu deslocamento foi então de 36 *m*, visto que:

$$\Delta x_A = x - x_0 = 37\,m - 1\,m = 36\,m.$$

O atleta B saiu da posição 3 *m* e foi para a posição 35 *m*, sendo seu deslocamento igual a 32 *m*, uma vez que:

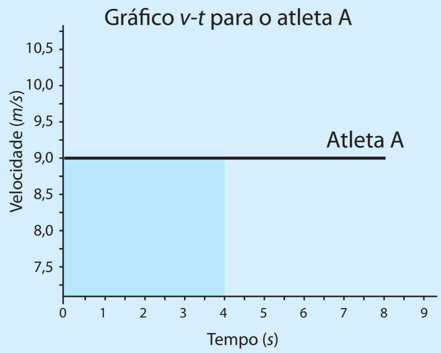
$$\Delta x_B = x - x_0 = 35\,m - 3\,m = 32\,m.$$

e) Nos quatro primeiros segundos, o atleta A possui velocidade 9 *m/s*. A área do gráfico *v-t* é dada por:

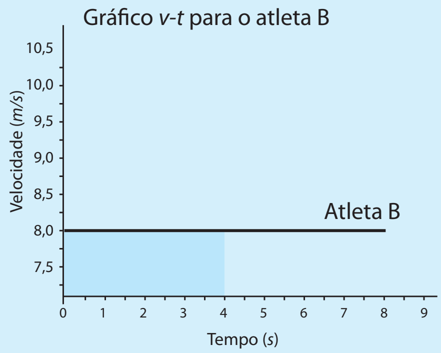
$$\Delta x_A = v_A \times t = 9\,m/s \times 4s = 36\,m.$$

Para o atleta B:

$$\Delta x_B = v_B \times t = 8\,m/s \times 4s = 32\,m.$$



(a)



(b)

Figura 2.14 – Gráfico da velocidade em função do tempo. (a) Atleta A e (b) atleta B. As áreas hachuradas clara e escura nas figuras indicam o deslocamento dos atletas A e B, respectivamente.

Observe que obter o deslocamento pela área do gráfico de velocidade em função do tempo é equivalente a utilizar a equação 2.5, em que:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

sendo $x - x_0 = 9\ m/s \times 4s = 36\ m$ para o atleta A e

$x - x_0 = 8\ m/s \times 4s = 32\ m$ para o atleta B.

Embora o cálculo tenha sido feito para um caso em que a velocidade é constante, esse método se aplica a movimentos em que a velocidade não é constante, mas neste caso deve ser utilizado o cálculo integral para obter a área sob a curva do gráfico *v-t*, como será visto nas próximas aulas.

ATIVIDADE 2.3

A posição $x(t)$ de um automóvel que se move ao longo de um trajeto retilíneo é descrita pelo gráfico da Figura 2.15.

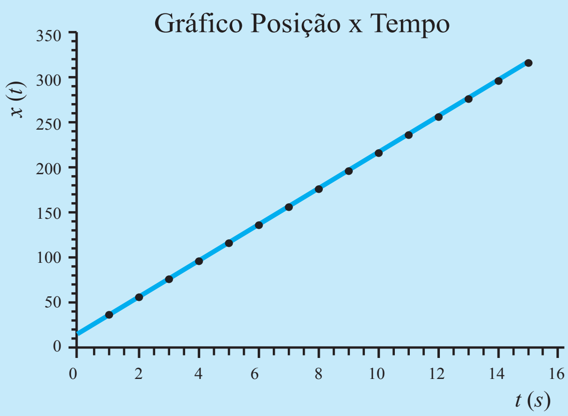


Figura 2.15 – Gráfico da posição em função do tempo para o automóvel da atividade 2.3.

a) Determine a equação que expressa a posição $x(t)$ do automóvel em função do tempo t.

b) Calcule a sua velocidade nos instantes de tempo t_3 = 3,0*s* e t_5 = 5,0*s*.

c) Faça um gráfico da velocidade em função do tempo para o movimento do automóvel.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 2.1 – Deslocamento e distância

a) O deslocamento do avião é igual à variação de sua posição no trajeto $\Delta x = x_2 - x_1 = x_1 - x_1 = 0$, pois ele sai de um ponto e retorna a esse mesmo ponto, tendo um deslocamento nulo.

A distância total percorrida é igual a 1.800 *km*, pois é a soma da distância percorrida na ida mais a distância percorrida na volta.

Atividade 2.2

a) No instante de tempo t_1 temos:

$$x_1(1,0h) = 0,500(km/h)^3 \times (1,0h)^3 - 0,200(km/h)^2 \times (1,0h)^2 + 0,600(km/h) \times (1,0h)$$

$$x_1(1,0h) = +0,90\ km.$$

Para t_3 temos:

$$x_3(3,0h) = 0,500(3,0h)^3 - 0,200(3,0h)^2 + 0,600(3,0h)$$

$$x_3(3,0h) = 13,5\ km.$$

b) O deslocamento da partícula entre os instantes de tempo t_1 e t_7 é:

$$\Delta x = x_3 - x_1 = 13,5\ km - (0,9\ km)$$

$$\Delta x = 12,6\ km.$$

c) A velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo. Então:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$v(t) = 0,500(3t^2) - 0,200(2t) - 0,600$$

$$v(t) = 1,50t^2 - 0,400t - 0,600,$$

em que v é dada em *km/h* e *t* em horas.

d) A posição x_5 da partícula no instante de tempo t_5 = 5,0 *h* é:

$$x_5(5,0) = 0,500(5,0)^3 - 0,200(5,0)^2 + 0,600(5,0)$$

$$x_5(5,0) = 60,5\ km.$$

Para $t_7 = 7{,}0\ h$ temos:

$$x_7(7{,}0) = 0{,}500(7{,}0)^3 - 0{,}200(7{,}0)^2 + 0{,}600(7{,}0)$$

$$x_7(7{,}0) = 165{,}9\ km.$$

Então o deslocamento entre os instantes de tempo t_5 e t_7 é:

$$\Delta x = x_7 - x_5 = 165{,}9\ km - 60{,}5\ km = 105{,}4\ km.$$

A velocidade média da partícula portanto é:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{105{,}4\ km}{2\,h} = 52{,}7\ km/h.$$

Atividade 2.3

a) A equação que expressa a posição $x(t)$ em função do tempo t para o automóvel será do tipo:

$$x(t) = a + b\ ,$$

pois o gráfico é uma reta que corta o eixo $x(t)$ no ponto a. A inclinação da reta é b, ou seja, a velocidade do automóvel:

$$v = b = \frac{dx}{dt} = 24\ m/s.$$

Portanto:

$$x(t) = 15\ m + (24\ m/s)t.$$

b) O movimento do automóvel é retilíneo e uniforme, sendo sua velocidade:

$$v = 24\ m/s,$$

em qualquer instante de tempo.

c) O gráfico de velocidade por tempo é uma reta horizontal, paralela ao eixo do tempo, pois, para qualquer instante de tempo t, a velocidade é sempre a mesma. Veja a Figura 2.16:

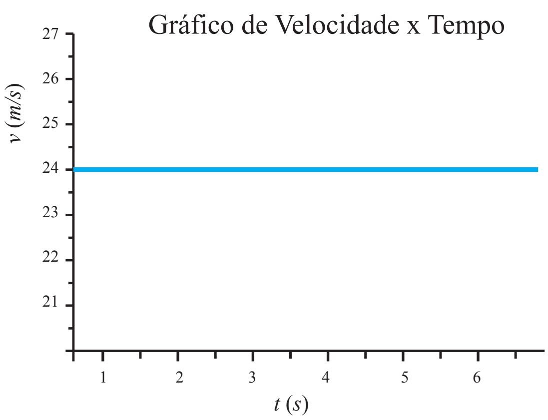


Figura 2.16 – Gráfico da velocidade em função do tempo para o automóvel da atividade 2.3.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Dois alunos de física estão discutindo sobre deslocamento e velocidade média. Euler afirma que é possível haver **velocidade média** diferente de zero se o **deslocamento for nulo**. Fermat acredita que é possível haver **velocidade instantânea** diferente de zero com **deslocamento nulo**. Argumente, utilizando um gráfico de posição em função do tempo, sobre qual dos dois alunos deve estar correto.

E2. Newton fez uma viagem de trem que durou 15,3 *h*. Karla fez a mesma viagem de avião durante 1,70 *h*. Qual é a relação entre as velocidades médias do trem e do avião?

E3. Uma viagem de Belo Horizonte a Confins dura 26 minutos, quando você dirige um carro com velocidade média de 90 *km/h*. Contudo, no horário de pico, o trânsito está pesado e você percorre a mesma distância com velocidade média de 55 *km/h*. Calcule o tempo que você leva para fazer esse percurso.

E4. Você está em uma competição em que faz 100 *m* rasos de oeste para leste com velocidade média de 6 *m/s* e em seguida retorna 30 *m* na mesma pista de leste para oeste com velocidade média de 4,5 *m/s*.

a) Determine a sua velocidade escalar média de percurso na corrida.

b) Obtenha a velocidade média durante todo o percurso.

E5. Um ônibus percorre um trecho retilíneo de uma rodovia federal. Sua posição varia no tempo de acordo com a equação $x(t) = At^2 - Bt^3$, em que $A = 2{,}50\ m/s^2$ e $B = 0{,}100\ m/s^3$. Determine sua velocidade média para os seguintes intervalos de tempo:

a) $t = 0$ e $t = 2{,}5\ s$;

b) $t = 0$ e $t = 4{,}5\ s$;

c) $t = 2{,}5\ s$ e $t = 4{,}5\ s$.

E6. Um caminhão para em um posto de gasolina e abastece. Em seguida, continua sua viagem passando por um trecho de uma via retilínea onde sua posição em função do tempo é dada por $x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3$, em que $\alpha = 3{,}40\ m/s^2$ e $\beta = 0{,}200\ m/s^3$.

a) Calcule a velocidade instantânea para $t = 0$, $t = 6{,}00\ s$ e $t = 12{,}0\ s$.

b) Em que posição o caminhão para novamente? Quanto tempo leva para que ele pare?

E7. O professor Celso sai de sua casa e dirige até o Campus. Ele leva 7,5 minutos para chegar ao Campus, mas percebe que se esqueceu de um livro e retorna até a sua casa para pegá-lo. A sua posição em função do tempo é indicada pelo gráfico da Figura 2.17. Analise o gráfico e responda:

a) Em que posição a sua velocidade foi crescente? E decrescente?

b) Em que ponto sua velocidade foi constante e positiva? E constante e negativa?

c) Em que posição sua velocidade foi nula?

d) De sua casa até o Campus, qual foi sua velocidade média? E do Campus até a sua casa?

e) Qual é a sua velocidade média no percurso total, indicado pelo gráfico da Figura 2.17?

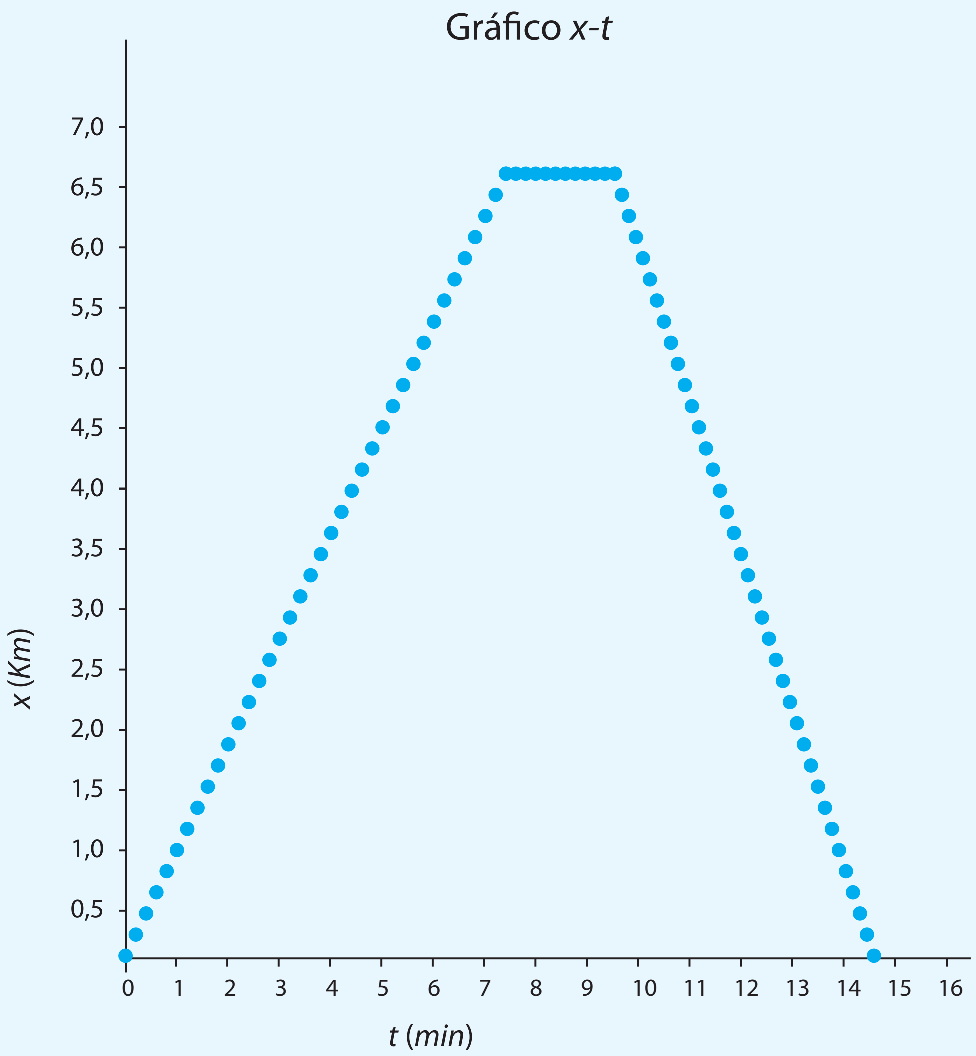


Figura 2.17 – Gráfico da posição em função do tempo para o professor Celso da atividade 2.7.

AULA 3

Aceleração

Objetivos

- Definir aceleração média e aceleração instantânea;
- Entender a aceleração como derivada da velocidade em relação ao tempo ou como a derivada segunda da posição em relação ao tempo;
- Compreender a relação entre o deslocamento e a área sob a curva do gráfico de velocidade por tempo;
- Compreender a relação entre a variação da velocidade e a área sob a curva do gráfico de aceleração por tempo.

3.1 ACELERAÇÃO MÉDIA E ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA

3.1.1 Aceleração média

Na maioria das situações reais a velocidade dos corpos não permanece constante durante o seu movimento. A aceleração é a grandeza física que caracteriza a variação da velocidade em um dado intervalo de tempo, sendo também uma grandeza vetorial.

Considere um bloco que desce uma rampa inclinada sem atrito, como indica a Figura 3.1a. O bloco é solto a partir do repouso (isto é, com velocidade nula) de certa altura na rampa. A partir daí sua velocidade aumenta até chegar à base da rampa. Dizemos então que o bloco sofreu uma aceleração. Algo semelhante ocorre quando um bloco que já possui certa velocidade tenta subir uma rampa como ilustrado na Figura 3.1b. À medida que sobe a rampa, sua velocidade diminui até parar em certo ponto. Neste caso dizemos que o bloco sofreu uma desaceleração.

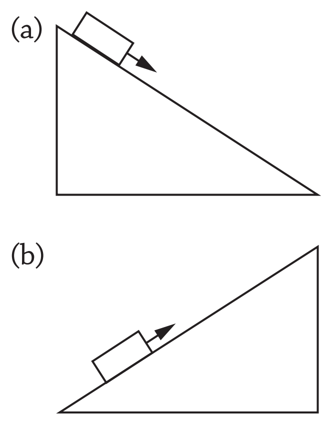


Figura 3.1 – (a) Um bloco desce quando é solto de certo ponto em uma rampa que possui certa inclinação em relação ao piso. (b) A velocidade de um bloco diminui à medida que ele sobe uma rampa inclinada com atrito desprezível.

Suponha que o movimento do bloco na rampa seja retilíneo, de modo que ele se mova sobre um eixo, que será arbitrariamente chamado de eixo x. Em certo ponto x_1 sua velocidade é v_1 em um instante de tempo t_1, e em outro ponto x_2 sua velocidade é v_2 em um instante de tempo t_2.

Define-se a **aceleração média** como sendo a razão entre a variação da velocidade e o intervalo de tempo decorrido:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.1}$$

3.1.2 Aceleração instantânea

A **aceleração instantânea** é definida de modo análogo ao da velocidade instantânea. Ela indica a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo. A aceleração instantânea é obtida calculando-se a aceleração média em intervalos de tempo cada vez menores, fazendo $\Delta t \to 0$. Observe que fazendo isso a inclinação da reta *AB* do gráfico *v*-*t* da Figura 3.2a se aproxima da inclinação da reta tangente ao ponto *A*, como ilustra a Figura 3.2b. No limite, tem-se a aceleração instantânea do corpo dada por:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \tag{3.2}$$

Portanto,

a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo.

A unidade da aceleração no SI é o metro por segundo ao quadrado [m/s^2].

Observe que:

$$v = \frac{d}{dt}(x) \quad \text{e} \quad a = \frac{d}{dt}(v).$$

Então:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3.3}$$

Isso significa que a aceleração é a derivada segunda da posição em função do tempo.

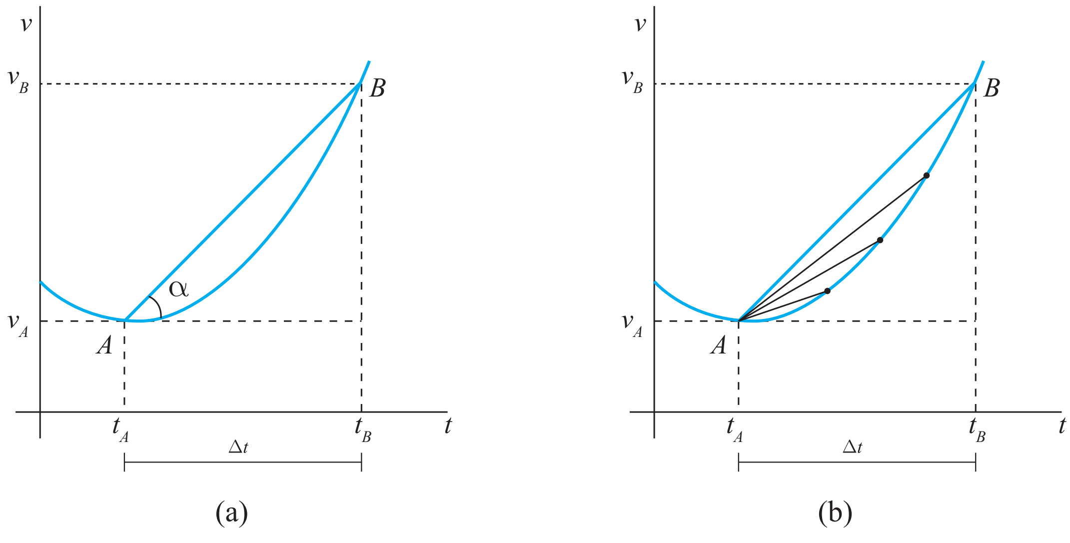


Figura 3.2 – (a) A aceleração média entre os instantes de tempo t_A e t_B é igual à inclinação da reta *AB*. (b) Quando os intervalos de tempo se tornam curtos, a inclinação da reta *AB* se aproxima da inclinação da reta tangente ao ponto *A*.

ATIVIDADE 3.1 – ACELERAÇÃO MÉDIA E ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA

Durante 10s uma partícula foi cuidadosamente observada e sua posição pode ser descrita pela equação:

$$x = (9,8\ m/s)t - (1,0\ m/s^2)t^2 + 5,9\ m.$$

a) Em que posição sua velocidade foi nula? Qual é a sua aceleração nessa posição?
b) Qual é a sua velocidade para os instantes de tempo $t = 6,0s$ e $t = 9,0s$?
c) Descreva o movimento dessa partícula nos 10s de observação.

3.2 MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE

Em movimentos que possuem aceleração constante, a aceleração média é igual à aceleração instantânea.

Podemos considerar o movimento do bloco que desce a rampa da Figura 3.1 como retilíneo e com aceleração constante. Em certo ponto x_o, em um instante de tempo t_o, sua velocidade é v_o e em outro ponto x qualquer posterior, em um instante de tempo t, sua velocidade é v. Pela equação 3.1 temos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{t - t_o};$$

e, portanto:

$$v = v_o + a(t - t_o). \tag{3.4}$$

A equação 3.4 fornece a velocidade $v(t)$ de um corpo **com aceleração a constante** para qualquer instante de tempo t, conhecidos sua velocidade inicial v_o e o instante de tempo inicial t_o. Normalmente tomamos o instante de tempo inicial como zero, tal que $v = v_o + at$.

Os gráficos de aceleração e velocidade em função do tempo para um movimento com aceleração constante são mostrados na Figura 3.4. Você poderá perceber que a área sob a curva do gráfico *a-t* é igual ao produto da aceleração por tempo (*at*), que corresponde à variação da velocidade $(v - v_0)$ durante o intervalo de tempo Δt. Então, a velocidade pode ser obtida do gráfico *a-t*, conhecida a velocidade inicial v_0.

Mesmo quando a aceleração não for constante, podemos utilizar a área sob a curva de um gráfico *a-t* para obter a variação de velocidade $(v - v_0)$.

Conforme foi visto na aula anterior, o deslocamento pode ser obtido pela área sob a curva de um gráfico de velocidade por tempo (veja a Figura 2.11). Observe então que a área do gráfico da Figura 3.4b é igual ao deslocamento Δx correspondente ao intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$ (observe que $t_0 = 0$ no gráfico da Figura 3.4b):

$$Área = \frac{1}{2}a(t-t_0)(t-t_0) + v_0(t-t_0) = \Delta x$$

$$x - x_0 = v_0\left(t-t_0\right) + \frac{1}{2}a\left(t-t_0\right)^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at.^2 \qquad (3.5)$$

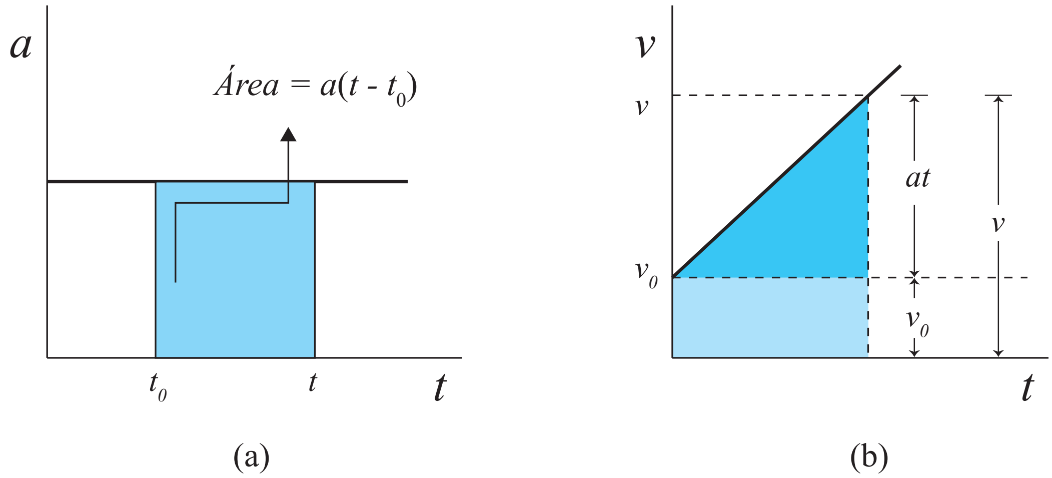


Figura 3.4 – (a) Gráficos de aceleração em função do tempo e (b) velocidade em função do tempo para um movimento com aceleração constante.

A equação 3.5 fornece a posição $x(t)$ de um corpo com aceleração constante a para qualquer instante de tempo t, conhecidos sua posição inicial x_0, sua velocidade inicial v_o e tomando o instante de tempo inicial $t_o = 0$.

Utilizando as equações 3.4 e 3.5, a velocidade v pode ser obtida em função do deslocamento Δx. Da equação 3.4, com $t_o = 0$, temos:

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Substituindo na equação 3.5:

$$x - x_0 = +v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2$$

$$\Delta x = \frac{v-v_0}{a}\left[v_0 + \frac{\left(v-v_0\right)}{2}\right]$$

$$a\Delta x = \left(v-v_0\right)\left[v_0 + \frac{v}{2} - \frac{v_0}{2}\right]$$

$$a\Delta x=(v-v_0)\frac{1}{2}(v+v_0)$$

$$a\Delta x=\frac{1}{2}(v^2-v_0{}^2)$$

$$2a\Delta x=v^2-v_0{}^2$$

$$v^2=v_0{}^2+2a(x-x_0) \tag{3.6}$$

A equação 3.6, conhecida como **Equação de Torricelli**, fornece a velocidade $v(x)$ de um corpo que se move com aceleração a constante em qualquer posição x, conhecida sua posição inicial x_0 e sua velocidade inicial v_0.

Exemplo 3.1

Considere um ônibus movendo-se em linha reta em uma rodovia com aceleração constante. Para t = 0, quando o movimento começou a ser analisado, sua velocidade era 12,5 *m/s*. Após um intervalo de tempo de 10 *s*, sua velocidade tornou-se 16,7 *m/s*.

a) Qual é a aceleração média do ônibus?
b) Quais são a sua aceleração e a sua velocidade no instante de tempo t = 5 s?

Solução

a) Posicionemos o sistema de coordenadas de modo tal que o seu sentido positivo esteja no sentido do movimento e sua origem, o ponto onde o ônibus está no início do intervalo de tempo de 10*s*.

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{16,7\ m/s-12,5\ m/s}{10\,s-0\,s}$$

$$a_m=0,42\ m/s^2.$$

b) Como a aceleração é constante para qualquer intervalo de tempo, a aceleração média é igual à aceleração instantânea a:

$$a=a_m=0,42\ m/s^2$$

e podemos utilizar a equação 3.4 para determinar sua velocidade v em qualquer instante de tempo t, conhecendo t_0. Como t_0 = 0 *s*, a velocidade do ônibus é:

$$v=v_o+a(t-t_o)$$

$$v=12,5\ m/s+0,42\ m/s^2(5s)$$

$$v=14,6\ m/s.$$

ATIVIDADE 3.2

Uma pedra é solta do alto de um edifício. Após certo tempo, a pedra se encontra a 19,6 *m* da posição de lançamento com velocidade $v = 19,6\ m/s$. A pedra chega ao chão 2,5 *s* após o lançamento e sua aceleração durante a queda é constante.

a) Calcule a aceleração da pedra.
b) Determine a altura do edifício.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 3.1 – Aceleração média e aceleração instantânea

a) A velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo. E, portanto:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 9,8\ m/s - 2(1,0\ m/s^2)t.$$

Para $v(t) = 0$:

$$0 = 9,8\ m/s - 2(1,0\ m/s^2)t$$

$$t = \frac{9,8\ m/s}{2,0\ m/s^2}$$

$$t = 4,9\,s.$$

Então a velocidade é nula quando $t = 4,9s$. Logo:

$$x(4,9\,s) = (9,8\ m/s)(4,9\,s) - (1,0\ m/s^2)(4,9\,s)^2 + 5,9\,m$$

$$x(4,9\,s) = 29,9\ m.$$

A velocidade da partícula foi nula na posição 29,9 *m*.

A aceleração é a derivada segunda da posição em relação ao tempo e a derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$a = \frac{d}{dt}(v) \qquad \text{e} \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Sendo neste caso $a = -2,0\ m/s^2$.

Então a aceleração foi constante durante a observação, nunca sendo igual a zero. O sinal negativo indica que a aceleração é contrária ao movimento. Isso significa que, durante os primeiros instantes de tempo da observação, a partícula sofreu uma desaceleração. A Figura 3.5 mostra um esquema dessa situação. Em nosso sistema de referência o sentido positivo é o do eixo *x* crescente.

b) Sabemos que:

$$v(t) = 9,8\ m/s - (2,0\ m/s^2)t;$$

e, então:

$$v(6{,}0\,s) = 9{,}8\,m/s - (2{,}0\,m/s^2)(6{,}0\,s)$$
$$v(6{,}0\,s) = -2{,}2\,m/s$$
$$v(9{,}0\,s) = 9{,}8\,m/s - (2{,}0\,m/s^2)(9{,}0\,s)$$
$$v(9{,}0\,s) = -8{,}2\,m/s.$$

Novamente, o sinal negativo indica o sentido de uma grandeza vetorial, neste caso a velocidade; observe a Figura 3.5.

A velocidade é decrescente nos primeiros instantes de tempo e dirigida da esquerda para a direita. A aceleração possui módulo constante e é contrária ao movimento. A velocidade diminui até se anular em x = 78 m em t = 4,9 s. A partir daí a velocidade aumenta, mas no sentido contrário (da direita para a esquerda). No instante de tempo t = 10 s:

$$x(t) = (9{,}8\,m/s)t - (1{,}0\,m/s^2)t^2 + 5{,}9\,m$$
$$x(10\,s) = (9{,}8\,m/s)(10\,s) - (1{,}0\,m/s^2)(10\,s)^2 + 5{,}9\,m$$
$$x(10\,s) = 3{,}9\,m$$
$$v(t) = 9{,}8\,m/s - (2{,}0\,m/s^2)t$$
$$v(10\,s) = 9{,}8\,m/s - (2{,}0\,m/s^2)(10\,s)$$
$$v(10\,s) = -10{,}2\,m/s.$$

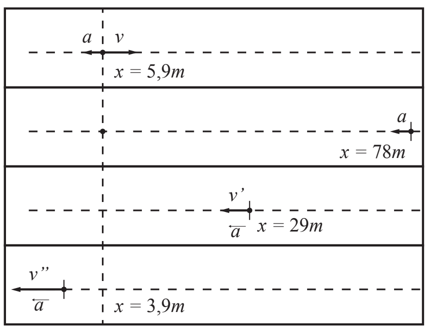


Figura 3.5 – Posição, velocidade e aceleração para a partícula, de baixo para cima, nos instantes de tempo 0 s, 4,9 s, 6 s e 10 s, respectivamente.

Atividade 3.2

a) A pedra é solta de certa altura, sua velocidade inicial é $v_0 = 0$. Considere a posição inicial $x_0 = 0$ no ponto de lançamento. Utilize então a equação 3.6 para calcular a aceleração da pedra:

$$v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)$$
$$v^2 = 0 + 2a(x - 0)$$
$$\frac{v^2}{2x} = a,$$

quando $x = 19,6\ m$, $v = 19,6\ m/s$, então

$$a = \frac{v^2}{2x} = \frac{(19,6\ m/s)^2}{2(19,6\ m)}$$

$$a = 9,8\ m/s^2.$$

b) A altura do prédio corresponde ao módulo do deslocamento da pedra desde seu lançamento até o momento em que ela se choca com o chão (veja a Figura 3.6). Utilizando a equação 3.5, temos:

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2,$$

em que $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$. Então:

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = \frac{1}{2}(9,8\ m/s^2)(2,5\ s)^2$$

$$x = 30,6\ m.$$

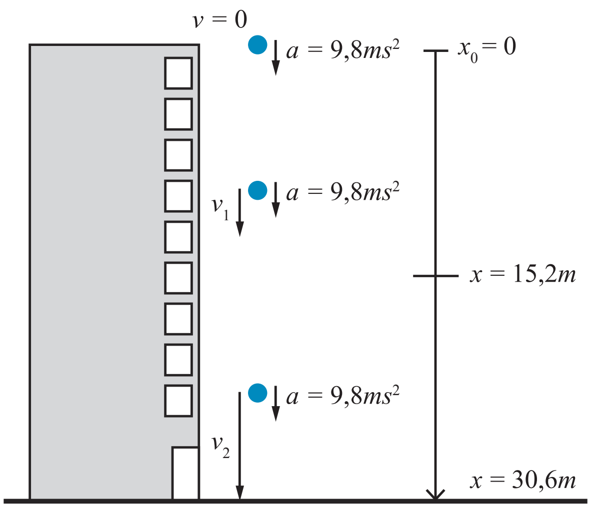


Figura 3.6 – Uma pedra é solta do alto de um edifício. A figura mostra a pedra em três instantes de tempo t_0, t_1 e t_2, onde sua velocidade é v_0, v_1 e v_2. A sua aceleração é constante e aponta de cima para baixo. A figura também mostra o deslocamento para três instantes de tempo diferentes.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um carro de testes se move com aceleração constante e leva 3,5 *s* para percorrer uma distância de 50,0 *m* entre dois pontos. Ao passar pelo segundo ponto, sua velocidade é de 32,0 *m/s*.

a) Qual era a sua velocidade ao passar pelo primeiro ponto?

b) Qual foi a aceleração do carro?

E2. Um ônibus está inicialmente parado em um semáforo. Ele então acelera a uma taxa constante de 2,20 m/s^2 durante 10 *s*. Em seguida mantém velocidade constante durante 30 *s* e reduz a uma taxa constante de 3,00 m/s^2, até parar em outro semáforo. Determine a distância total percorrida pelo ônibus.

E3. A velocidade de uma bicicleta é dada pela equação $v(t) = \alpha t + \beta t^2$, em que $\alpha = 2,50\ m/s^2$ e $\beta = 0,200\ m/s^3$.

a) Determine a aceleração média da bicicleta para o intervalo de tempo $t = 0$ a $t = 5,00s$.

b) Calcule a velocidade instantânea para $t = 0$ e $t = 2,00s$.

c) Faça os gráficos de velocidade e aceleração em função do tempo para o movimento da bicicleta.

E4. A Figura 3.7 mostra um gráfico de velocidade em função do tempo da viagem de metrô em um pequeno trecho entre estações. Sabe-se que o veículo é inicialmente acelerado e move-se durante 8,5 minutos com velocidade constante de 50 *km/h*. A seguir o veículo é desacelerado e após 10,5 minutos da partida da estação ele para. Determine a sua aceleração média para os seguintes intervalos de tempo:

a) $t = 0$ e $t = 0,5$ min;

b) $t = 3,0$ min e $t = 6,0$ min;

c) $t = 0$ e $t = 10,5$ min;

d) Calcule o deslocamento.

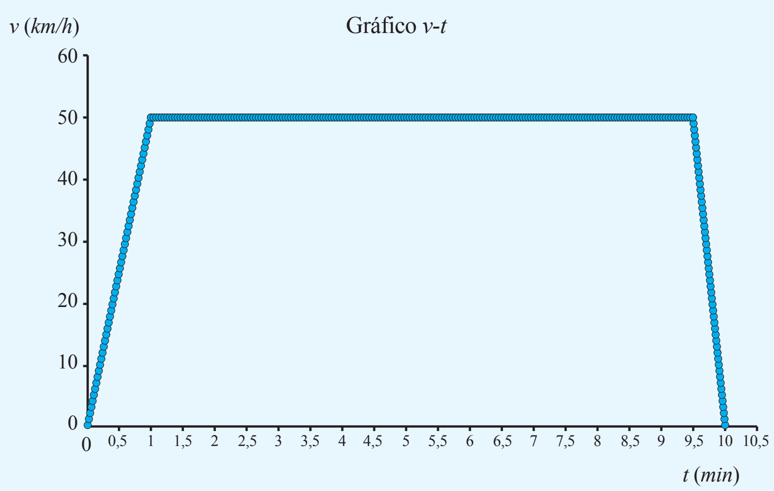


Figura 3.7 – Gráfico da velocidade em função do tempo para o metrô do exercício 3.4.

E5. Suponha que, durante uma decolagem, um avião tenha aceleração constante e leva 9,0 *s* para levantar voo em uma pista de 290 *m*. Qual é a velocidade no momento da decolagem do avião?

E6. Considere o gráfico da Figura 3.8 que ilustra o movimento de um automóvel e responda:

a) Qual é o valor da aceleração instantânea para $t = 4,0\ s$?

b) Em que intervalo de tempo a aceleração tem seu maior valor positivo? E negativo?

c) Determine a aceleração, a velocidade e a posição do automóvel nos instantes de tempo $t = 0\ s$, $t = 3,0\ s$ e $t = 6\ s$.

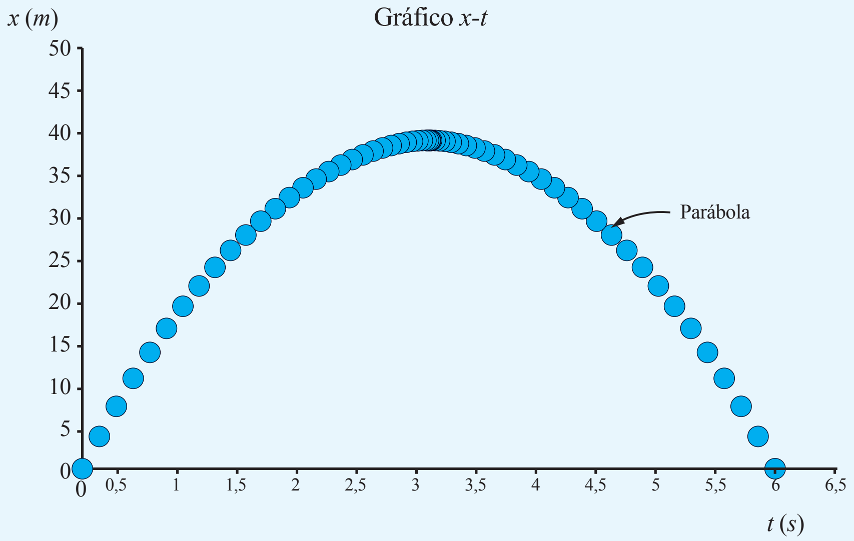


Figura 3.8 – Gráfico da posição em função do tempo para o automóvel do exercício 3.6.

E7. A Figura 3.9 mostra um gráfico de posição em função do tempo para o movimento de um helicóptero que, durante certo intervalo de tempo, se move ao longo de uma trajetória retilínea.

a) Determine a posição, a velocidade e a aceleração do helicóptero para os instantes de tempo $t = 5\ s$, $t = 15\ s$, $t = 30\ s$ e $t = 45\ s$.

b) Faça os gráficos de velocidade e aceleração em função do tempo para o movimento do helicóptero.

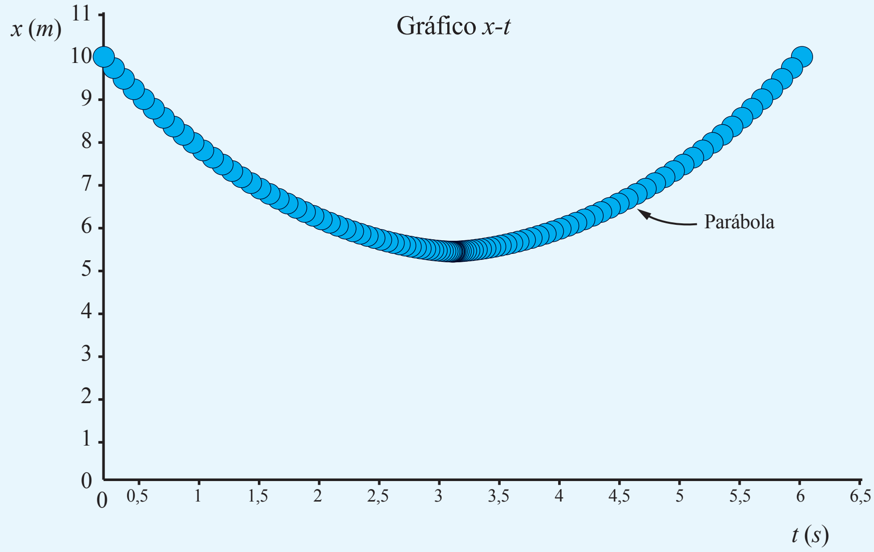


Figura 3.9 – Gráfico da posição em função do tempo para o helicóptero do exercício 3.7.

E8. O gráfico da Figura 3.10 mostra a velocidade de um triciclo em função do tempo.

a) Determine a aceleração instantânea em $t = 4\ s$, $t = 6\ s$ e $t = 18\ s$.

b) Determine a aceleração média no intervalo de tempo entre $t = 3\ s$ e $t = 4\ s$, $t = 7\ s$ e $t = 8\ s$ e entre $t = 16\ s$ e $t = 18\ s$.

c) Determine o deslocamento do triciclo nos intervalos iniciais 6 s, 12 s e 20 s.

d) Determine a distância total percorrida.

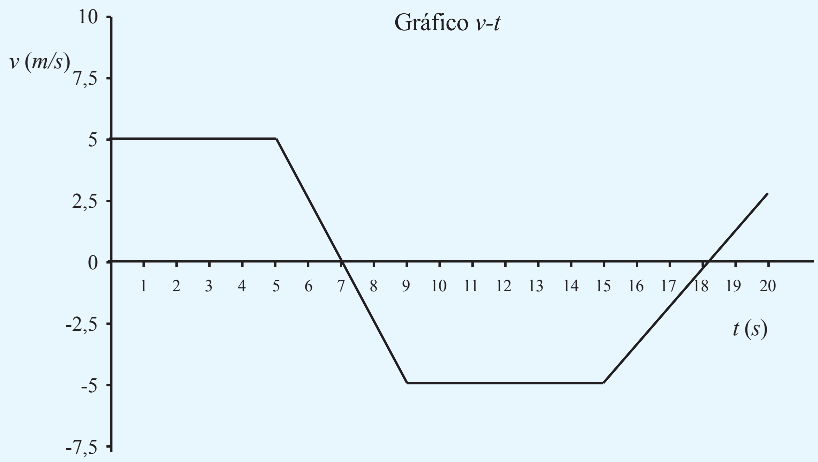


Figura 3.10 – Gráfico da velocidade em função do tempo para o triciclo do exercício 3.8.

AULA 4

Queda livre

Objetivo

- Aplicar os conceitos de cinemática em movimentos de queda livre.

4.1 QUEDA LIVRE

Quando um corpo está sujeito apenas à atração gravitacional, dizemos que ele está em queda livre. A queda da maçã de uma macieira, uma pedra lançada verticalmente para cima e o movimento orbital de um satélite são exemplos de movimentos de queda livre **quando os efeitos da resistência do ar podem ser desprezados**.

De acordo com a Lei de Gravitação Universal, proposta por Newton, a **aceleração gravitacional *g*** na superfície da Terra é dada por:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2},$$

em que R_T é o raio da Terra e M_T é a massa da Terra. Portanto, a força de atração da Terra sobre qualquer corpo diminui à medida que nos afastamos de seu centro. Em particular, se h é a altura acima da superfície da Terra, temos que:

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}.$$

O valor exato varia de um local para outro. Porém, é uma boa aproximação considerá-la constante nas proximidades da Terra (Figura 4.1) se o corpo estiver sujeito apenas à força gravitacional. Nesse caso é comum chamarmos de aceleração de queda livre ou aceleração da gravidade, sendo seu valor aproximado próximo à superfície terrestre igual a:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}8\ m/s^2.$$

Considere agora o movimento de uma pedra lançada verticalmente para cima, como mostra a Figura 4.2. Se a resistência do ar é desprezada, a única força atuante sobre a pedra é a de atração da Terra dirigida para o seu centro. Isso significa que a acele-

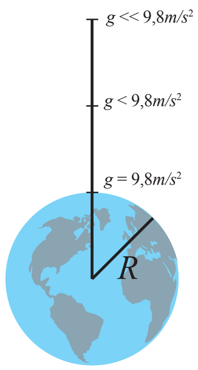


Figura 4.1 – A aceleração de queda livre diminui à medida que se afasta do centro da Terra.

ração g possui a mesma direção da trajetória descrita pela pedra, mas possui sentido contrário ao deslocamento no movimento de subida (Figura 4.2a) e mesmo sentido no movimento de descida (Figura 4.2b).

Desse modo, durante a subida, a aceleração é contrária ao movimento, fazendo com que sua velocidade diminua até se anular em certo ponto (no ponto mais alto da trajetória). A partir daí, no movimento de descida, a aceleração tem o mesmo sentido do movimento, fazendo com que sua velocidade aumente.

Em nenhum ponto da trajetória sua aceleração é nula!

A aceleração da bola é a aceleração da gravidade, de módulo g, e dirigida para baixo o tempo todo.
Veja o desenho de g na figura!

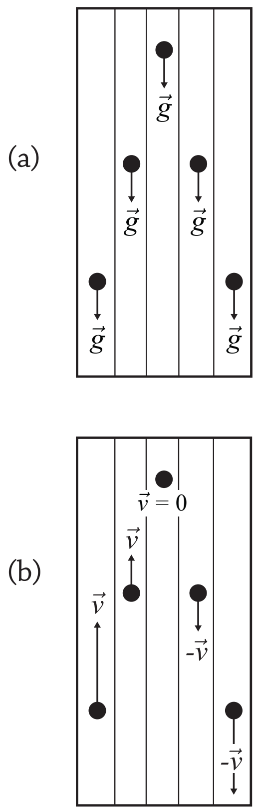


Figura 4.2 – Movimentos de (a) subida e (b) descida de uma bola lançada verticalmente para cima. A figura mostra o movimento da bola em quatro instantes de tempo diferentes. Como no movimento de subida a aceleração é contrária ao movimento, a velocidade diminui até se anular no ponto mais alto da trajetória. Nesse ponto a aceleração não é nula, de modo que a velocidade começa a aumentar "para baixo".

Atenção!

A velocidade no ponto mais alto da trajetória, da bola arremessada para cima, é nula. No entanto sua aceleração possui módulo constante g e está dirigida para o centro da Terra. É um erro comum pensar que a aceleração é nula onde a velocidade for nula. Lembre-se de que a aceleração define a variação de velocidade em um dado intervalo de tempo e, de fato, a velocidade da bola varia: sua velocidade diminui enquanto ela sobe e aumenta enquanto ela desce. Sua aceleração, no entanto, é sempre a mesma!

Se o movimento de queda livre ocorrer ao longo de uma linha reta, as equações desenvolvidas para o movimento retilíneo podem ser utilizadas.

Adotando a direção y como direção vertical e o sentido positivo para cima, a aceleração será negativa (g aponta sempre para o sentido negativo do eixo y). Utilizando as equações 3.4 e 3.5, substituindo y por x e a por $-g$, tem-se que:

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v = v_0 - gt,$$

em que, por conveniência, fazemos $t_0 = 0$ no momento do lançamento para obtermos:

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad (4.1)$$

$$v = v_0 - gt. \qquad (4.1)$$

Note que dadas a posição inicial y_0, a velocidade inicial v_0 e a aceleração da gravidade local g, podemos obter a posição y e a velocidade v de um corpo em queda livre, em qualquer instante de tempo t.

SAIBA MAIS

Um gravímetro é um aparelho utilizado para medir com boa precisão a aceleração da gravidade em determinado ponto. Procure se informar sobre seu funcionamento.

Exemplo 4.1

Certa bola possui massa $m = 0,5\ kg$ e foi arremessada verticalmente para cima com velocidade $v_0 = 20,0\ m/s$.

a) Determine a posição da bola no instante em que ela "para" momentaneamente.
b) Determine a posição e velocidade da bola nos quatro primeiros segundos após o lançamento, considerando a gravidade local igual a 9,8 m/s². Despreze a resistência do ar.

Solução

a) No instante em que a bola para, $v = 0$. A equação (t) da Aula 3 nos dá:

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{(20\ m/s)}{(9,8\ m/s^2)} = 2,2\ s.$$

Substituindo (t) na equação (5) da Aula 3, obtemos:

$$y(2,2\ s) = v_0\left(2,2\ s\right) - \frac{1}{2}g\left(2,2\ s\right)^2$$

$$y(2,2\ s) = (20\ m/s)\left(2,2\ s\right) - \frac{1}{2}(9,8\ m/s^2)\left(2,2\ s\right)^2$$

$$y(2,2\ s) = 22,2\ m.$$

A bola atinge a altura máxima de 22,2 *m* em 2,2 *s*. Observe que seriam encontrados os mesmos resultados para bolas de massas diferentes, pois nenhum deles depende da massa. Isso significa que se lançarmos duas bolas, uma de 0,5 *kg* e outra de uma tonelada, com velocidades de 20 *m/s*, ambas levarão 2,2 *s* para alcançar a mesma altura máxima de 22,2 *m* e, do mesmo modo, alcançarão o ponto de lançamento juntas se a resistência do ar for desprezível.

b) Escolha o sistema de coordenadas de modo que a origem do eixo coincida com o ponto de lançamento; sendo assim $y_0 = 0$. Logo:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y(t) = (20\ m/s)t - \frac{1}{2}(9,8\ m/s^2)t^2 \tag{A}$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$v(t) = (20\ m/s) - (9,8\ m/s^2)t, \tag{B}$$

para o movimento de subida, pois a aceleração é contrária ao movimento da bola. O sinal negativo se deve ao fato de a aceleração g possuir sentido contrário ao deslocamento da bola.

$$y(1,0s) = 15,1\ m \qquad v(1,0s) = 10,2\ m/s$$
$$y(2,0s) = 20,4\ m \qquad v(2,0s) = 0,4\ m/s$$
$$y(3,0s) = 15,9\ m \qquad v(3,0s) = -9,4\ m/s$$
$$y(4,0s) = 1,6\ m \qquad v(4,0s) = -19,2\ m/s$$

A bola foi arremessada do ponto de lançamento $y_0 = 0$ com velocidade inicial $v_0 = 20,0\ m/s$. Ela então começa a se deslocar no sentido positivo do eixo y e 1s após o lançamento ela está na posição $y_1 = 15,1\ m$ com velocidade $v_1 = 10,2\ m/s$. Isso significa que a bola se deslocou 15,1 m acima do ponto de lançamento e sua velocidade diminuiu 9,8 m/s em 1s, ou seja, desacelerou 9,8 m/s^2. Após 2,2 s do lançamento, ela se deslocou 22,2 m do ponto de lançamento e sua velocidade é nula nesse ponto. A partir daí ela começa a se deslocar no sentido negativo do eixo y e sua velocidade também aumenta nesse sentido. Em qualquer ponto da trajetória sua aceleração possui módulo constante igual a 9,8 m/s^2.

ATIVIDADE 4.1

Um pequeno bloco é solto do alto de um prédio com velocidade de 1,5 m/s. Após 1,5s do seu lançamento ele é percebido por uma pessoa que está em uma janela do prédio. O bloco gasta 2,8s para chegar ao chão.

a) Determine a altura H do prédio.
b) Qual é a velocidade do bloco imediatamente antes de chegar ao chão? Expresse o valor da velocidade em km/h.
c) Determine a altura h que a pessoa que vê o bloco passar em sua frente. Nesse momento qual é a velocidade do bloco?

ATIVIDADE 4.2

Duas pessoas de massa $m_1 = 72\,kg$ e $m_2 = 56\,kg$ saltam de uma cama elástica com velocidade de 9,1 *m/s*.

a) Determine a altura máxima atingida por ambas.
b) Calcule o tempo que cada uma permanece no ar.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 4.1

a) A altura *H* do prédio corresponde ao módulo do deslocamento do bloco desde o instante de tempo em que ele é solto até o momento em que ele chega ao chão. Pela equação 4.1 temos:

$$y - y_0 = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

$$H = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2;$$

para $t = 2{,}8\ s$:

$$H = (1{,}5\ m/s)(2{,}8\,s) + \tfrac{1}{2}(9{,}8\ m/s^2)(2{,}8)^2$$

$$H = 43\ m.$$

Observe atentamente que o sentido positivo do eixo y foi considerado de cima para baixo, de tal modo que a aceleração *g* possui a mesma direção e sentido do deslocamento do bloco na vertical; por isso adotou-se o sinal de *g* como positivo.

É evidente que se fosse escolhido um sistema de coordenadas em que o eixo *y* tivesse o sentido positivo de baixo para cima os resultados seriam os mesmos. Nesse caso *g* apontaria no sentido contrário ao de crescimento do eixo y e seria considerado com sinal negativo. Entretanto, o deslocamento do bloco cresceria negativamente e então Δy seria negativo:

$$\Delta y = -v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

E para $t = 2{,}8\,s$ teríamos:

$$-H = -(1{,}5\ m/s)(2{,}8\ s) - \tfrac{1}{2}(9{,}8\ m/s^2)(2{,}8)^2$$

$$-H = -43\ m$$

$$H = 43\ m.$$

Lembre-se de que a velocidade também é uma grandeza vetorial e, por isso, seu sinal também deveria ser invertido pela nova convenção que foi feita.

b) Para determinar a velocidade do bloco imediatamente antes de chegar ao chão, utiliza-se a equação 4.2:

$$v = v_0 + gt$$

$$v = 1,5\ m/s + (9,8\ m/s^2)(2,8s)$$

$$v = 27\ m/s$$

como $1\ m = 10^{-3}\ km$ e $1\ s = \left(\frac{1}{3600}\right)h$

$$v = 27\left(\frac{10^{-3}\ km}{\frac{1}{3600}h}\right)$$

$$v = 27 \times 3,6\ km/h = 99\ km/h.$$

A velocidade do bloco antes de tocar o solo é de 99 *km/h* (na direção vertical e dirigida de cima para baixo).

Calculando a posição do bloco em relação à origem para $t = 1,5\ s$ obtém-se que:

$$y(1,5\ s) = (1,5\ m/s)(1,5\ s) + \frac{1}{2}(9,8\ m/s^2)(1,5\ s)^2$$

$$y = 13\ m$$

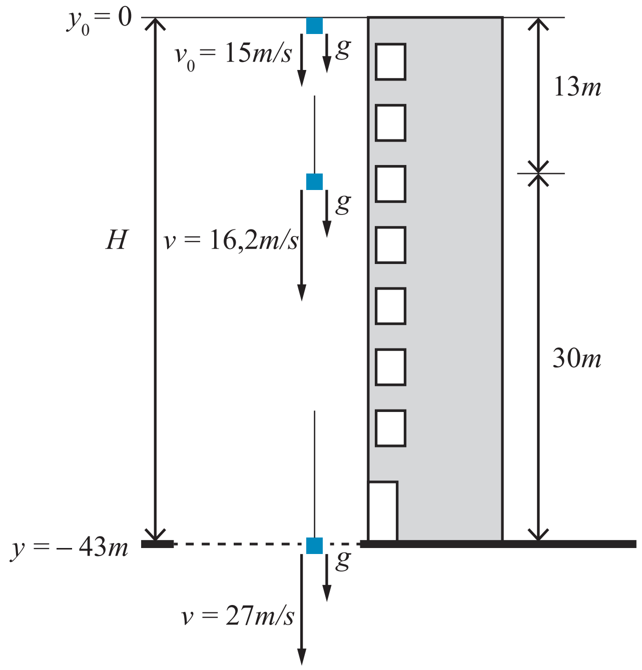


Figura 4.3 – Bloco caindo do alto de um edifício. Os vetores velocidade e aceleração são indicados nos instantes de tempo discutidos no problema.

Se o bloco está a 13 *m* do ponto de lançamento e o prédio tem 43 *m* de altura, o bloco deve estar a 30 *m* do chão, ou seja:

$$h = 30\ m\ .$$

Essa é a posição da pessoa que vê o bloco cair em relação ao chão.

Alternativamente:

$$y(1,5\ s) = -(1,5m/s)(1,5\ s) - \tfrac{1}{2}(9,8m/s^2)(1,5\ s)^2$$

$$y = -13\ m.$$

Novamente nesse caso o bloco está a 13 *m* do ponto de lançamento e então ele deve estar a 30 *m* do solo.

A sua velocidade pode ser obtida utilizando a equação 4.2:

$$v = v_0 + gt$$

$$v = 1,5\ m/s + \left(9,8\ m/s^2\right)\left(1,5\ s\right)$$

$$v = 16,2\ m/s.$$

Atividade 4.2

a) Utilizando a equação 4.1, considerando $t_0 = 0$ no exato momento em que eles saltam e fazendo a origem do eixo y coincidir com o ponto de lançamento, de modo que $y_0 = 0$, temos:

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

O sinal negativo na equação acima se deve ao fato da aceleração ser contrária ao deslocamento na vertical.

É preciso saber qual é o tempo t_h necessário para que eles atinjam a altura máxima h. Nesse instante de tempo sabemos que $v = 0$. Da equação 4.2 temos que:

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$0 = v_0 - gt_h$$

$$t_h = \frac{v_0}{g} = \frac{9,1\ m/s}{9,8\ m/s^2}$$

$$t_h = 0,93\ s$$

$$h = v_0 t_h - \tfrac{1}{2} g t_h{}^2$$

$$h = \left(9,1\ m/s\right)\left(0,93\ s\right) - \tfrac{1}{2}\left(9,8\ m/s^2\right)\left(0,93\ s\right)^2$$

Ambas atingem a altura de 4,2 *m*, pois essa altura é igual ao módulo do deslocamento na vertical, que não depende da massa dessas duas pessoas. Lembre-se: sempre que for falado em queda livre será desprezada a resistência do ar.

ATENÇÃO!

Muitas vezes consideramos $t_0 = 0$ e $y_0 = 0$ para simplificar os cálculos. Você poderá confirmar que, se escolher um sistema de coordenadas de modo que $y_0 \neq 0$, e considerar um instante de tempo inicial qualquer $t_0 \neq 0$; os resultados obtidos serão os mesmos. Resolva essa atividade considerando a origem do eixo y fora do ponto de lançamento das pessoas e considerando o início da "cronometragem" do tempo diferente de zero, ou seja, $t_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. Os resultados são os mesmos?

b) O tempo que eles permanecem no ar é igual ao dobro do tempo t_h necessário para que eles atinjam a altura máxima, pois o tempo de subida é igual ao tempo de descida (calcule o tempo de descida para se convencer disso!). Então $t_{ar} = 1,9\ s$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Desconsidere a resistência do ar sobre o movimento de queda das gotas de chuva para estimar a velocidade de uma gota que atinge o solo. Levando em consideração a sua estimativa, você pode dizer que a resistência do ar nesse caso pode ser desprezada?

E2. Um grande bloco se desprendeu do alto de um edifício e atinge o solo depois de 2,35 *s*. A resistência do ar neste caso pode ser desprezada.

a) Qual é a velocidade do bloco quando ele toca o solo?

b) Determine a altura do edifício.

c) Faça os gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo do movimento do bloco.

E3. Maxwell consegue pular a uma altura de 0,80 *m* e arremessar uma bola até uma altura de 15 *m*. Suponha que ele vá para um lugar onde a aceleração da gravidade local fosse 10 vezes menor.

a) Que altura Maxwell poderá atingir se pular em um local onde o valor de *g* é 10 vezes menor?

b) A que altura ele arremessará a bola?

E4. Uma bala é atirada verticalmente para cima de uma arma com velocidade inicial de 95 *m/s*. Despreze a resistência do ar.

a) Calcule a altura máxima atingida pela bala.

b) Calcule o tempo para que a bala atinja a altura máxima.

c) Determine o tempo para que, após o lançamento, sua velocidade seja de 30,0 *m/s*.

d) Quanto tempo leva para que ela tenha uma velocidade de -30,0 *m/s*?

E5. Você pode pedir a ajuda de um colega para calcular seu **tempo de reação**. Peça a seu colega para segurar uma régua verticalmente entre os seu dedos polegar e indicador. Quando ele largar a régua você a segura com esses dois dedos. Tendo a distância que a régua percorreu entre os seus dedos é possível obter o seu tempo de reação, uma vez que o movimento da régua possui aceleração constante. Calcule então o seu tempo de reação.

AULA 5

Aplicações da cinemática

Objetivo

- Utilizar os conceitos de posição, deslocamento, velocidade e aceleração estudados nas aulas anteriores

Não passe para a próxima aula sem resolver as atividades desta aula!

5.1 APLICAÇÕES DO MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME

ATIVIDADE 5.1

Um ônibus da Viação Vai e Vem faz uma viagem de Belo Horizonte a Fortaleza em três dias. O módulo do deslocamento entre essas duas cidades é de 2.528 *km*.

a) Calcule a velocidade média de uma viagem entre essas duas cidades.
b) Determine a velocidade média e a velocidade escalar média de uma viagem de ida e volta de Belo Horizonte a Fortaleza.

ATIVIDADE 5.2

Você faz uma viagem em um carro 2.0, sem nunca exceder o limite de velocidade, de Barbacena a Juiz de Fora. Você gasta 1 hora e 11 minutos quando mantém uma velocidade constante de 99,0 *km/h*. Na volta seu carro 2.0 tem um problema no motor e você utiliza um carro 1.0 e mantém uma velocidade média de 77,3 *km/h*.

a) Determine o módulo do deslocamento do trajeto entre Barbacena e Juiz de Fora.
b) Calcule o tempo gasto na viagem de volta, de Juiz de Fora a Barbacena, quando você utiliza um carro 1.0.

ATIVIDADE 5.3

Um aluno de física, sem muito o que fazer, está registrando a posição e o tempo de automóveis que passam por uma estrada retilínea. Em certo momento, um carro forte passa pela posição $x = 15\ m$ e o aluno começa a "cronometrar" o seu tempo. Durante os 13 s seguintes o carro forte possui velocidade constante de 72,6 km/h. Um motoqueiro parado na posição $x = 5\ m$ começa a perseguir o carro forte quando o carro passa pela posição $x = 15\ m$, aumentando sua velocidade a uma taxa constante de 3,23 m/s^2.

a) Determine qual é a distância total percorrida pelo motoqueiro quando ele alcança o carro forte.
b) Qual a velocidade do motoqueiro quando ele alcança o carro forte?

ATIVIDADE 5.4

Um ciclista desce por uma rua reta. Ele então começa a pedalar em certa posição dessa rua onde sua posição em função do tempo é dada pela equação $x = At^3 + Bt^2 + C$, em que $A = \left(0{,}558\ m/s^3\right)$, $B = \left(0{,}101\ m/s^2\right)$ e $C = 9{,}23\ m$.

a) Determine a sua velocidade nos instantes de tempo $t = 0$, $t = 1{,}0\ s$ e $t = 2{,}1\ s$.
a) Calcule a velocidade média entre o intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 2{,}1\ s$.
b) Calcule a **média entre as velocidades** entre os intervalos de tempo t = 0 e t = 2,1s. **A velocidade média** é igual à **média das velocidades** no intervalo de tempo assinalado?

ATIVIDADE 5.5

Um carro desce a Avenida Afonso Pena e o gráfico da sua posição em função do tempo é mostrado na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Gráfico da posição em função do tempo para o carro da atividade 5.5.

a) Indique os pontos que provavelmente correspondem às paradas em semáforos na avenida. Justifique sua resposta.
b) Indique os pontos que provavelmente correspondem às paradas do veículo. Justifique sua resposta.
c) Em quais pontos assinalados no gráfico a velocidade é maior? Em quais ela é menor?
d) Em que posições a velocidade é constante e positiva? Em que posições ela é constante e negativa?

ATIVIDADE 5.6

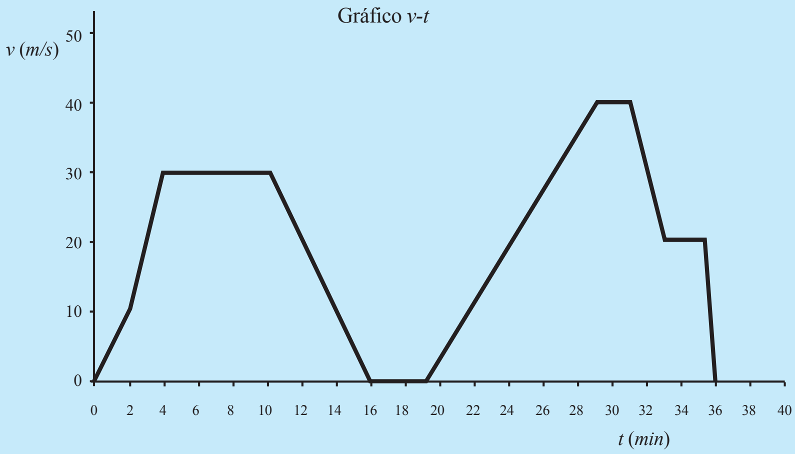


Figura 5.2 – Gráfico da velocidade em função do tempo para o automóvel da atividade 5.6.

Um automóvel faz uma viagem entre duas cidades e sua velocidade varia conforme mostra o gráfico da Figura 5.2.

a) Qual é o deslocamento entre essas duas cidades?
b) Determine a velocidade média do automóvel em sua viagem.
c) Determine em que intervalos de tempo o automóvel foi acelerado. Para esses intervalos de tempo qual é a sua aceleração?

ATIVIDADE 5.7

Uma motocicleta trafega em uma rodovia e sua posição em função do tempo, entre os instantes de tempo $t = 0$ e $t = 5\ s$, é dada pela equação $x = At^3 - Bt^2 + Ct$, em que $A = 4{,}01\ m/s^3$, $B = 13{,}5\ m/s^2$ e $C = 12{,}2\ m/s$.

a) Faca os gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo entre $t = 0$ e $t = 5\ s$.
a) Em quais instantes de tempo, entre $t = 0$ e $t = 5$ s, a moto possui velocidade nula? Identifique-os nos três gráficos do item a.
b) Em quais instantes de tempo a aceleração é nula? Identifique-os nos três gráficos.
c) Determine em que posição a moto possui velocidade constante.
d) Determine em que posição a taxa de aumento da velocidade é maior. Determine também a posição em que a taxa de diminuição da velocidade é maior.

ATIVIDADE 5.8

Newton, um taxista, pretende fazer uma corrida de Contagem a Santa Luzia em uma rodovia retilínea e sem buracos. Ele então mantém uma velocidade constante de 91 *km/h* até Confins, que fica a 56 *km* de Contagem (Figura 5.3). Percebendo que passou 17 *km* da entrada para Santa Luzia, ele retorna até a via de acesso para Santa Luzia, mantendo uma velocidade constante de 76 *km/h*. Durante todo o trajeto da corrida até a via de acesso a Santa Luzia, determine:

a) a velocidade escalar média;
b) a velocidade média.

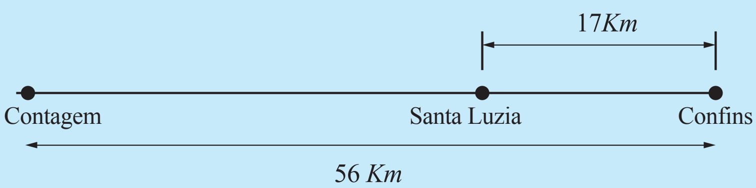


Figura 5.3 – Trajeto do taxista da atividade 5.8.

ATIVIDADE 5.9

Galileu lança duas pedras de massas diferentes do alto de um edifício de 17,0 *m*, ambas com velocidade de 5,00 *m/s*. Se a resistência do ar puder ser desprezada:

a) Quais devem ser as conclusões de Galileu sobre a altura atingida pelas duas pedras e sobre o tempo de queda de ambas?
b) Faça os gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo para o movimento das pedras.
c) Calcule o tempo necessário para as pedras atingirem o solo.
d) Determine a velocidade média de cada uma das pedras.
e) Qual é a velocidade das pedras quando elas atingem o solo?

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 5.1

a) A velocidade média é dada pela razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo decorrido.

Três dias correspondem a 3 × 24 horas. Como 1 hora possui 3.600 *s*:

$$3 \text{ dias} \leftrightarrow 2,59\times10^5\, s$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2528\; km}{2,59\times10^5\, s}$$

$$v_m = 9,75\; m/s.$$

b) Em uma viagem de ida e volta o deslocamento é nulo e, portanto, a velocidade média também:
$v_m = 0.$

A velocidade escalar média depende da distância total percorrida, e não do deslocamento. Como não possuímos a distância percorrida pelo ônibus, não podemos obter a velocidade de percurso v_p (ou velocidade escalar média).

Supondo que a distância total percorrida seja igual ao módulo do deslocamento (o que seria verdade apenas se a estrada fosse retilínea), teríamos:

$$v_p = \frac{2 \times 2528\, km}{2 \times 2,59 \times 10^5 s}$$

$$v_p = 9,75 m/s.$$

É óbvio que esse valor não é o correto, pois as estradas não são retilíneas.

Atividade 5.2

a) $1h$ e $11min$ correspondem a $1,18h$. Como a velocidade é constante:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = v \Delta t$$

$$\Delta x = (99,0\ km/h)(1,18\ h)$$

$$\Delta x = 116\ km.$$

b) O tempo gasto na viagem de volta é:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\Delta t = \frac{116\ km}{77,3\ km/h}$$

$$\Delta t = 1,50\ h,$$

ou seja, $1h$ e $30min$.

ATIVIDADE 5.3

As posições em função do tempo do carro forte e do motoqueiro, respectivamente, são dadas pelas equações:

$$x_c = x_{oc} + 20,2t = 15 + 20,2t$$

$$x_m = x_{om} + \frac{1}{2}3,23t^2 = 5 + \frac{1}{2}3,23t^2,$$

em que x_{oc} e x_{om} são as posições iniciais do carro forte e do motoqueiro dadas em metros e o tempo, em segundos.

Quando o motoqueiro alcança o carro forte, suas posições são iguais:

$$x_m = x_c.$$

Então:

$$1,62\,t^2 - 20,2\,t - 10 = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau em t, obtemos:

$$t = 13\ s$$

$$t = 0,48\ s.$$

Nesse caso, não tem sentido físico um instante de tempo negativo. Então sabemos que o motoqueiro demora 13*s* para alcançar o carro forte.

A distância percorrida pelo motoqueiro será igual ao módulo do deslocamento, uma vez que o movimento é retilíneo:

$$x_m - x_{om} = \frac{1}{2}3,23\ t^2 = \frac{1}{2}(3,23\ m/s^2)(13\ s)^2$$

$$\Delta x = 272,9\ m.$$

O motoqueiro percorreu 275 *m*.

a) A velocidade do motoqueiro é dada pela equação:

$$v_m = v_{om} + at$$

$$v_m = 0 + (3,23\ m/s^2)(13\ s)$$

$$v_m = 41,9\ m/s,$$

ou 151 *km/h*.

Atividade 5.4

a) A velocidade é igual à derivada da posição em relação ao tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(At^3 + Bt^2 + C\right)$$

$$v(t) = 3At^2 + 2Bt$$

$$v(0) = 3A(0)^2 + 2B(0)$$

$$v(0) = 0$$

$$v(1,0\,s) = 3(0,558\ m/s^3)(1,0\,s)^2 + 2(0,101)(1,0\,s)$$

$$v(1,0s) = 1,88\ m/s$$

$$v(2,0\,s) = 3(0,558\ m/s^3)(2,0\,s)^2 + 2(0,101)(2,0\,s)$$

$$v(2,0\,s) = 7,80\ m/s$$

b) Inicialmente calculamos as posições do ciclista nestes dois instantes de tempo:

$$x(0) = 3A(0)^2 + 2B(0) + 9,23\ m$$

$$x(0) = 9,23\ m$$

$$x(2,1s) = 3A(2,1s)^2 + 2B(2,1s) + 9,23\ m$$

$$x(2,1s) = 14,8\ m$$

$$\Delta x = 5,61\ m$$

A velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{5,61\ m}{2,1s}$$

$$v_m = 2,67\ m/s.$$

a) A média entre as velocidades M_v nos instantes de tempo assinalados é:

$$M_v = \frac{0 + 7,80\ m/s}{2}$$

$$M_v = 3,90\ m/s.$$

Enquanto a velocidade média foi de:

$$v_m = 2,67\ m/s$$

Não confunda velocidade média com média das velocidades.
São duas coisas diferentes!

Atividade 5.5

a) Uma parada corresponde a pequenos intervalos de tempo durante os quais a posição do carro não varia. Isso ocorre nos intervalos de tempo entre os pontos B e C e entre os pontos I e J.

b) Um intervalo de tempo relativamente grande em que a posição do carro não varia deve corresponder a uma parada para abastecimento. Esse intervalo está entre os pontos F e G.

c) A velocidade é maior onde for maior a inclinação da reta. As retas que passam pelos pontos G e I e entre os pontos J e M possuem maior inclinação e, portanto, nesses trechos o carro teve maior velocidade. Nesses dois trechos o carro teve a mesma velocidade, pois as inclinações dessas duas retas são iguais. A velocidade é menor (com exceção dos pontos em que o carro parou) entre os pontos C e D, pois a inclinação da reta que passa por esses pontos é a menor de todas as outras.

d) Você poderá verificar que os trechos entre os pontos A e B e entre D e F possuem velocidade constante e positiva, uma vez que a inclinação da reta que passa por esses pontos é positiva. Observe atentamente que entre os pontos C e D foi o trecho em que o carro teve uma pequena aceleração.

A velocidade foi constante e negativa entre os pontos G e I e F e M, uma vez que as retas que passam por esses pontos possuem inclinações negativas.

Atividade 5.6

a) O deslocamento pode ser obtido da área sob a curva de um gráfico de velocidade por tempo, pois:

$$\Delta x = v(t - t_o).$$

Calculando a área sob a curva do gráfico da Figura 5.2, obtemos:

$$\Delta x = 47,7\ km.$$

b) A velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{47,7x10^3\ m}{(36x60)s}$$

$$v_m = 22,1\ m/s,$$

ou seja, 79,5 *km/h*.

c) Nos quatro primeiros minutos de movimento o carro foi **acelerado**, tendo dois valores diferentes de aceleração. Calculando a inclinação da reta, temos:

$$a_1 = \frac{10\ m/s}{2\ min} = \frac{10\ m/s}{120s} = \frac{0,083\ m/s}{s}$$

$$a_1 = 0,083\ m/s^2$$

$$a_2 = \frac{20\ m/s}{2\ min} = \frac{20\ m/s}{120\ s}$$

$$a_2 = 0,17\ m/s^2.$$

Da mesma forma, entre 11 e 16 minutos de movimento o carro foi **desacelerado**, tendo aceleração:

$$a_3 = \frac{0-30}{16-11} = -\frac{6\ m/s}{min} = -0,10\ m/s^2.$$

Entre 19 e 29 minutos de viagem o carro foi novamente **acelerado**:

$$a_4 = \frac{4\ m/s}{min}$$

$$a_4 = 0,067\ m/s^2.$$

Depois de 32 minutos o carro foi **desacelerado**, com aceleração:

$$a_5 = -\frac{10\ m/s}{min}$$

$$a_5 = -0{,}17\ m/s^2.$$

E finalmente é desacelerado entre 35 e 36 minutos após o início da viagem:

$$a_1 = -\frac{20\ m/s}{min}$$

$$a_1 = -0{,}33\ m/s^2.$$

Atividade 5.7

a) Os gráficos de posição, velocidade e aceleração podem ser visualizados na Figura 5.4a.

b) Derivando a equação que descreve a posição da moto

$$x(t) = At^3 - Bt^2 + Ct$$

Obtemos:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 3At^2 - 2Bt + C$$

$$v(t) = 3At^2 - 2Bt + C.$$

Então, quando a velocidade for nula, temos:

$$3At^2 - 2Bt + C = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau em t, obtemos:

$$t = 0{,}63s$$

$$t = 1{,}12s.$$

Esses pontos podem ser visualizados nos três gráficos da Figura 5.4.

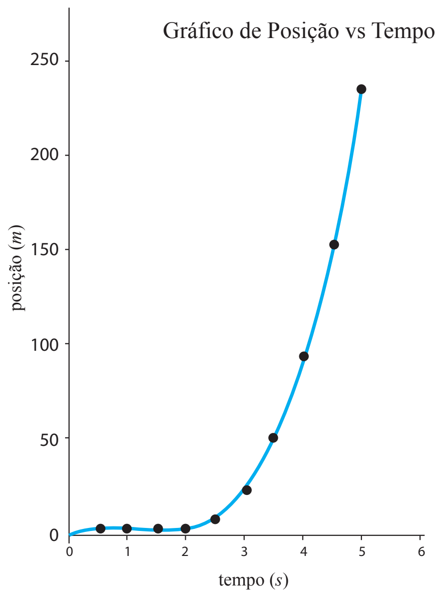


Figura 5.4a – Gráfico da posição em função do tempo para o carro da atividade 5.7.

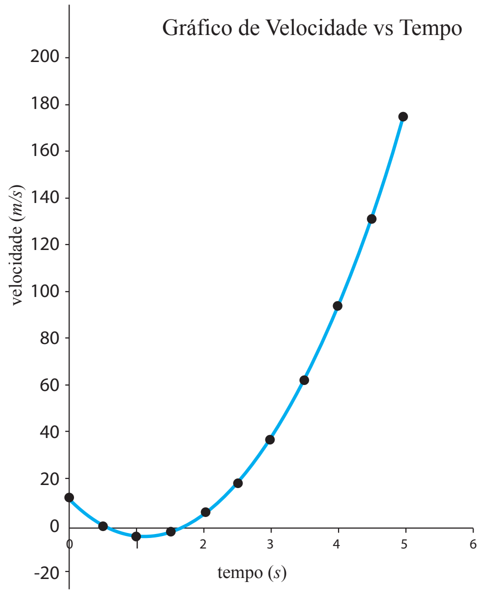


Figura 5.4b – Gráfico da posição em função do tempo para o carro da atividade 5.7.

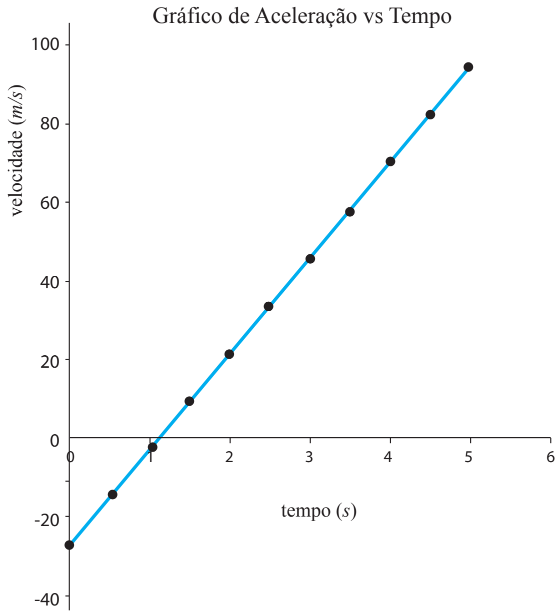


Figura 5.4c – Gráfico da aceleração em função do tempo para o carro da atividade 5.7.

c) Derivando a equação que fornece a velocidade:

$$\frac{dv}{dt} = 6At - 2B$$

$$a(t) = 6At - 2B.$$

Quando a aceleração for nula:

$$6At - 2B = 0,$$

e

$$t = 1{,}12\ s.$$

d) A velocidade da moto não é constante em nenhum trecho desse movimento. Observe que:

$$v(t) = 3At^2 - 2Bt + C.$$

e) A taxa de aumento ou de diminuição da velocidade

$$\frac{dv}{dt}$$

não possui um valor máximo nem mínimo; essa taxa é sempre crescente, pois:

$$\frac{dv}{dt} = 6At - 2B.$$

Atividade 5.8

a) Para percorrer o trajeto até Confins:

$$t_C = \frac{\Delta x}{v}$$

$$t_S = \frac{17\ km}{76\ km/h}$$

$$t_C = 0{,}62h;$$

e para percorrer o trajeto de Confins até Santa Luzia:

$$t_S = \frac{\Delta x}{v}$$

$$t_S = \frac{17\ km}{76\ km/h}$$

$$t_S = 0{,}22\ h.$$

Então a velocidade escalar média ou velocidade de percurso v_p é dada pela razão entre a distância total percorrida e o tempo decorrido:

$$v_p = \frac{(56+17)\ km}{0,82\ h}$$

$$v_p = 89,0\ km/h.$$

b) A velocidade média é dada pela razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo correspondente $t = \dfrac{\Delta x}{v}$:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{(56-17)\ km}{0,82h}$$

$$v_m = 47,6\ km/h.$$

Atividade 5.9

a) Se as duas pedras são arremessadas com a mesma velocidade, elas deverão atingir a mesma altura e deverão ter o mesmo tempo de queda se a resistência do ar puder ser desprezada, porque o tempo de queda não depende das massas, e, portanto, a altura (o deslocamento na vertical) também não.

b) Os gráficos podem ser visualizados na Figura 5.5.

c) Se considerarmos o topo do prédio como origem do sistema de coordenadas, sabemos que as posições das pedras aumentam e logo após diminuem até alcançarem o solo.

O tempo de subida é igual ao tempo de descida, quando a pedra vai até a altura máxima e retorna ao mesmo nível do ponto onde ela foi arremessada. Na subida:

$$v = v_o - gt$$

$$0 = +5\ m/s - (9,8\ m/s^2)t$$

$$t = 0,51\ s.$$

Logo, o tempo necessário para ela subir e voltar ao mesmo nível de onde foi lançada é:

$$t = 2x0,51\ s$$

$$t = 1,02\ s$$

Para calcular o tempo em que as pedras se deslocam pelos 17,0 m restantes, utilizamos a equação:

$$\Delta y = -v_o t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Os sinais negativos se devem ao fato de que o eixo y cresce positivamente “para cima”, enquanto as pedras se deslocam de cima para baixo. Substituindo os valores de Δy, v_o e de g na equação acima:

$$(4,90\ m/s^2)t^2 + (5,00\ m/s)t - 17,0\ m = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau em t, obtemos:

$$t = 1{,}42\ s$$
$$t = -2{,}44\ s.$$

Então as pedras gastam:

$$\Delta t = (1{,}42 + 1{,}02)\,s$$
$$\Delta t = 2{,}44\ s.$$

d) A velocidade média é dada pelo deslocamento das pedras dividido pelo intervalo de tempo correspondente. Observe que, embora as pedras subam 1,28 m em relação à origem, ou seja, 18,28 m acima do solo, o deslocamento é igual a 17,0 m, pois a posição inicial da pedra é o topo do prédio e a posição final é o chão, que está a 17,0 m do topo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$v_m = \frac{17\ m}{2{,}44 s}$$
$$v_m = 7{,}00\ m/s.$$

e) A velocidade com que as pedras chegam ao solo pode ser obtida pela equação:

$$v = -v_o - gt$$
$$v(t) = -(5{,}0\ m/s) - (9{,}8\ m/s^2)t$$
$$v(1{,}42) = -(5{,}0\ m/s) - (9{,}8\ m/s^2)(1{,}42\ s)$$
$$v(1{,}42\ s) = -18{,}9\ m/s.$$

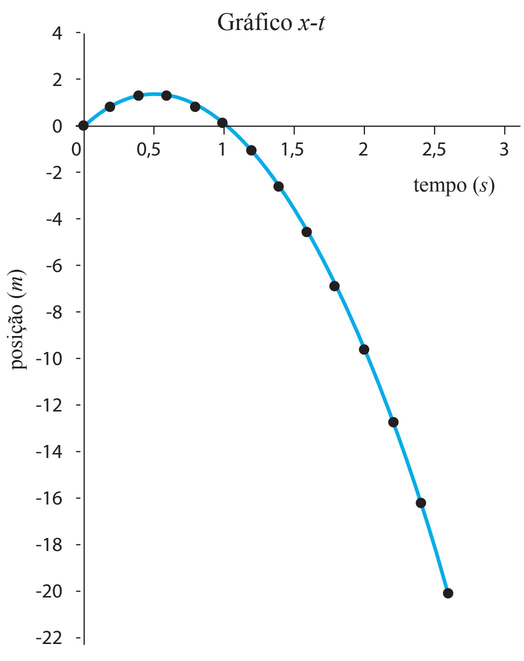


Figura 5.5a – Gráfico da posição em função do tempo para a pedra da atividade 5.9.

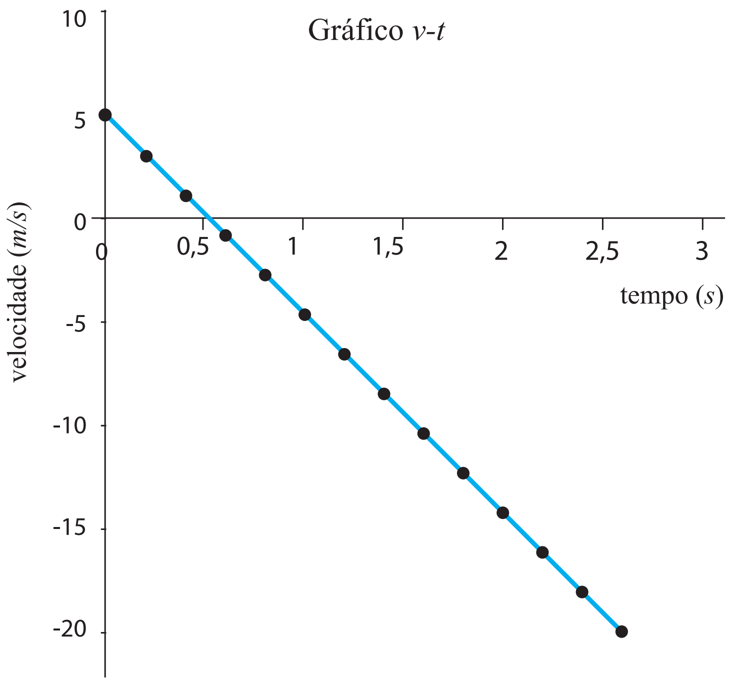


Figura 5.5b – Gráfico da velocidade em função do tempo para a pedra da atividade 5.9.

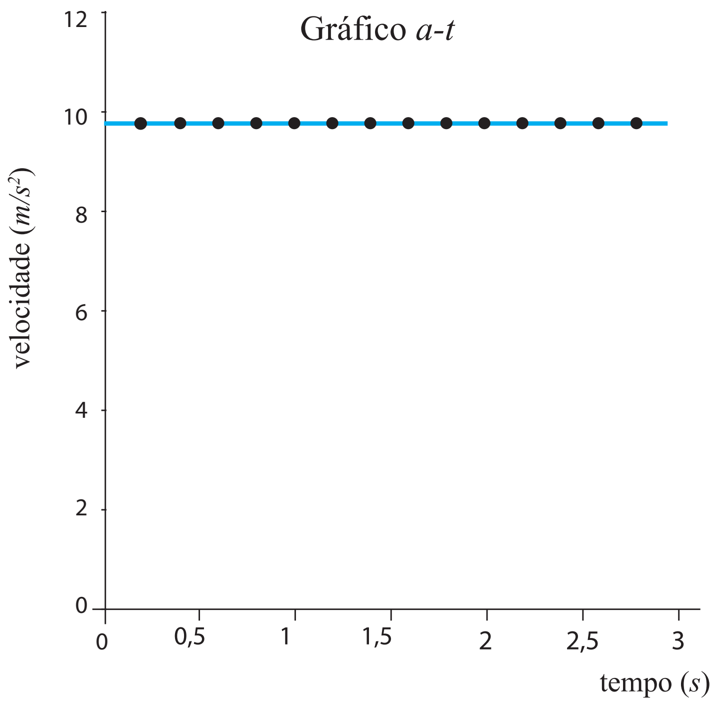


Figura 5.5c – Gráfico da aceleração em função do tempo para a pedra da atividade 5.9.

AULA 6

Velocidade relativa e aceleração variável

Objetivos

- Aplicar o conceito de velocidade relativa para movimentos unidimensionais;
- Descrever o movimento para situações em que velocidade e aceleração não são constantes.

6.1 VELOCIDADE RELATIVA EM UMA DIMENSÃO

A descrição da posição de uma partícula depende do sistema de coordenadas, ou melhor, depende de um **sistema de referência**. Para um corpo em movimento, sua posição varia em relação ao sistema de coordenadas. Mas o que ocorre se o sistema de referência também se move em relação a esse corpo?

Veja a seguir que as velocidades obtidas em sistemas de referência podem ser diferentes quando eles se movem entre si.

Suponha que você viaje em um ônibus a 40 *km/h* em certo trecho retilíneo, quando passa em frente a um posto policial em uma rodovia. Nesse momento um carro o ultrapassa a 60 *km/h*. A velocidade do carro em relação a você (20 *km/h*) certamente é diferente da velocidade do carro em relação ao posto (60 *km/h*), pois o seu referencial se move, enquanto o referencial do posto é fixo. O carro se afasta de você a 20 *km/h* e do posto policial a 60 *km/h*.

Considere o sistema de referência P do posto policial e o referencial O do ônibus. Dentro do ônibus há uma pessoa que é representada pelo ponto V.

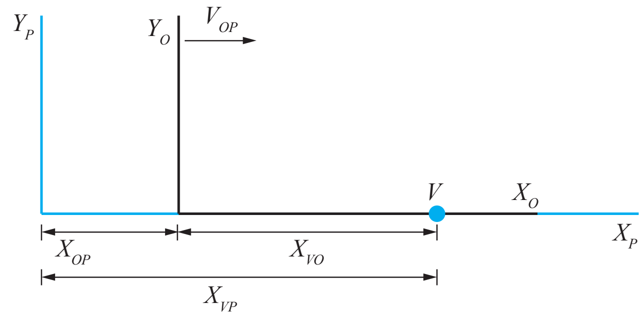


Figura 6.1 – Diagrama esquemático mostrando o referencial O, que se move em relação ao referencial P. Os eixos são indicados por (y_P, x_P) e (y_O, x_O).

A Figura 6.1 mostra um diagrama esquemático em que pode ser vista a posição $\vec{x}_{VO}$ de uma pessoa (ponto V) em relação ao ônibus (referencial O), a posição $\vec{x}_{VP}$ da pessoa em relação ao posto policial (referencial P) e a posição $\vec{x}_{OP}$ do referencial O (ônibus) em relação ao referencial P (posto policial). Pela figura pode ser dito que:

$$\vec{x}_{VP} = \vec{x}_{VO} + \vec{x}_{OP}. \tag{6.1}$$

Derivando a equação 6.1 em relação ao tempo, obtém-se a velocidade relativa, dada por:

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}_{VP}) = \frac{d}{dt}(\vec{x}_{VO}) + \frac{d}{dt}(\vec{x}_{OP}) \tag{6.2}$$

$$\vec{v}_{VP} = \vec{v}_{VO} + \vec{v}_{OP}.$$

Se você caminha com velocidade $\vec{v}_{VO} = 10 km/h$ para frente em um ônibus com velocidade $\vec{v}_{OP} = 40 km/h$, sua velocidade $\vec{v}_{VP}$ em relação ao posto será:

$$\vec{v}_{VP} = \vec{v}_{VO} + \vec{v}_{OP}$$

$$\vec{v}_{VP} = 10\ km/h + 40\ km/h$$

$$\vec{v}_{VP} = 50\ km/h.$$

Se você se move no sentido contrário ao movimento do ônibus, sua velocidade em relação a este é $\vec{v}_{VO} = -10\ km/h$, e em relação ao posto policial sua velocidade é:

$$\vec{v}_{VP} = -10\ km/h + 40\ km/h$$

$$\vec{v}_{VP} = 30\ km/h$$

E, obviamente, se você não se move dentro do ônibus – está sentado em uma poltrona, por exemplo – sua velocidade em relação ao ônibus é $\vec{v}_{VO} = 0$ e então:

$$\vec{v}_{VP} = 0 + 40\ km/h$$

$$\vec{v}_{VP} = 40\ km/h.$$

Se houvesse três sistemas de referência, um sistema Q, além dos referenciais O e P, você poderia concluir diretamente que:

$$\vec{v}_{VP} = \vec{v}_{VQ} + \vec{v}_{VO} + \vec{v}_{OP}\ .$$

E essa regra é válida para qualquer número de sistemas de referência.

Derivando a equação 6.2 em relação ao tempo, obtemos a aceleração relativa:

$$\vec{a}_{VP} = \vec{a}_{VO} + \vec{a}_{OP}. \tag{6.3}$$

Referenciais inerciais

Observe que se o ônibus se move com velocidade constante, sua aceleração é nula tal que

$$\vec{a}_{VP} = \vec{a}_{VO}.$$

Nesse caso, diríamos que os sistemas de referência P (do posto policial) e O do ônibus, que estariam com velocidade de separação constante, são chamados de referenciais inerciais. Observadores em diferentes sistemas de referência inercial vão medir a mesma aceleração para a partícula que se move.

Observações

Essas equações foram deduzidas para os três sistemas de referência (pessoa, ônibus e posto policial), mas elas valem para quaisquer referenciais.

Essas deduções sobre o movimento relativo são baseadas no **Princípio da Relatividade de Galileu** e são válidas apenas quando as velocidades envolvidas são pequenas se comparadas com a velocidade da luz no vácuo, $c = 3{,}00 \times 10^8 \, m/s$. Para velocidades maiores que 10% da velocidade da luz, já não podemos mais utilizar o Princípio da Relatividade de Galileu; devemos aplicar a **Teoria da Relatividade de Einstein**.

No Princípio de Galileu, tempo e espaço são considerados grandezas absolutas. Isso significa que o tempo e o espaço medidos em referenciais diferentes são os mesmos. Por exemplo: pelo Princípio de Galileu, o deslocamento medido por uma pessoa em um ônibus em movimento é igual ao deslocamento medido por uma pessoa no posto policial (o mesmo vale para a "cronometragem" do tempo nos dois referenciais).

Isso, em princípio, parece óbvio. No entanto, fazendo essas medidas, em uma situação hipotética em que o ônibus se movesse com velocidade próxima à velocidade da luz, os deslocamentos e os intervalos de tempo medidos nesses dois referenciais seriam diferentes! Essa diferença existe para qualquer velocidade relativa entre dois referenciais, mas só é significativa e mensurável para velocidades grandes, comparadas com a velocidade da luz.

Quando você estudar a Teoria da Relatividade de Einstein, entenderá que isso se deve ao fato de haver uma velocidade-limite para os corpos: a velocidade da luz. Sendo assim, a velocidade da luz é uma grandeza absoluta, enquanto tempo e espaço são relativos, pois dependem de um sistema de referência. No Princípio da Relatividade de Galileu não existe um limite para a velocidade, e um corpo pode ter qualquer velocidade, maior até que a da luz. Então espaço e tempo são absolutos.

Não pense que a Teoria da Relatividade de Einstein se aplica apenas a situações hipotéticas. Um exemplo prático em que é necessária a sua utilização é no Sistema de Posicionamento Global (Global Positioning System, sigla GPS), no qual um pequeno aparelho determina a posição precisa de certo ponto pela triangulação de sinais recebidos de satélites (veja a Figura 6.2).

Os sinais enviados por satélites viajam com velocidade igual a da luz. Como o tempo é medido por referenciais diferentes (aparelho de GPS na Terra e satélite), com movimento relativo entre si, é necessário utilizar a Teoria da Relatividade para o cálculo correto das distâncias dos satélites. Caso isso não seja feito, o GPS pode errar a posição por um raio de aproximadamente 1 *km*.

Note que nessa situação os satélites não estão se movendo, nem de longe, com velocidades maiores que *0,1 c*. Contudo, as frequências envolvidas no cálculo do posicionamento precisam ser corrigidas apropriadamente.

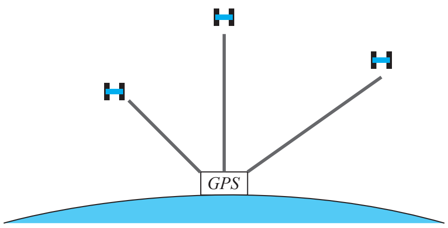


Figura 6.2 – Através da triangulação dos sinais emitidos por satélites, o aparelho de GPS pode determinar a posição de um ponto sobre a superfície da Terra com ótima precisão.

Exemplo 6.1

Suponha que você esteja em um vagão de trem A que viaja em um trecho retilíneo a 50 *km/h*. Quando o trem A passa por uma ponte, você corre à frente com velocidade igual a 10 *km/h*. Nesse exato momento outro trem B passa na linha férrea ao lado, no sentido contrário, com velocidade de 40 *km/h*.

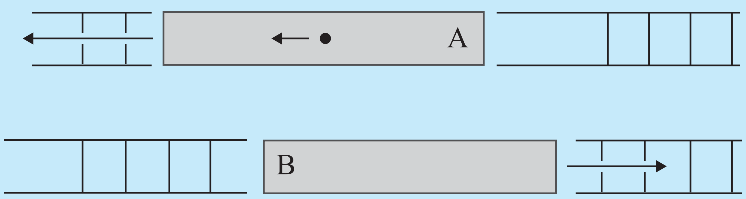


Figura 6.3 – Movimento dos trens A e B do exemplo 6.1.

a) Determine sua velocidade em relação à ponte.

b) Calcule a velocidade do trem B em relação ao do trem A.

c) Calcule a velocidade do trem B em relação a você.

d) Determine sua velocidade em relação ao trem B.

Solução

a) A ponte é um referencial fixo. Você é um referencial móvel em um referencial que também se move – o trem A. Se você entendeu bem a discussão sobre velocidade relativa conseguirá perceber facilmente que:

$$\vec{v}_{VP} = \vec{v}_{VA} + \vec{v}_{AP},$$

em que $\vec{v}_{VP}$ é a sua velocidade em relação à ponte, $\vec{v}_{VA}$ é sua velocidade em relação ao trem A e $\vec{v}_{AP}$ é a velocidade do trem A em relação à ponte. Portanto:

$$v_{VP} = 10\ km/h + 50\ km/h$$
$$v_{VP} = 60\ km/h.$$

b) Nesse caso os dois referenciais são móveis. Se você considerar o movimento relativo entre a ponte e o trem A, poderá imaginar que a ponte se move com velocidade $-\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{PA}$ em relação a esse trem. Como o trem B se move com velocidade $-\vec{v}_{BP}$ em relação à ponte poderá concluir que:

$$\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{BP} - \vec{v}_{AP}$$
$$\vec{v}_{BA} = -40\ km/h - 50\ km/h$$
$$\vec{v}_{BA} = -90\ km/h.$$

c) Agora são três referenciais em movimento (você, o trem A e o trem B). Considerando o movimento relativo entre você e o trem A, poderá concluir que o trem A possui velocidade $\vec{v}_{AV} = -10\ km/h$ em relação a você. Então basta saber agora qual é a velocidade do trem B em relação ao trem A. Como foi feito no item anterior:

$$\vec{v}_{BV} = -\vec{v}_{BP} - \vec{v}_{AP} - \vec{v}_{AV}$$
$$\vec{v}_{BV} = -90\ km/h - 10\ km/h$$
$$\vec{v}_{BV} = -100\ km/h.$$

d) A sua velocidade em relação ao trem B $\vec{v}_{VB}$ é igual à velocidade $\vec{v}_{BV}$ do trem B em relação a você, mas no sentido contrário, ou seja:

$$\vec{v}_{VB} = -\vec{v}_{BV}$$
$$\vec{v}_{VB} = 100\ km/h.$$

ATIVIDADE 6.1

Dois atletas apostaram uma corrida um tanto diferente. Eles correram de um ponto *A* situado a 2.000 *m* de um ponto *B*, marcados na margem de um rio, como ilustra a Figura 6.4. Um deles irá correndo de *A* para *B* e, depois, de *B* para *A*. O outro fará o mesmo percurso, mas remando com um barco.

O corredor manteve velocidade constante de 18 *km/h*, tanto na ida quanto na volta. O remador conseguiu fazer com que o barco tivesse uma velocidade constante de 18 *km/h* em relação à água. A correnteza possui velocidade de 11 *km/h* de *A* para *B*.

Calcule o tempo da corrida de cada um e determine quem foi o vencedor.

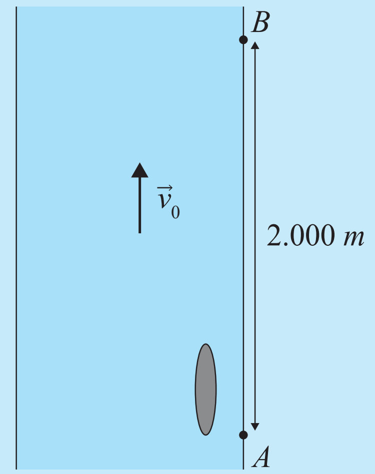


Figura 6.4 – Movimento dos atletas da atividade 6.1.

6.2 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO: CASOS GERAIS

Até agora nosso estudo da cinemática considerou apenas os casos em que a velocidade ou a aceleração fosse constante. Isso foi importante para que você ficasse mais familiarizado com esses conceitos. Entretanto, em nosso nível de estudo, será importante também que você saiba lidar com situações mais gerais, em que a velocidade e a aceleração **não são constantes**.

Conhecendo as funções que descrevem a velocidade e a aceleração em função do tempo e especificando as condições iniciais t_0, x_0 e v_0, você poderá resolver qualquer problema em Mecânica Clássica.

Nas aulas anteriores você aprendeu a obter o deslocamento através do gráfico da velocidade por tempo para o caso em que um corpo se move com velocidade constante. E, do mesmo modo, aprendeu que a velocidade pode ser obtida de um gráfico de aceleração por tempo (veja as Figuras 2.11 e 3.4a).

A Figura 6.5 mostra um gráfico de aceleração em função do tempo para um corpo que se desloca em certo trecho retilíneo.

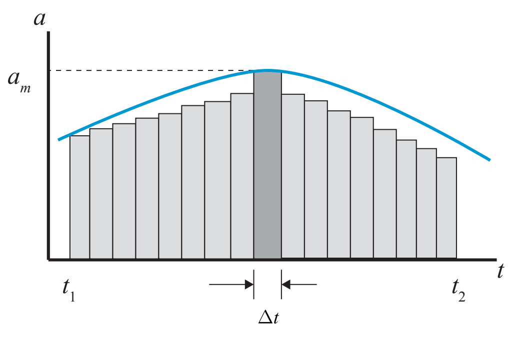


Figura 6.5 – Gráfico de aceleração por tempo de um corpo que se move em um trecho retilíneo.

Observe que a aceleração desse corpo não é constante. Nesse caso, você poderia obter a variação de velocidade $(v_2 - v_1)$ durante um intervalo de tempo $(t_2 - t_1)$? A resposta você também já sabe: **Sim**, pela área sob a curva do gráfico $a - t$. Veja como obtê-la.

Podemos determinar pelo gráfico a aceleração média a_m, durante um intervalo de tempo Δt. Sabemos que:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Então:

$$\Delta v = a_m \Delta t ,$$

sendo igual à área do retângulo de altura a_m e base Δt, como ilustra a Figura 6.1.

Somando todos os elementos Δv de t_1 a t_2, em intervalos de tempo cada vez menores, fazendo $\Delta t \to 0$, obtemos:

$$dv = adt$$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} adt$$

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} adt. \tag{6.4}$$

Se em $t_1 = t_0 = 0$ tivermos $v_1 = v_0$:

$$v = v_0 + \int_0^t adt.$$

Em outras palavras, a velocidade é obtida pela área sob a curva do gráfico $a - t$, independente da aceleração ser constante ou não.

De modo análogo, pode ser obtido o deslocamento se conhecermos a função que caracteriza a velocidade. Sabendo que o deslocamento Δx de um corpo qualquer que se move com velocidade v_m em certo trecho durante um intervalo de tempo Δt é dado por:

$$\Delta x = v_m \Delta t,$$

se forem somados todos os deslocamentos ao longo da trajetória em intervalos de tempo cada vez menores, fazendo $\Delta t \to 0$, tem-se que:

$$dx = vdt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} vdt \tag{6.5}$$

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} vdt.$$

Se em $t_1 = t_0 = 0$ tivermos $x_1 = x_0$:

$$x - x_0 = \int_0^t vdt.$$

Conhecendo então a função que descreve a velocidade $v(t)$, a posição inicial x_0 e o instante de tempo inicial t_0, podemos dizer qual é a posição de um corpo em qualquer instante de tempo *t*.

Portanto as equações 6.4 e 6.5 têm validade geral e podem ser utilizadas quando forem conhecidas as funções que descrevem a aceleração ou a velocidade em função do tempo.

As equações que foram desenvolvidas para os casos em que a aceleração era constante são casos particulares e podem ser obtidas diretamente da equação 6.4.

Quando a aceleração a é constante, da equação 6.4 obtém-se que:

$$v = v_0 + a\int_0^t dt;$$

e então:

$$v = v_0 + at.$$

Substituindo então em 6.5 e resolvendo a integral, obtém-se que:

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2.$$

Exemplo 6.2

Um corpo se move em uma trajetória retilínea. No instante de tempo $t_0 = 0$, sua velocidade é nula e ele está na posição $x_0 = 1,0\ m$. Sua aceleração é dada pela equação:

$$a(t) = (0,82\ m/s^2) - (0,16\ m/s^3)t.$$

a) Determine sua velocidade e sua posição no instante de tempo $t = 3,0\ s$.
b) Faça os gráficos de $a - t$, $v - t$ e $x - t$.
c) Determine sua velocidade máxima.

Solução

a) Como você pode observar, a aceleração não é constante. Então você deve usar as equações 6.4 e 6.5 para obter a velocidade e a posição desse corpo. Seja $A = 0,82\ m/s^2$ e $B = 0,16\ m/s^3$, de modo que $a(t) = A - Bt$. A velocidade pode ser obtida integrando a aceleração em relação ao tempo:

$$v = v_0 + \int_0^t a dt$$

$$v = 0 + \int_0^t \left(A - Bt\right) dt$$

$$v(t) = At - \frac{B}{2}t^2$$

$$v(t) = (0,82\ m/s^2)t - (0,08\ m/s^3)t^2;$$

para $t = 3,0\ s$, temos:

$$v(3,0\,s) = (0,82\ m/s^2)(3,0\,s) - (0,08\ m/s^3)(3,0\,s)^2$$

$$v(3,0s) = 1,7\ m/s.$$

A posição é obtida pela integração da velocidade em relação ao tempo, conhecida a posição inicial:

$$x = x_0 + \int_0^t \left(At - \frac{B}{2}t^2 \right) dt$$

$$x = x_0 + \frac{A}{2}t^2 - \frac{B}{2}\frac{t^3}{3} = x_0 + \frac{A}{2}t^2 - \frac{B}{6}t^3$$

$$x(t) = 1,0\ m + (0,41\ m/s^2)t^2 - (0,05\ m/s^3)t^3;$$

para $t = 3,0\ s$, temos:

$$x(3,0\,s) = 1,0\ m + (0,41\ m/s^2)(3,0\,s)^2 - (0,05\ m/s^3)(3,0\,s)^3$$

$$x(3,0s) = 2,3\ m.$$

b) Os gráficos de aceleração, velocidade e posição em função do tempo podem ser vistos na Figura 6.6.

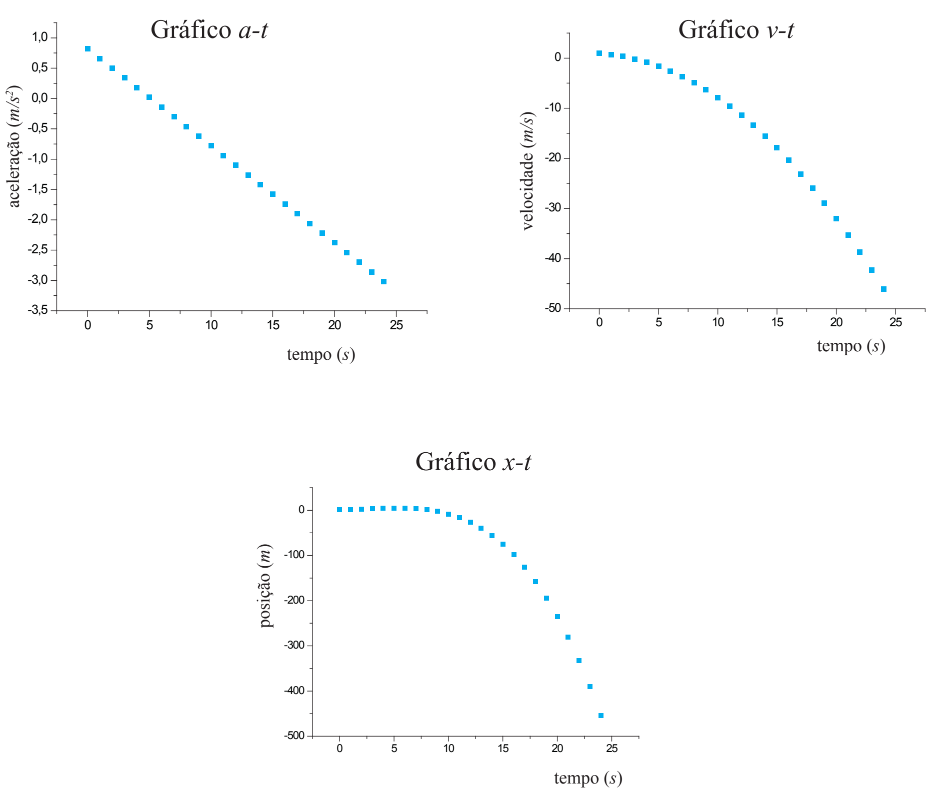


Figura 6.6 – Gráficos de aceleração, velocidade e posição em função do tempo.

c) Observando o gráfico de velocidade por tempo, você verá que há um máximo quando a derivada da função $v(t)$ for nula. Então, deve fazer:

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Mas:

$$\frac{dv}{dt} = a.$$

Logo,

$$a(t) = A - Bt \Rightarrow 0 = A - Bt$$

$$t = \frac{A}{B} = \frac{0{,}82\ m/s^2}{0{,}16\ m/s^3} = 5{,}1s$$

Isso significa que no instante de tempo $t = 5{,}1s$ a velocidade foi máxima. Como:

$$v(t) = (0{,}82\ m/s^2)t - (0{,}08\ m/s^3)t^2;$$

calculando $v(t)$ no instante de tempo $t = 5{,}1s$:

$$v(t) = (0{,}82\ m/s^2)(5{,}1s) - (0{,}08\ m/s^3)(5{,}1s)^2$$

$$v_{MAX} = 2{,}1\ m/s.$$

A velocidade máxima desse corpo foi de 2,1 *m/s*.

ATIVIDADE 6.2

Uma locomotiva inicia seu movimento ao longo de uma linha férrea, sendo sua aceleração dada pela equação:

$$a(t) = At,$$

em que $A = 0{,}92m/s^3$. A sua velocidade é de *6,0 m/s* e sua posição *x = 8,0 m* no instante de tempo *t = 2,0 s*.

a) Faça os gráficos de aceleração, velocidade e posição em função do tempo para o movimento da locomotiva.
b) Calcule a velocidade da locomotiva no instante de tempo *t = 3,0 s*.
c) Determine a sua posição no instante de tempo *t = 4,0 s*.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 6.1

O tempo de corrida do "corredor" é simplesmente:

$$t_c = \frac{4.000\ m}{18\ km/h}$$

$$t_c = \frac{4.000\ m}{5\ m/s}$$

$$t_c = 800\,s,$$

pois o tempo de ida é igual ao tempo de volta.

Para o remador, na ida, sua velocidade em um referencial na margem (referencial fixo em relação ao movimento do barco) é dada pela equação:

$$v_{ri} = (18+11)\ km/h$$

$$v_{ri} = 29\ km/h.$$

Então, na ida ele gasta um tempo t_{ri}:

$$t_{ri} = \frac{2.000\ m}{29\ km/h}$$

$$t_{ri} = \frac{2.000\ m}{8,05\ m/s}$$

$$t_{ri} = 248\ s.$$

Na volta, a velocidade da correnteza é contrária à velocidade do barco e então a velocidade do remador em relação à margem na volta é:

$$v_{rv} = (18-11)\ km/h$$

$$v_{rv} = 7\ km/h.$$

Logo o tempo gasto na volta é:

$$t_{ri} = \frac{2.000\ m}{7\ km/h}$$

$$t_{ri} = \frac{2.000\ m}{1,94\ m/h}$$

$$t_{ri} = 1.031\ s.$$

O remador no percurso gasta um tempo:

$$t = t_{ri} + t_{rv}$$

$$t = 1.279\ s.$$

Como o remador gasta um tempo maior para fazer o mesmo percurso que o corredor, pode-se concluir que o “corredor” é o vencedor do desafio.

Atividade 6.2

a) Veja os gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo na Figura 6.5.

b) A velocidade pode ser obtida integrando a função que descreve a aceleração em função do tempo:

$$v_2 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

$$v = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} \left(At\right)dt$$

$$v(3{,}0\ s) = \left(6{,}0\ m/s\right) + \frac{(0{,}92\ m/s^3)}{2} t^2 \Big|_{2{,}0s}^{3{,}0s}$$

$$v(3{,}0\ s) = 6{,}0\ m/s + 0{,}46(3^2 - 2^2) = 8{,}3\ m/s.$$

A posição é obtida pela integração da velocidade:

$$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

$$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} \left(v_o + \frac{At^2}{2}\right)dt$$

$$x = x_o + v_1 t\Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{A}{6} t^3 \Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

$$x = 8{,}0\ m + (6{,}0\ m/s)(4{,}0\ s - 2{,}0\ s) + \frac{0{,}92}{6}[(4\ s)^3 - (2\ s)^3]$$

$$x = 8{,}0\ m + (12{,}0\ m) + \frac{0{,}92}{6}[64 - 8] = 28{,}6\ m.$$

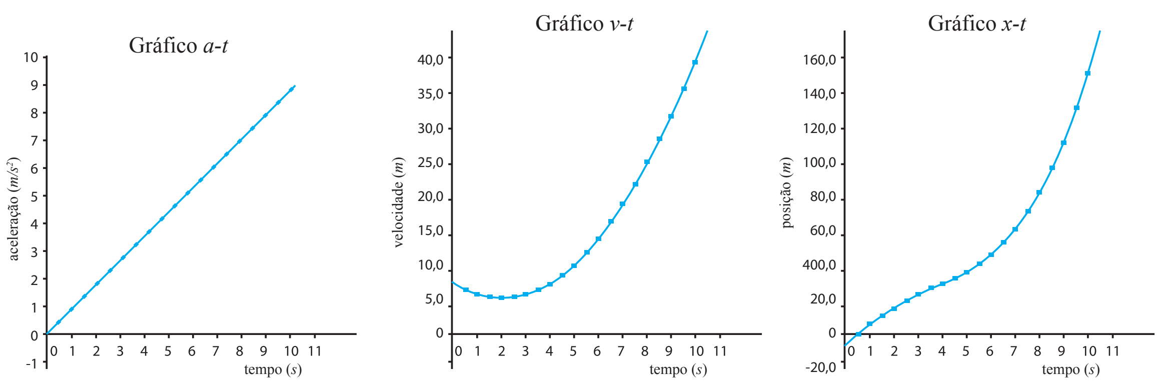


Figura 6.7 – Movimento dos atletas da atividade 6.1.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Osama está sentado na poltrona de um trem A, que viaja em um trecho retilíneo com velocidade constante de 50 *km/h* para a direita. A polícia foi informada e começa a perseguir o trem inicialmente com velocidade constante de 70 *km/h*. Osama corre então para a porta de emergência ao fundo do trem, com velocidade de 3,0 *m/s* para a esquerda.

a) Qual é a velocidade de Osama em relação à estação do trem?

b) Qual é a velocidade de Osama em relação à viatura policial?

c) Qual é a velocidade da viatura policial em relação ao trem? E a velocidade do trem em relação à viatura?

E2. Considere o exercício 6.1. No momento em que Osama está se aproximando da porta de emergência, com velocidade de 3,5 *m/s*, um trem B passa no sentido oposto ao trem A na linha férrea ao lado com velocidade de 60 *km/h* para a esquerda. A viatura policial está se aproximando do trem A com velocidade constante de 90 *km/h*.

a) Qual é a velocidade de um passageiro sentado no trem A em relação a um passageiro sentado no trem B?

b) Qual é a velocidade de Osama em relação ao segundo trem B?

c) Qual é a velocidade da viatura em relação ao trem B?

E3. Em um filme de ação, um motoqueiro deve se deslocar em cima dos vagões de um metrô de 300 m de comprimento, dentro de um túnel retilíneo e sem saídas laterais, antes que este exploda. O metrô possui velocidade constante de 65 *km/h*, e o motoqueiro só pode se mover na mesma direção e sentido do trem, com velocidade de 86 *km/h*. O motoqueiro tem 1 minuto para se deslocar da extremidade traseira até a frente do metrô antes que ele exploda. Despreze o comprimento da moto.

a) Qual é a velocidade do motoqueiro em relação ao metrô?

b) O motoqueiro sobreviverá?

E4. Um trem possui um grande vagão aberto e está se deslocando para a direita com velocidade de 45 *km/h* em relação ao solo. Um garoto se desloca sobre esse vagão aberto utilizando um *skate*. Qual é a velocidade do garoto em relação ao vagão se sua velocidade em relação ao solo for

a) nula?

b) 23 *m/s* para a direita?

c) 10 *m/s* para a esquerda?

E5. A aceleração de um caminhão é dada pela equação $a(t) = \alpha t - \beta t^2$, em que $\beta = 0,100\ m/s^4$ e $\alpha = 1,00\ m/s^3$. O caminhão está na posição $x = 0$ quando $t = 0$.

a) Determine sua posição e velocidade em função do tempo.

b) Determine sua velocidade máxima.

E6. Em um certo intervalo de tempo a aceleração de um carro esportivo é dada pela equação $a(t) = At - B$, em que $A = 3,00\ m/s^3$ e $B = 2,00\ m/s^2$.

a) Calcule a velocidade nos instantes de tempo $t = 0$ e $t = 2,00\ s$. Calcule a velocidade média nesse intervalo de tempo.

b) Qual é a posição do carro nos instantes de tempo $t = 0$ e $t = 2,00\ s$? Calcule o deslocamento nesse intervalo de tempo.

PROBLEMAS DA UNIDADE 2

P1. Em uma competição de corrida livre com percurso de 200 *m* um atleta percorre os primeiros 100 *m* com velocidade escalar média de 11,5 *m/s*. Qual deve ser a sua velocidade escalar média nos 100 m restantes se sua velocidade escalar média no percurso total de 200 *m* for igual a:

a) 6,50 *m/s*?

b) 19,0 *m/s*? Você acha isso possível? Explique.

P2. Em certo momento o movimento de um corpo é observado e sua posição em função do tempo é dada pela equação $x(t) = At^3 - Bt^2 + Ct$, em que $A = 2,40\ m/s^3$, $B = 8,00\ m/s^2$ e $C = 7,20\ m/s$.

a) Determine a velocidade e a aceleração do corpo em função do tempo.

b) Para quais instantes de tempo o corpo está em repouso?

c) Faça os gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo.

P3. Uma viatura policial deseja ultrapassar uma moto que se desloca com velocidade constante de 75,0 *km/h* em uma rodovia retilínea. A viatura possui inicialmente velocidade de 62,0 *km/h* e está a 31,0 *m* da moto. Sabendo que a viatura possui 4,3 *m* de comprimento e mantém uma aceleração constante de $0,755\ m/s^2$, ficando em certo momento depois da ultrapassagem 15,0 *m* da moto, que possui 2,4 *m* de comprimento, determine:

a) O tempo para que a viatura ultrapasse a moto.

b) A velocidade final da viatura.

c) A distância percorrida pela viatura.

P4. A velocidade de um submarino que está na posição $x = 0\ m$ quando $t = 0\ s$ é dada pela equação $v(t) = 5,0\ m/s - (2,5\ m/s^2)t$.

a) Determine a posição e a aceleração do submarino em função do tempo.

b) Qual é a maior distância entre o submarino e a origem?

P5. Nos jogos olímpicos na China, um atleta de saltos ornamentais salta de uma plataforma com altura de 3,00 *m* em relação à piscina.

a) Determine a velocidade do atleta no momento que o atleta chega à água.

b) Qual deveria ser a velocidade inicial (módulo, direção e sentido) do atleta para que ele chegasse à água com velocidade igual a 9,67 *m/s*?

P6. Em uma competição, dois ciclistas A e B se deslocam em um trecho retilíneo onde suas posições em função do tempo são dadas pelas equações

$$x_A = (1,80\ m/s^2)t^2 + (3,60\ m/s)t + 1,00\ m \quad \text{e}$$

$$x_B = (0,0700\ m/s^3)t^3 + (1,80\ m/s^2)t^2 + (3,6\ m/s)t$$

a) Logo quando os ciclistas entram nesse trecho retilíneo, qual está na frente?

b) Em que instante de tempo um dos ciclistas alcança o outro?

c) Em que instante de tempo as acelerações dos ciclistas são iguais?

P7. Um vaso de flores está na beirada da janela e, devido a um empurrão acidental, cai do alto de um prédio a uma altura H do solo. Exatamente embaixo dessa janela há um jardim com várias plantas que "amortecem" a queda do vaso. Quando o vaso de flores cai sobre a densa camada de plantas com espessura E, sua velocidade diminui a uma taxa constante até atingir o solo com velocidade nula.

a) Encontre a velocidade do vaso de flores no momento em que ele toca a camada densa de plantas.

b) Encontre o valor da aceleração do vaso quando ele penetra na camada densa de plantas.

P8. A Figura 6.8 mostra um dispositivo composto de duas pás, A e B, que estão inicialmente separadas por uma distância de 2,0 m e se movem uma em direção à outra. A pá A se move para a direita com velocidade de 2,0 cm/s e a pá B se move para a esquerda com velocidade de 3,0 cm/s em relação a Terra. Uma pequena bola está presa em uma câmara em que só pode se mover ao longo de uma linha reta e possui inicialmente velocidade constante de 8,0 cm/s, conforme mostra a figura.

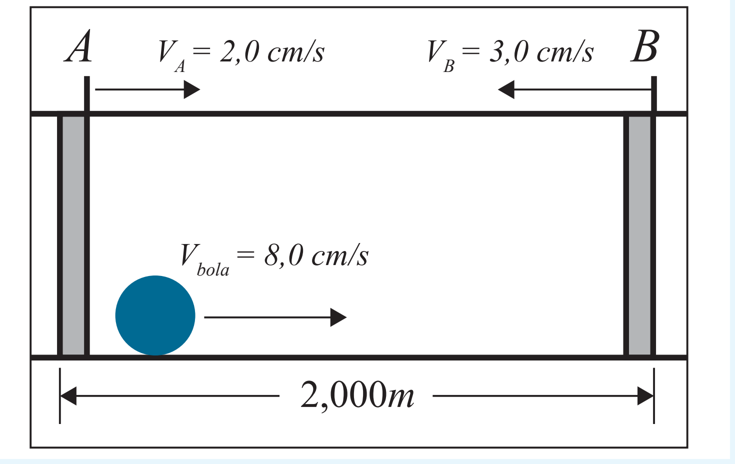


Figura 6.8 – Dispositivo de duas pás do problema 2.8.

Quando a bola atinge a pá B ele retorna sempre com a mesma velocidade (mesmo módulo), mas com sentido contrário, rebatendo nas pás até que elas se encontrem.

a) Calcule o deslocamento da bola. Despreze as dimensões da bola.

b) Determine a distância total percorrida pela bola.

P9. Um elevador se move para cima com velocidade constante de 2,0 m/s. Uma lâmpada velha e mal colocada se desprende e cai do teto do elevador.

a) Determine a velocidade da lâmpada quando ela atinge o piso do elevador para um observador dentro do elevador. E para um observador fora do elevador?

b) Quanto tempo leva para que a lâmpada se quebre?

c) Para um observador dentro do elevador, qual é a distância percorrida pela lâmpada? E para um observador fora do elevador?

UNIDADE 3
Movimento em duas e três dimensões

Nas aulas anteriores foram definidas as grandezas posição, deslocamento, velocidade e aceleração, aplicadas em movimentos que ocorriam em uma linha reta.

A maioria dos movimentos que ocorrem na natureza acontece em duas ou três dimensões, e por isso você deve estar apto a descrever o movimento dos corpos nessa situação.

A partir de agora você aprenderá como lidar com essas grandezas no espaço (em três dimensões) e poderá descrever qualquer tipo de movimento, como o de uma bola de futebol, das fagulhas dos fogos de artifício ou de um helicóptero que se move no céu. Isto é, dadas as condições iniciais, poderá determinar a posição, a velocidade e a aceleração de qualquer um desses corpos.

Por último, a definição de velocidade relativa também será estendida para movimentos em duas e em três dimensões.

AULA 7

Vetores posição, deslocamento e velocidade

Objetivo

- Lidar com os vetores posição, deslocamento e velocidade em duas e em três dimensões.

7.1 COMPONENTES DE VETORES E VETORES UNITÁRIOS

Nas aulas anteriores as grandezas vetoriais foram tratadas especificando o seu módulo e dizendo, em todo momento, sua direção e sentido. Isso não foi muito difícil, porque o movimento era em uma linha reta, ou seja, o movimento ocorria apenas em uma dimensão. Agora, no entanto, serão estudados os movimentos em um plano ou no espaço, ou melhor, em duas ou em três dimensões. Portanto será necessário determinar duas ou três direções e sentidos para os movimentos. Para fazer isso serão utilizadas as **componentes** dos vetores e os **vetores unitários** para indicar a direção e o sentido das grandezas vetoriais.

Todo vetor tem módulo, direção e sentido. As operações vetoriais, embora simples, não são as mesmas utilizadas para grandezas escalares. Para entender o que são as componentes de um vetor, você deve saber como fazer uma soma vetorial.

7.1.1 Soma vetorial

Suponha que um corpo tenha um deslocamento $A = 4\ m$ para a direita e depois um deslocamento $B = 3\ m$ para cima, como indica a Figura 7.1. Deseja-se determinar o seu deslocamento resultante $\vec{C}$, ou seja, a soma vetorial dos deslocamentos $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

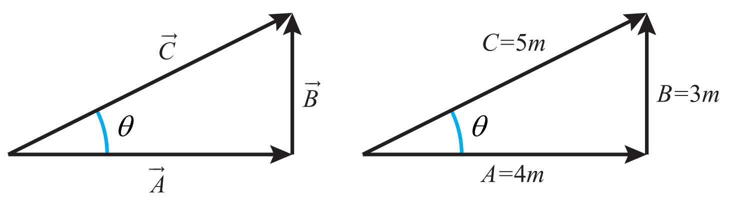


Figura 7.1 – Um corpo se desloca 4 m para a direita e em seguida 3 m para cima. O seu deslocamento resultante é a hipotenusa do triângulo retângulo, sendo seu módulo igual a 5 m.

Fazendo um esboço em escala, como o da Figura 7.1, e medindo com uma régua o deslocamento $\vec{C}$, pode-se encontrar seu módulo $|\vec{C}| = 5\,m$. Nem sempre é pertinente desenhar vetores em escala para determinar sua soma. Nesse caso podemos utilizar também trigonometria para determinar o módulo do vetor $\vec{C}$, já que o triângulo formado pelos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ é retângulo:

$$C^2 = A^2 + B^2$$

$$C = 5\,m.$$

Como você deve ter percebido, dados dois vetores, sua soma é feita ligando-se o início do primeiro vetor com a extremidade do segundo (veja a Figura 7.1). Sua representação é dada por:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}.$$

A direção do vetor $\vec{C}$ é determinada observando-se o ângulo *q*, tal que:

$$tg\theta = \frac{B}{A} = \frac{3}{4}$$

$$\theta = arctg\left(\frac{3}{4}\right) = 37^{\circ}.$$

A direção do deslocamento resultante desse corpo é então descrita como 37º da direita para cima.

7.1.2 Componentes de vetores

Pode-se representar um vetor $\vec{V}$ no plano cartesiano *XY* pela soma de dois vetores $\vec{V_x}$ e $\vec{V_y}$, como indicado na Figura 7.2. Observe que:

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y}\,. \tag{7.1}$$

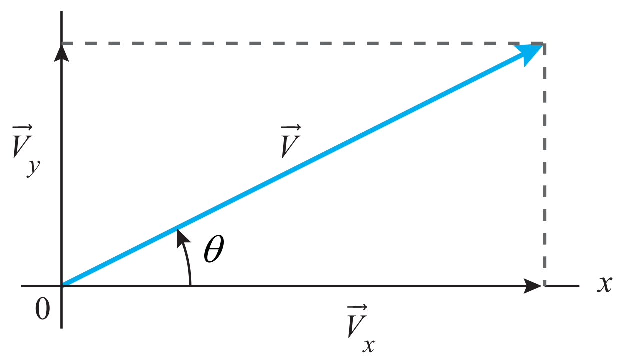


Figura 7.2 – O vetor $\vec{V}$ é dado pela soma das componentes vetoriais $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$.

Então, as **componentes vetoriais** do vetor $\vec{V}$ são definidas como sendo os vetores $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$ e as **componentes escalares** como sendo os números V_x e V_y, ou seja, os módulos dos vetores $\vec{V_x}$ e $\vec{V_y}$.

A partir de agora, quando se falar em componentes de um vetor, estaremos nos referindo às *componentes escalares*.

Observando atentamente a Figura 7.2, podemos afirmar que:

$$sen\theta = \frac{V_y}{V} \quad \text{e} \quad cos\theta = \frac{V_x}{V} \tag{7.2a}$$

$$V_y = Vsen\theta \quad \text{e} \quad V_x = Vcos\theta \tag{7.2b}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

7.1.3 Vetores unitários

Um vetor unitário é um vetor de módulo unitário, ou seja, de módulo igual a 1. Ele é útil para designar a direção de vetores. Em um sistema de coordenadas *XY* é comum definir os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$, que possuem a mesma direção dos eixos *X* e *Y* respectivamente, de modo que o vetor $\vec{V}$ pode ser escrito como:

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j},$$

em que V_x é o módulo da componente do vetor $\vec{V}$ na direção *X*, sendo $\hat{i}$ o vetor unitário na direção desse eixo. V_y é o módulo da componente do vetor $\vec{V}$ na direção *Y* e $\hat{j}$ o vetor unitário nessa direção.

De modo semelhante no espaço (em três dimensões), teremos:

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}, \tag{7.3}$$

em que V_z é o módulo da componente de $\vec{V}$ na direção do eixo *Z* e $\hat{k}$ é o vetor unitário na direção desse eixo.

7.2 VETORES POSIÇÃO E DESLOCAMENTO

A posição de um corpo depende do referencial adotado, ou seja, depende da escolha do sistema de coordenadas. O ponto *P* da Figura 7.3 é descrito pelo **vetor posição** $\vec{r}$, que é o vetor que liga a origem do sistema de coordenadas *OXYZ* ao ponto *P*.

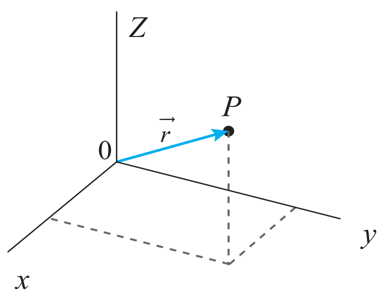


Figura 7.3 – O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula.

Observe que o vetor $\vec{r}$ pode ser escrito em função dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, tal que:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \tag{7.4}$$

em que $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ e $z\hat{k}$ são as **componentes vetoriais** e x, y e z são as **componentes** do vetor $\vec{r}$ no sistema de coordenadas *XYZ* da Figura 7.3.

Observe também que o módulo do vetor posição $|\vec{r}|$ é dado por:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (7.5)$$

Considere agora a Figura 7.4, que mostra a trajetória de um corpo que se move no espaço. Em um dado instante de tempo t_1 ele está no ponto P_1 sendo sua posição descrita pelo vetor posição $\vec{r}_1$. Em um instante de tempo t_2 posterior, ele está no ponto P_2 e o vetor $\vec{r}_2$ descreve sua posição nesse momento.

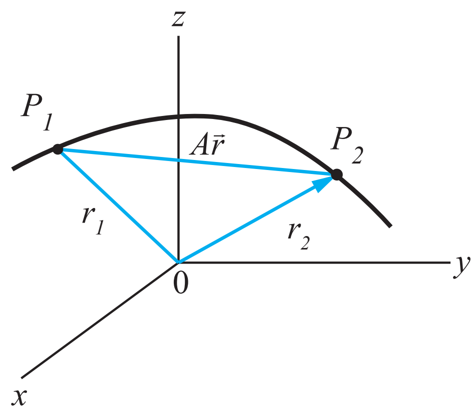


Figura 7.4 – O vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ é dado pela variação da posição.

O **vetor deslocamento** $\Delta\vec{r}$ de um corpo que se move do ponto P_1 ao ponto P_2 é definido como a variação da posição, ou seja:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (7.6)$$

ATIVIDADE 7.1 – MÓDULO DO VETOR POSIÇÃO

Mostre que o módulo do vetor posição $\vec{r}$ é dado pela equação 7.5

Exemplo 7.1 – Posição e deslocamento de uma partícula

A posição de uma partícula foi cuidadosamente observada e suas componentes x, y e z variam com o tempo de acordo com as equações:

$$x = (1,0\ cm) - (0,5\ cm/s^2)t^2,$$

$$y = (3,0\ cm/s)t \ \text{ e}$$

$$z = (5,0\ cm) - (0,30\ cm/s^3)t^3.$$

Determine a posição dessa partícula nos instantes de tempo t = 0,0 s e t = 2,0s.

Calcule o vetor deslocamento entre os intervalos de tempo t = 0,0 s e t = 2,0s.

Faça um esboço mostrando o deslocamento.

Solução

Pela equação 7.4, temos:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r}(t) = [1,0\,cm - (0,50\,cm/s^2)t^2)]\hat{i} + [(3,0\,cm/s)t]\hat{j} + [5,0\,cm - (0,25\,cm/s^3)t^3]\hat{k}.$$

Já que as componentes x, y e z do vetor posição dependem do tempo t, o vetor $\vec{r}$ também dependerá do tempo.

Para t = 0,0 s,

$$\vec{r}(0,0\,s) = [1,0\,cm - (0,50\,cm/s^2)(0,0\,s)^2]\hat{i} + [(3,0\,cm/s)(0,0s)]\hat{j} + [5,0\,cm - (0,3\,m/s^3)(0,0\,s)^3]\hat{k}$$

$$\vec{r}(0,0\,s) = (1,0\,cm)\hat{i} + (0)\hat{j} + (5,0\,cm)\hat{k}.$$

Para t = 2,0 s,

$$\vec{r}(2,0\,s) = [1,0\,cm - (0,50\,cm/s^2)(2,0\,s)^2]\hat{i} + [(3,0\,cm/s)(2,0\,s)]\hat{j} + [5,0\,cm - (0,3\,m/s^3)(2,0\,s)^3]\hat{k}$$

$$\vec{r}(2,0\,s) = (-1,0\,cm)\hat{i} + (6,0\,cm)\hat{j} + (2,6\,cm)\hat{k}.$$

Pela equação 7.6,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0$$

$$\Delta\vec{r} = (-1,0\,cm - 1,0\,cm)\hat{i} + (6,0\,cm - 0,0\,cm)\hat{j} - (2,6\,cm - 5,0\,cm)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = -(2,0\,cm)\hat{i} + (6,0\,cm)\hat{j} - (2,4\,cm)\hat{k}.$$

O deslocamento pode ser visto na Figura 7.5. A partícula se desloca 2,0 *cm* no sentido negativo do eixo *OX*, 6,0 *cm* no sentido do eixo *OY* e 2,4 *cm* no sentido negativo do eixo *OZ*.

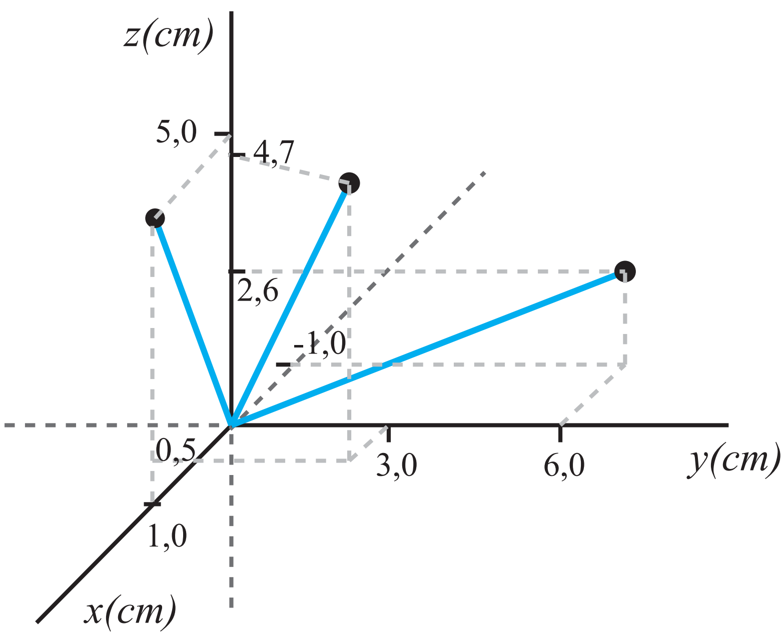


Figura 7.5 – Vetor deslocamento da partícula.

7.3 PRODUTO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

Antes de prosseguir, relembre algumas considerações sobre o produto de um vetor por um escalar. Essas considerações são importantes, pois, adiante, será estudado o vetor velocidade, que é o produto de um vetor (o deslocamento) por um escalar (o inverso do tempo), ou seja, o produto de uma grandeza vetorial por um número real.

Considere um vetor $\vec{v}$, tal que:

$$\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}.$$

Multiplicando o vetor $\vec{v}$ por qualquer número *n* real, tem-se que:

$$n\vec{v} = (na)\hat{i} + (nb)\hat{j} + (nc)\hat{k}.$$

Por exemplo: sejam as componentes de $\vec{v}$, $a = 0$, $b = 7\ mm$ e $c = 6\ mm$. O vetor $\vec{v}$ é dado por:

$$\vec{v} = (0\ mm)\hat{i} + (7\ mm)\hat{j} + (6\ mm)\hat{k}.$$

Se o vetor $\vec{v}$ for multiplicado por dois, temos que:

$$2\vec{v} = 2(0\ mm)i + 2(7\ mm)\hat{j} + 2(6\ mm)\hat{k}$$
$$2\vec{v} = (14\ mm)\hat{j} + (12\ mm)\hat{k}.$$

A Figura 7.6 mostra um vetor $\vec{v}$ em um sistema de coordenadas *XYZ* e um vetor $2\vec{v}$, que possui a mesma direção e sentido do vetor $\vec{v}$, mas módulo duas vezes maior.

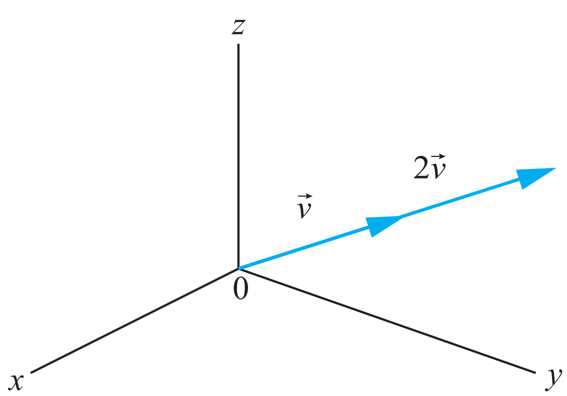


Figura 7.6 – Produto de um vetor por uma escalar. Observe que apenas o módulo do vetor é alterado.

Multiplicando o vetor $\vec{v}$ por –1, temos que:

$$-1\vec{v} = -1(0\ mm)\hat{i} - (7\ mm)\hat{j} - (6\ mm)\hat{k}.$$

Quando multiplicamos um vetor por –1, estamos se invertendo seu sentido. O vetor $-\vec{v}$ possui a mesma direção e mesmo módulo do vetor $\vec{v}$, mas sentido oposto. A Figura 7.7 mostra o vetor $\vec{v}$ e o vetor $-\vec{v}$.

Note que, quando fazemos:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

podemos entender que $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 + (-\vec{r}_1)$.

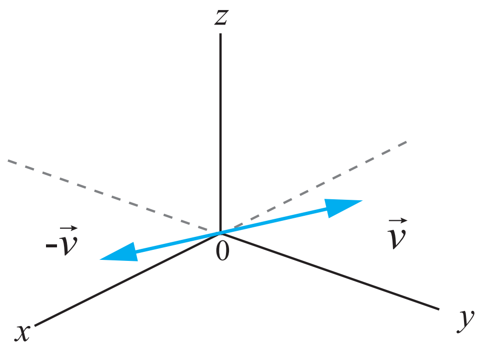


Figura 7.7 – Produto de um vetor por –1. Observe que apenas o sentido do vetor é alterado.

Isso pode ser visualizado nas Figuras 7.8a e 7.8b. Lembrando que a soma vetorial é feita unindo-se a origem de um dos vetores à extremidade do outro.

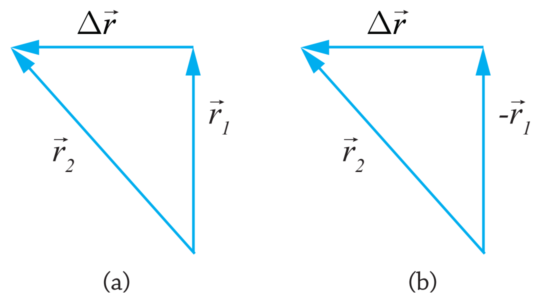


Figura 7.8 – (a) O vetor deslocamento Δr é igual a diferença entre os vetores $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_1$. (b) Também podemos obter o vetor deslocamento pela soma dos vetores $\vec{r}_2$ e $-\vec{r}_1$.

7.4 VETORES VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Considere um corpo que se move no espaço, como ilustra a Figura 7.9. No instante de tempo t_1, ele está no ponto P_1 sendo sua posição $\vec{r}_1$. Em um instante de tempo t_2 posterior, ele está no ponto P_2 e o vetor $\vec{r}_2$ descreve sua posição nesse momento.

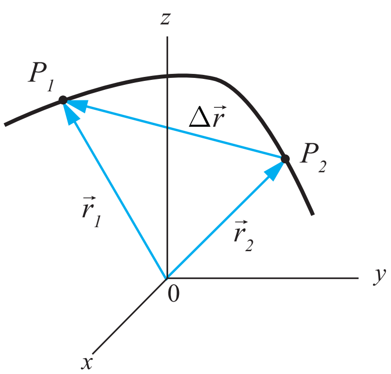


Figura 7.9 – Um corpo se move do ponto P_1 ao ponto P_2 em um intervalo de tempo Δt.

7.4.1 Vetor velocidade média

O **vetor velocidade** média $\vec{v}_m$ desse corpo é definido como a razão entre o deslocamento $\Delta\vec{r}$ e o intervalo de tempo Δt durante o qual ele se deslocou:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{7.7}$$

Como o vetor velocidade média é o produto de um vetor (Δt) por um escalar ($1/\Delta t$), ele possui a mesma direção e mesmo sentido do vetor deslocamento, uma vez que Δt é **sempre positivo**.

7.4.2 Vetor velocidade instantânea

O **vetor velocidade instantânea** é determinado pelo limite do vetor velocidade média quando o intervalo de tempo Δt tende a zero:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{7.8}$$

O vetor velocidade $\vec{v}$ é a derivada do vetor posição $\vec{r}$ em relação ao tempo.

Observe atentamente, pela Figura 7.9, que, à medida que Δt fica pequeno, o vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ se aproxima da reta tangente que passa pelo ponto P_1. No limite, quando $\Delta t \to 0$, o vetor deslocamento é tangente à trajetória descrita pelo corpo. Como a velocidade $\vec{v}$ possui mesma direção e sentido de $\Delta\vec{r}$, podemos concluir que:

A velocidade é tangente à curva descrita pelo movimento do corpo.

Das equações 7.4 e 7.8, tem-se que:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

E, então:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{7.9}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \tag{7.10}$$

em que:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}, \tag{7.11}$$

sendo v_x, v_y e v_z os módulos das componentes do vetor $\vec{v}$ no espaço. O módulo do vetor velocidade $|\vec{v}|$ é dado pela equação:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{7.12}$$

Exemplo 7.2

Um pequeno disco é arremessado sobre uma mesa horizontal, sendo sua coordenada (2,3 *cm*; 1,1 *cm*) no instante de tempo inicial $t = 0{,}0\ s$ e (4,6 *cm*; 4,1 *cm*) para $t = 1{,}0\ s$.

a) Desenhe os vetores posição em um plano *xy* para esses dois instantes de tempo. Escreva a equação que descreve os vetores posição para esses instantes de tempo.

b) Calcule o vetor deslocamento do disco.

c) Calcule sua velocidade média.

Solução

a) Os vetores $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ e $\Delta\vec{r}$ podem ser vistos na Figura 7.10. Como os vetores $\vec{r}_0$ e $\vec{r}_1$ estão no plano *xy*, eles têm a forma:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j},$$

sendo *x* e *y* suas componentes.

Para $\vec{r}_0$, $x_0 = 2{,}3\ cm$ e $y_0 = 1{,}1\ cm$.

Para $\vec{r}_1$, $x_0 = 4{,}6\ cm$ e $y_0 = 4{,}1\ cm$.

Logo:

$$\vec{r}_0 = (2,3\ cm)\hat{i} + (1,1\ cm)\hat{j}$$

$$\vec{r}_1 = (4,6\ cm)\hat{i} + (4,1\ cm)\hat{j}.$$

b) O vetor deslocamento é dado pela variação da posição:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

$$\Delta\vec{r} = (4,6\ cm - 2,3\ cm)\hat{i} + (4,1\ cm - 1,1\ cm)\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = (2,3\ cm)\hat{i} + (3,0\ cm)\hat{j}.$$

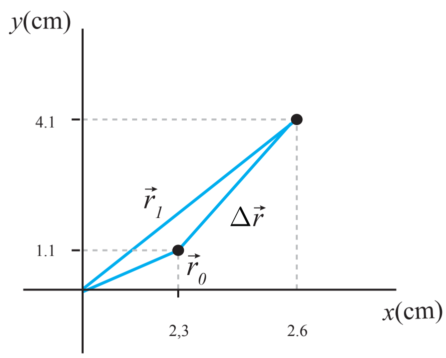


Figura 7.10 – Vetor deslocamento do disco do exemplo 7.2.

Observe na Figura 7.10 o vetor deslocamento. Note que $\vec{r}_1 = \Delta\vec{r} + \vec{r}_0$.

c) A velocidade média do disco é obtida pela equação 7.7:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(2,3cm)\hat{i} + (3,0\ cm)\hat{j}_1}{1,0s}$$

$$\vec{v}_m = (2,3cm/s)\hat{i} + (3,0\ cm/s)\hat{j}.$$

ATIVIDADE 7.2 – VETOR VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE DE PERCURSO

Um corpo se desloca de A para B no sentido anti-horário de um semicírculo de raio R = 5,2 *m*. Ele faz o trajeto de A até B em 4,0 *s*.

a) Determine o vetor velocidade média em termos dos vetores $\hat{i}$ e $\hat{j}$.

b) Determine a velocidade de percurso (ou velocidade escalar média).

ATIVIDADE 7.3

A posição da membrana de um alto-falante varia com o tempo de acordo com a equação:

$$\vec{r}(t) = Asen(\omega t)\hat{i},$$

em que $A = 0.05\ mm$ e $\omega = 60\ rad/s$.

a) Determine a posição de um ponto no centro da membrana do alto-falante nos instantes de tempo $t = 0$ e $t = \pi/2\omega$.

b) Qual é o deslocamento desse ponto nesse intervalo de tempo?

c) Determine o vetor velocidade de um ponto no centro da membrana do alto-falante.

d) Calcule o vetor velocidade média para o intervalo de tempo do item a.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 7.1 – Módulo do vetor posição

Observe que a projeção do vetor $\vec{r}$ no plano XY (o vetor $\vec{r}`$) é a hipotenusa do triângulo retângulo de lados x e y (veja a Figura 7.11):

$$r`^2 = x^2 + y^2.$$

O vetor $\vec{r}$ é a hipotenusa do triângulo de lados z e $\vec{r}`$.

Então:

$$r = \sqrt{z^2 + r`^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

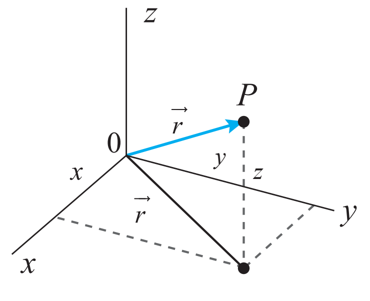


Figura 7.11 – Projeção do vetor $\vec{r}$ no plano XY.

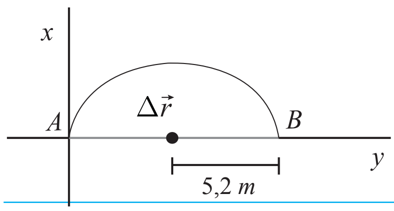


Figura 7.12 – Vetor deslocamento do corpo de A para B.

Atividade 7.2 – Vetor velocidade média e velocidade escalar média

a) O deslocamento do corpo de A para B foi de:

$$\Delta\vec{r} = -(10,4\ m)\hat{i},$$

de acordo com a Figura 7.12.

A velocidade média é obtida pela razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo correspondente:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_m = \frac{-(10,4\ m)\hat{i}}{4,0s}$$

$$\vec{v}_m = -(2,6\ m/s)\hat{i}.$$

b) A velocidade de percurso é dada pela distância percorrida d_t (metade do perímetro) dividida pelo intervalo de tempo:

$$v_p = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\pi R}{\Delta t}$$

$$v_p = \frac{\pi(5,2\ m)}{4,0s}$$

$$v_p = 4,1\ m/s.$$

Atividade 7.3

a) Em $t = 0$:

$$\vec{r}(0) = Asen(0)\hat{i} = 0.$$

Em $t = \pi/2\omega$:

$$\vec{r}\left(\pi/2\omega\right) = Asen\left(\pi/2\right)\hat{i} = A\hat{i}$$

$$\vec{r}\left(\pi/2\omega\right) = (0,05\ mm)\hat{i}.$$

b) O deslocamento nesse intervalo de tempo é:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\left(\pi/2\omega\right) - \vec{r}(0)$$

$$\Delta\vec{r} = (0,05\ mm)\hat{i}.$$

c) A velocidade é obtida derivando a posição em função do tempo:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[Asen(\omega t)\hat{i}\right]$$

$$\vec{v}(t) = A\omega\cos(\omega t)\hat{i}.$$

d) A velocidade média é dada pela equação:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(0,05\ mm)\hat{i}}{\pi/2\omega}$$

$$\vec{v}_m = \left(1,9x10^{-3}\ m/s\right)\hat{i}.$$

Observe que o tratamento vetorial possibilitou maior facilidade para descrever o deslocamento e a velocidade. Na unidade anterior, além de convencionar sinais de acordo com o sentido do movimento, tínhamos que dizer qual era a direção (para cima, para a esquerda, para o norte etc.). Com o auxílio das componentes e dos vetores unitários, não temos essas preocupações, pois eles carregam essas informações.

Note que essa atividade trata de um movimento apenas em uma dimensão, e seu tratamento é bem simples e, de certa forma, menos trabalhoso que o utilizado na unidade anterior com relação à especificação de direções e sentidos.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um pequeno rato possui coordenadas x e y $(0,3;1,2)$ metros no instante de tempo $t = 2,1\ s$ e coordenadas x e $y(1,9;5,2)$ metros no instante de tempo $t = 4,3\ s$. As coordenadas x e y são dadas em metros.

a) Qual é o deslocamento do rato nesse intervalo de tempo?

b) Calcule o módulo do vetor velocidade média do rato.

c) Determine a direção e o sentido do vetor velocidade média.

E2. Uma barata está na origem do sistema de coordenadas no instante de tempo $t = 1,0\ s$. Entre o intervalo de tempo de $t = 1,0\ s$. e $t = 8,0\ s$, sua velocidade média tem componentes $v_x = 0,15\ m/s$ e $v_y = -0,23\ m/s$

a) Determine as coordenadas x e y da barata no instante de tempo $t = 8,0\ s$.

b) Determine o vetor posição da barata no instante de tempo $t = 8,0\ s$.

E3. A posição de uma partícula que se move no espaço é dada pela equação $\vec{r} = \left(A + Bt^2\right)\hat{i} + \left(Ct\right)\hat{j}$, em que $A = 2,0\ m$, $B = 0,63\ m/s^2$ e $C = 3,1\ m/s$.

a) Determine o vetor posição para os instantes de tempo $t = 1,0\ s$. e $t = 2,2\ s$. Qual é o deslocamento nesse intervalo de tempo?

b) Determine a velocidade média no intervalo de tempo assinalado no item a.

c) Encontre uma expressão para a velocidade $v(t)$.

d) Faça um esboço apresentando a trajetória da partícula entre os instantes de tempo $t = 1,0\ s$. e $t = 2,2\ s$, mostrando as velocidades nesses instantes de tempo.

E4. Um carrinho "bate-bate" de um parque de diversões, em dado momento, possui coordenadas:

$$x(t) = Ct$$

$$y(t) = A - Bt^2,$$

em que $A = 3,0\ m$, $B = 0,12\ m/s^2$ e $C = 2,4\ m/s$.

a) Faça um desenho da trajetória do carrinho de "bate-bate".

b) Qual é a distância do carrinho em relação à sua origem?

c) Em que instantes de tempo a velocidade faz um ângulo de 90º com a posição?

E5. Um trem se desloca na direção norte com velocidade de 65 *km/h* durante 6 minutos. Em seguida ele se desloca na direção noroeste a 30º do norte com velocidade de 50 *km/h* durante 24 minutos. Depois ele se desloca na direção oeste a 60º da direção noroeste com velocidade de 70 *km/h* durante 18 minutos.

a) Encontre o deslocamento resultante do trem.

b) Determine sua velocidade média no trajeto.

c) Calcule a sua velocidade escalar média.

AULA 8

Vetor aceleração

Objetivos

- Definir aceleração média e aceleração instantânea em duas e em três dimensões;
- Dizer quais componentes da aceleração são responsáveis pela variação do módulo e da direção do vetor velocidade em um movimento em três dimensões.

8.1 VETORES ACELERAÇÃO MÉDIA E ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA

Se a velocidade de um corpo que se move no espaço varia, seja em módulo ou em direção, ele está sendo acelerado.

Considere um corpo que se move no espaço, como ilustra a Figura 8.1. Em um instante de tempo t_1 esse corpo está no ponto P_1 e possui velocidade $\vec{v}_1$. Em um instante de tempo t_2 ele está no ponto P_2 com velocidade $\vec{v}_2$.

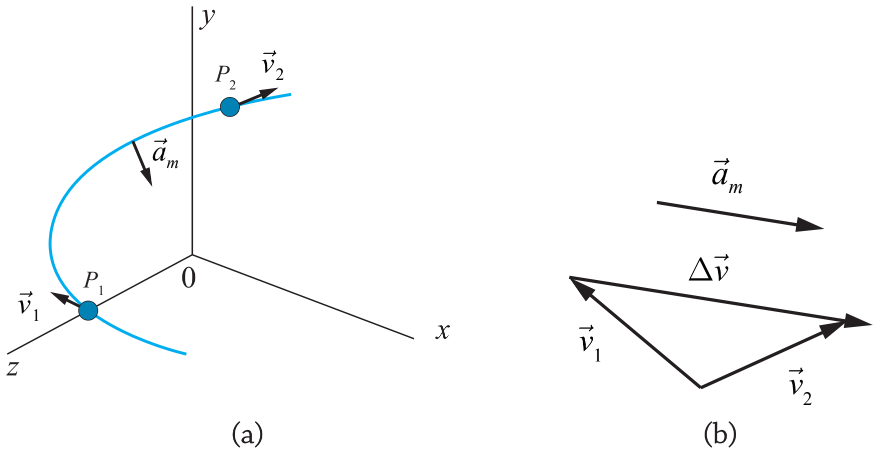


Figura 8.1 – Um corpo acelerado se movendo no espaço em uma trajetória curva. O vetor aceleração média $\vec{a}_m$ possui a mesma direção e sentido do vetor $\Delta\vec{v}$ e aponta para dentro da trajetória descrita pelo corpo. Preste atenção na obtenção do vetor $\Delta\vec{v}$ no item (b).

8.1.1 Vetor aceleração média

O **vetor aceleração média** é dado pela razão entre a variação do vetor velocidade $\vec{v}$ e o intervalo de tempo decorrido:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{8.1}$$

O vetor aceleração média $\vec{a}_m$ possui a mesma direção e sentido do vetor $\Delta\vec{v}$. Observe que $\vec{a}_m$ aponta para a parte de dentro da trajetória descrita pelo movimento desse corpo, como pode ser visualizado na Figura 8.1.

8.1.2 Vetor aceleração instantânea

O **vetor aceleração instantânea** $\vec{a}$ é o limite da aceleração média $\vec{a}_m$ quando o intervalo de tempo Δt tende a zero:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{8.2}$$

O vetor aceleração é a derivada do vetor velocidade em relação ao tempo.

Como:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}.$$

Da equação 8.2, temos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}. \tag{8.3}$$

E, portanto:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \tag{8.4}$$

em que a_x, a_y e a_z são os módulos das componentes do vetor aceleração $\vec{a}$ no sistema de coordenadas XYZ da Figura 8.1. Podemos também obter a aceleração a partir do vetor posição, uma vez que a aceleração é a derivada segunda da posição em relação ao tempo:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Sendo $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, temos então:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2\vec{y}}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2\vec{z}}{dt^2}\hat{k} \tag{8.5}$$

Todo corpo que se move em uma trajetória curva está sendo acelerado, **mesmo que o módulo do vetor velocidade $\vec{v}$ permaneça constante durante o trajeto**. Podemos entender o porquê disso decompondo o vetor aceleração, de modo que ele tenha uma componente paralela e outra ortogonal ao vetor velocidade em certo ponto. Veja a Figura 8.2a.

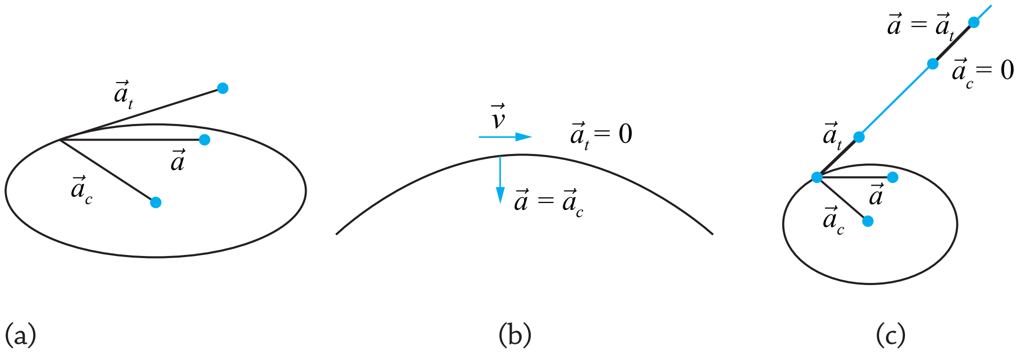


Figura 8.2 – Um corpo que descreve uma trajetória curva é acelerado. (a) As componentes vetoriais $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_c$ do vetor aceleração $\vec{a}$. (b) Quando a componente tangencial $\vec{a}_t$ é nula, o vetor velocidade possui módulo constante. (c) Se a componente radial $\vec{a}_c$ se anular, o vetor velocidade não muda de direção e o corpo se move em uma linha reta.

A **componente tangencial** a_t é a responsável pela variação do módulo do vetor velocidade, uma vez que está na mesma direção de $\vec{v}$. A **componente radial** a_c é responsável apenas pela variação da direção do vetor velocidade, uma vez que é ortogonal a esse vetor.

Você pode perceber que, se a componente a_t for nula, o vetor velocidade possui módulo constante, mudando apenas sua direção. Veja a Figura 8.2b. Em uma situação em que a componente a_c é nula, o vetor velocidade não muda sua direção (apenas seu módulo) e o movimento ocorre em uma dimensão.

Exemplo 8.1

O vetor posição de certa partícula que se move no espaço é dado por:

$$\vec{r} = (0{,}160\ m)\hat{i} + (0{,}970\ m/s^3)t^3\hat{j} - (0{,}590\ m/s^4)t^4\hat{k}.$$

a) Determine a velocidade instantânea dessa partícula.

b) Calcule a aceleração média no intervalo de tempo entre t = 1,0s e t = 2,0s.

c) Calcule as componentes a_x, a_y e a_z da aceleração instantânea.

Solução

a) Seja $\vec{r} = A\hat{i} + Bt^3\hat{j} - Ct^4\hat{k}$, em que $A = 0{,}160\ m$, $B = 0{,}970\ m/s^3$ e $C = -0{,}590\ m/s^4$. Pela equação 7.8, temos que $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Logo:

$$\vec{v} = 3Bt^2\hat{j} - 4Ct^3\hat{k}$$

$$\vec{v} = (2{,}91\ m/s^3)t^2\hat{j} - (2{,}36\ m/s^4)t^3\hat{k}.$$

b) Para t = 1,0 s,

$$\vec{v}_1(1,0s) = (2,91\, m/s^3)(1,0s)^2\,\hat{j} - (2,36\, m/s^4)(1,0s)^3\,\hat{k}$$

$$\vec{v}_1(1,0s) = (2,91\, m/s)\hat{j} - (2,36\, m/s)\hat{k}.$$

Para t = 2,0 s,

$$\vec{v}_2(2,0s) = (2,91\, m/s^3)(2,0s)^2\,\hat{j} - (2,36\, m/s^4)(2,0s)^3\,\hat{k}$$

$$\vec{v}_2(2,0s) = (11,6\, m/s)\hat{j} - (18,9\, m/s)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (11,6\, m/s - 2,91\, m/s)\hat{j} + [-(18,9\, m/s) - (-2,36\, m/s)]\hat{k}$$

$$\Delta\vec{v} = (8,69\, m/s)\hat{j} - (16,5\, m/s)\hat{k}.$$

E então:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(8,69\, m/s)\hat{j} - (16,5\, m/s)\hat{k}}{2,0s - 1,0s}$$

$$\vec{a}_m = (8,69\, m/s^2)\hat{j} - (16,5\, m/s^2)\hat{k}.$$

c) Inicialmente calculamos a aceleração instantânea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6Bt\ \hat{j} - 12Ct^2\hat{k}$$

$$\vec{a} = (5,82\, m/s^3)t\,\hat{j} - (7,08\, m/s^4)t^2\hat{k},$$

que comparada à equação 8.4 permite concluir que:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = (5,82\, m/s^3)t$$

$$a_z = (7,08\, m/s^4)t^2.$$

ATIVIDADE 8.1

A posição de uma partícula que se move no espaço é dada pela equação:

$$\vec{r}(t) = \left(At^2\right)\hat{i} + \left(Bt^3\right)\hat{j} - \left(Ct^4\right)\hat{k},$$

em que $A = 2,5\, mm/s^2$, $B = 3,0\, mm/s^3$ e $C = 1,0\, mm/s^4$.

a) Determine o vetor velocidade dessa partícula.

b) Determine o vetor aceleração.

c) Obtenha o vetor velocidade média dessa partícula no intervalo de tempo entre t = 0 s e t = 2,0 s.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 8.1

a) Sabemos que:

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}.$$

Então:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2At)\hat{i} + (3Bt^2)\hat{j} - (4Ct^3)\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \hat{i}(5,0\ mm/s^2)t + \hat{j}(9,0\ mm/s^3)t^2 - \hat{k}(4,0\ mm/s^4)t^3.$$

b) A aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo, ou a derivada segunda da posição em relação ao tempo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2A)\hat{i} + (6Bt)\hat{j} - (12Ct^2)\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \hat{i}(5,0\ mm/s^2) + \hat{j}(18\ mm/s^3)t - \hat{k}(12\ mm/s^4)t^2.$$

c) As posições da partícula nesses instantes de tempo são:

$$\vec{r}(0) = 0\ mm$$

$$\vec{r}(2,0s) = (4A)\hat{i} + (8B)\hat{j} - (16C)\hat{k}$$

$$\vec{r}(2,0s) = (10\ mm)\hat{i} + (24\ mm)\hat{j} - (16\ mm)\hat{k}.$$

O deslocamento é então:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2,0s) - \vec{r}(0)$$

$$\Delta\vec{r} = (10\ mm)\hat{i} + (24\ mm)\hat{j} - (16\ mm)\hat{k}.$$

Logo podemos obter a velocidade média:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(10\ mm)\hat{i} + (24\ mm)\hat{j} - (16\ mm)\hat{k}}{2,0s - 0s}$$

$$\vec{v}_m = (5,0\ mm)\hat{i} + (12\ mm)\hat{j} - (8,0\ mm)\hat{k}.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Uma motocicleta está transitando pela cidade e em $t_1 = 0,5\ min$ sua velocidade possui componentes $v_x = 9,0\ m/s$ e $v_y = 18\ m/s$. No instante de tempo $t_2 = 7,1\ min$ sua velocidade possui componentes $v_x = -3,0\ m/s$ e $v_y = 22\ m/s$.

a) Calcule as componentes da aceleração média.

b) Determine o vetor aceleração.

c) Faça um esboço das velocidades nos instantes de tempo t_1 e t_2. Qual é a diferença entre esses dois vetores?

E2. Um táxi faz uma corrida pelo centro da cidade e em $t_1 = 5,5\ min$ sua velocidade possui componentes $v_x = 9,7\ m/s$ e $v_y = 21\ m/s$. No intervalo de tempo entre $t_1 = 5,5\ min$ e $t_2 = 17\ min$ sua aceleração possui módulo igual a $a = 0,98\ m/s^2$ e faz um ângulo de 45º com o eixo Ox.

a) Determine os módulos das componentes v_x e v_y da velocidade do táxi em $t_2 = 17\ min$.

b) Escreva o vetor velocidade do táxi em $t_2 = 17\ min$.

c) Faça um esboço das velocidades nos instantes de tempo t_1 e t_2. Qual é a diferença entre esses dois vetores?

E3. As coordenadas de um avião a jato variam no tempo de acordo com as equações:

$$x(t) = A - Bt^2$$

$$y(t) = Ct,$$

em que $A = 9,0\ km$, $B = 0,0091\ km/s^2$ e $C = 445\ m/s$.

a) Faça um esboço da trajetória do avião entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 1\ min$.

b) Encontre uma expressão para a velocidade v e aceleração a para todo tempo t.

c) Faça um esboço mostrando o vetor velocidade e o vetor aceleração do avião no instante de tempo $t = 10\ s$.

E4. Um ciclista faz um percurso de A para C, como indicado na Figura 8.3. Desenhe o vetor aceleração e suas componentes vetoriais nos pontos A, B e C indicados na Figura 8.3, quando:

a) o vetor velocidade possui módulo constante.

b) o módulo do vetor velocidade diminui de A para C.

c) o módulo do vetor velocidade aumenta de A para C.

Observação: em nenhum dos pontos assinalados na Figura 8.3 a velocidade do ciclista é nula.

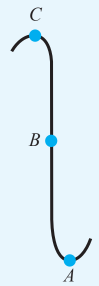


Figura 8.3 – Percurso do ciclista do exercício 8.4.

E5. Um abutre está voando em círculos. No instante de tempo t = 0 sua velocidade possui componentes $v_x = 5,0\ m/s$ e $v_y = 4,0\ m/s$. No instante de tempo $t = 3,0\ s$ sua velocidade possui componentes $v_x = 4,0\ m/s$ e $v_y = -5,0\ m/s$.

a) Faça um desenho esquemático mostrando parte da trajetória do abutre e o vetor velocidade com suas componentes para os instantes de tempo $t = 0\ s$ e $t = 3,0\ s$.

b) Determine as componentes do vetor aceleração média nesse intervalo de tempo.

Desafio: Obtenha então o vetor aceleração em termos dos vetores $\hat{i}$ e $\hat{j}$.

AULA 9

Movimento circular e movimento de projéteis

Objetivos

- Descrever o movimento de uma partícula ao longo de uma trajetória circular;
- Aplicar as equações desenvolvidas para o movimento unidimensional para o caso de movimento de projéteis pelo princípio da independência de movimentos.

9.1 MOVIMENTO CIRCULAR

9.1.1 Aceleração tangencial e aceleração centrípeta

Quando um corpo descreve um movimento curvilíneo, existe uma aceleração dirigida para a parte de dentro da curva, denominada **aceleração centrípeta** $\vec{a}_c$ (o termo "centrípeta" se refere ao que aponta para o centro). Lembre-se de que em cada ponto da curva o vetor aceleração média $\vec{a}_m$ possui a mesma direção e sentido do vetor $\Delta\vec{v}$.

Considere o movimento de uma partícula, uma pedra presa a um barbante, por exemplo, girando em torno de um ponto fixo à medida que move ao longo de uma circunferência de raio R, conforme mostra a Figura 9.1.

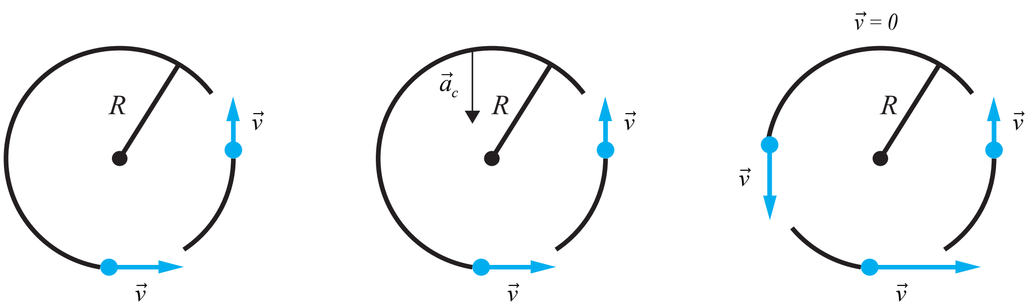


Figura 9.1 – (a) Partícula em movimento circular; (b) aceleração tangencial nula; (c) aceleração tangencial não nula. Em todos os casos existe aceleração centrípeta, porque, mesmo quando a velocidade tangencial é constante em módulo, sua direção varia.

Quando a componente tangencial $\vec{a}_t$ da aceleração for nula, a partícula descreve um **movimento circular uniforme** (MCU), em que o módulo do vetor velocidade não varia e, portanto, **o módulo de sua velocidade é constante** (Figura 9.1b).

Se a componente tangencial $\vec{a}_t$ não for nula, como podemos ver na Figura 9.1c, além de variar sua direção, o módulo do vetor velocidade também varia, fazendo com que o **módulo da velocidade não seja constante**. Nesse caso a partícula descreve um **movimento circular não uniforme**.

Em ambos os casos existe aceleração centrípeta, pois, mesmo quando a velocidade tangencial é constante em módulo, sua direção varia.

Para ambos os movimentos, pode-se mostrar que o módulo da componente $\vec{a}_t$ se relaciona com o módulo da velocidade v e com o raio da trajetória R pela equação:

$$a_c = \frac{v^2}{R}. \tag{9.1}$$

A demonstração completa será deixada para mais adiante, quando discutirmos a rotação em maiores detalhes.

Atente para o fato de que se o movimento for uniforme, ou seja, quando o módulo da velocidade v for constante, o módulo da aceleração centrípeta a_c também será constante. Já no movimento circular não uniforme, em que o módulo da velocidade varia no tempo, a aceleração centrípeta ainda será dada pela equação 9.1, mas a_c não será mais constante.

9.1.2 Período e frequência no movimento circular uniforme

O tempo necessário para que a partícula efetue uma volta completa ao longo de todo o perímetro $2\pi R$ da circunferência com velocidade v constante é chamado de **período** ***T*** do movimento. Desse modo:

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \tag{9.2}$$

No caso do movimento circular, o corpo realiza um número de voltas completas por unidade de tempo. Em uma volta completa a partícula descreve 360º da circunferência que correspondem a 2π radianos em um intervalo de tempo T; definimos sua **frequência angular** ω como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{9.3}$$

Assim, se a partícula efetua três voltas a cada segundo, a sua frequência angular é igual a três voltas por segundo ou $3 \times 2\pi\, rad/s$. Note que se ela realiza três voltas a cada segundo, ela gasta $1/3\, s$ para efetuar uma volta. Ou seja, ela tem um período $T = 1/3\, s$.

Para indicar quantas vezes o movimento é repetido por unidade de tempo, define-se também a **frequência** f do movimento, tal que:

$$f = \frac{1}{T}. \tag{9.4}$$

Ou seja, período e frequência são grandezas inversamente proporcionais.

A unidade de frequência f é o s^{-1} ou Hz (Hertz).

9.1.3 Velocidade angular média e velocidade angular instantânea

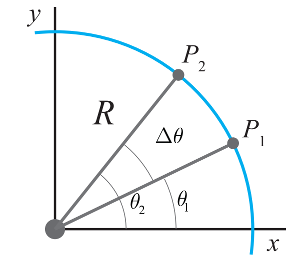


Figura 9.2 – Partícula se movendo ao longo de uma circunferência de raio R. Observe o deslocamento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ no intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Observe a Figura 9.2, que mostra uma partícula se movendo ao longo de uma circunferência de raio R. No instante de tempo t_1 a partícula está no ponto P_1. O segmento OP_1, que une o centro da circunferência à partícula no instante de tempo t_1, faz um ângulo θ_1 com o eixo OX. Em um instante de tempo t_2 posterior, a partícula está no ponto P_2 e o segmento OP_2 faz um ângulo θ_2 com o eixo OX.

A **velocidade angular média** ω_m é definida como a razão entre o deslocamento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ decorrido:

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (9.5)$$

Por exemplo: se a partícula está no ponto P_1 no instante de tempo $t_1 = 1{,}0s$, em que $\theta_1 = 20^o = 0{,}34\ rad$, e em um instante de tempo $t_2 = 2{,}0s$ ela está no ponto P_2, sendo $\theta_1 = 50^o = 0{,}87\ rad$. Sua velocidade angular média foi então:

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}87\ rad - 0{,}34\ rad}{2{,}0s - 1{,}0s} = 0{,}53\ rad/s.$$

Isso significa que a cada segundo a partícula descreve 0,53 rad (isto é, 30º) da circunferência.

A **velocidade angular instantânea** ω é o limite da velocidade angular média ω_m quando o intervalo de tempo Δt tende a zero, ou seja:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (9.6)$$

Em uma volta completa a partícula descreve 360º da circunferência que correspondem a 2π radianos em um tempo T. Logo, para uma volta completa a velocidade angular é dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Do mesmo modo, a velocidade v, para uma volta completa é dada pela equação 9.2. Portanto, das equações 9.2 e 9.6, podemos obter uma relação entre a **velocidade linear** e a **velocidade angular**:

$$v = \omega R. \qquad (9.7)$$

Se você colocar uma roda de bicicleta para girar com módulo da velocidade constante, poderá verificar que todos os pontos giram com a mesma velocidade angular. Qualquer ponto descreve o mesmo ângulo em certo intervalo de tempo. Os pontos mais distantes do eixo, no entanto, possuem velocidade escalar maior, pois têm raios maiores em relação ao eixo. Eles percorrem uma distância maior para o mesmo intervalo de tempo que os pontos mais próximos do eixo.

9.1.4 Relação entre aceleração centrípeta e velocidade angular

Também é possível expressar a componente da aceleração centrípeta em função da velocidade angular, do raio *R* e do período *T*, combinando as equações 9.1, 9.2 e 9.7. Elevando ao quadrado a equação 9.2, obtemos:

$$v^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^2.$$

Substituindo na equação 9.1, temos que:

$$a_c = \frac{1}{R}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^2 \Rightarrow a_c = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} R. \tag{9.8}$$

E da equação 9.8:

$$a_c = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R.$$

Obtemos a relação entre a componente da aceleração centrípeta e a velocidade angular:

$$a_c = \omega^2 R. \tag{9.9}$$

Exemplo 9.1

Uma pessoa gira em uma roda-gigante de raio $R = 10\ m$ que possui velocidade de módulo constante igual a $v = 4{,}5\ m/s$.

a) Determine a aceleração da pessoa que está na roda-gigante.

b) Calcule o tempo necessário para que a pessoa realize uma volta completa na roda-gigante.

Solução

a) A pessoa que está na roda-gigante executa um movimento circular uniforme, pois sua velocidade possui módulo constante. Isso significa que a aceleração muda apenas a direção da velocidade e aponta a trajetória para o centro, sendo seu módulo a_c dado pela equação 9.8:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(4,5\ m/s)^2}{10\ m} = 2,0\ m/s^2.$$

A aceleração centrípeta possui módulo $a_c = 2,0\ m/s^2$ e aponta para o centro da roda-gigante em qualquer ponto ao longo da trajetória descrita pelo movimento da pessoa que está na roda.

Atenção: o item a pede a aceleração e por isso devemos especificar tanto o seu **módulo** ($a_c = 2,0\ m/s^2$) quanto sua **direção e sentido** (para o centro da roda-gigante), pois a aceleração é uma grandeza vetorial.

b) O tempo de uma revolução completa é o período T do movimento. Pela equação 9.2, podemos ver que:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{a_c R}} = \frac{2\pi(10\ m)}{\sqrt{(2,0\ m/s^2)(10\ m)}}$$

$$T = 14\ s.$$

ATIVIDADE 9.1

Considere que a Terra faça seu movimento de rotação em exatamente 24 horas. O raio da Terra é igual a $6,38 \times 10^6 m$. Um CD de raio 6,0 *cm* faz um giro em torno do eixo que passa pelo seu centro em 0,5 *s*.

a) Determine as frequências dos movimentos do CD e da Terra.

b) Qual é a razão entre as velocidades angulares do CD e da Terra?

c) Qual é a componente radial a_c da aceleração no equador?

d) Qual é a razão entre essa componente e a aceleração da gravidade g? Qual é maior? Quantas vezes?

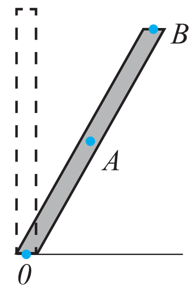


Figura 9.3 – Barra girando em torno do eixo que passa pelo ponto *O*.

ATIVIDADE 9.2

Uma barra com 0,90 *m* de comprimento gira com movimento uniforme em torno do eixo que passa pelo ponto *O*, conforme indica a Figura 9.3. O ponto *A* está no ponto médio da barra que efetua uma volta completa a cada 1,8 *s*.

a) Obtenha as velocidades angulares dos pontos *A* e *B*.

b) Determine o módulo do vetor velocidade média dos pontos *A* e *B* quando a barra executa uma volta completa.

c) Calcule a velocidade escalar média dos pontos *A* e *B*.

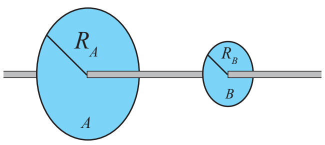


Figura 9.4 – Discos fixos por um eixo que gira uniformemente.

ATIVIDADE 9.3

Dois discos estão fixos por um eixo que gira uniformemente, como mostra a Figura 9.4. Se a relação entre seus raios é $R_A = 3R_B$, determine a razão entre:

a) as velocidades angulares dos dois discos.

b) as velocidades escalares médias dos pontos na borda de cada um dos discos.

c) as acelerações dos pontos nas bordas de cada um dos discos.

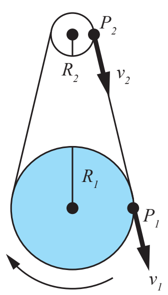


Figura 9.5 – Duas catracas de raios R_1 e R_2 da bicicleta da atividade 9.4.

ATIVIDADE 9.4

A Figura 9.5 mostra de forma esquemática duas catracas de uma bicicleta de raios $R_1 = 15,0\,cm$ e $R_2 = 8,00\,cm$ ligadas por uma correia.

a) Determine a velocidade angular ω_1 do ponto P_1 em função da velocidade angular ω_2 do ponto P_2. Quantas vezes ω_1 é maior (ou menor) que ω_2?

b) Quando a catraca maior girar com uma frequência de 65 *rpm* (rotações por minuto) qual será a frequência da catraca menor?

9.2 MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

Um corpo lançado de qualquer ponto da Terra sobre a influência da resistência do ar é um projétil. O movimento das fagulhas de fogos de artifício, o de uma bola de futebol e o da bala de canhão são bons exemplos de movimentos de projéteis que ocorrem em duas dimensões.

Quando um corpo é lançado com um ângulo θ em relação à horizontal e certa velocidade inicial $\vec{v}_0$, ele descreve uma trajetória parabólica, como ilustra a Figura 9.6.

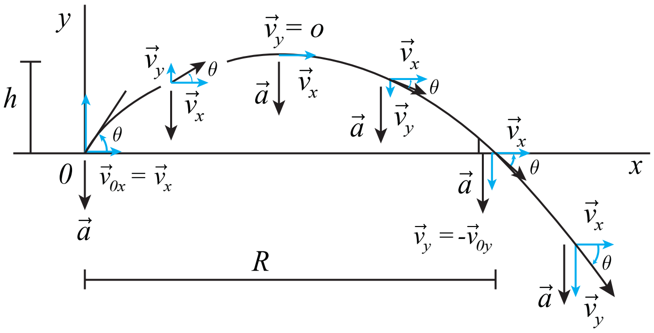


Figura 9.6 – Um projétil é lançado de um ângulo θ com velocidade inicial $\vec{v}_0$. A trajetória descrita pelo seu movimento é uma parábola.

Na análise do movimento de projéteis, as componentes da posição, da velocidade e da aceleração do projétil em cada eixo são determinadas separadamente (eixos *X* e *Y* da Figura 9.6).

Você pode observar que não existe aceleração na direção horizontal (eixo *X*). Assim, as equações para essa direção são as de um movimento em linha reta com velocidade constante. Considerando então o movimento ao longo do eixo *OX*, temos que:

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{9.10}$$

$$v_x = v_{0x} \tag{9.11}$$

$$a_x = 0. \tag{9.12}$$

Na vertical (eixo *Y*) a aceleração é a da gravidade $\vec{g}$, dirigida de cima para baixo, e é uma boa aproximação considerá-la com módulo constante $g = 9,8\, m/s^2$ nas proximidades da Terra. Sendo assim, as equações para essa direção são as de um movimento retilíneo com aceleração constante, ou seja,

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}g(t)^2 \tag{9.13}$$

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{9.14}$$

$$a_x = -g. \tag{9.15}$$

Observe atentamente, usando a Figura 9.6, que:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 sen\theta.$$

Desse modo, podemos expressar os módulos das componentes da posição e velocidade do projétil em função dos módulos das componentes da velocidade inicial e do ângulo θ, tal que:

$$x = x_0 + (v_0 cos\theta)t, \qquad (9.16)$$

$$v_x = v_0 cos\theta, \qquad (9.17)$$

$$y = y_0 + (v_0 sen\theta)t - \tfrac{1}{2} g(t)^2, \qquad (9.18)$$

$$v_y = v_0 sen\theta - gt. \qquad (9.19)$$

Se você determinar a equação da trajetória do corpo, pode se convencer de que ela é uma parábola. Para simplificar os cálculos, considere a origem do sistema de coordenadas coincidindo com o ponto de lançamento do projétil, de modo que $x_0 = y_0 = 0$. Da equação 9.10:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}.$$

Substituindo na equação 9.13 com $y_0 = 0$, obtém-se que:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2{v_{0x}}^2} x^2 \qquad (9.20)$$

$$y = tan\theta x - \frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\theta} x^2. \qquad (9.21)$$

Essa é uma função do tipo $y = y(x) = ax^2 + bx + c$ que representa uma parábola.

Observe que ao longo de toda a trajetória parabólica a aceleração é sempre vertical e dirigida de cima para baixo, diferente do movimento circular, em que a aceleração aponta sempre para o centro da trajetória.

Você pode observar que as equações que foram desenvolvidas para o eixo horizontal (direção *X*) dependem apenas de x_0, v_{0x} e, obviamente, do tempo *t*. Portanto, o movimento na direção *x* não depende de nenhuma componente da direção *y*. Do mesmo modo, o eixo vertical (direção *Y*) depende apenas de y_0, v_{0y}, *g* e *t*, não tendo nenhuma relação com o eixo horizontal, desde que a resistência do ar possa ser desprezada.

Dizemos que **o movimento na direção *X* é independente do movimento na direção *Y*** e utilizamos esse princípio para desenvolver as equações que descrevem o movimento de projéteis. Veja a Figura 9.7.

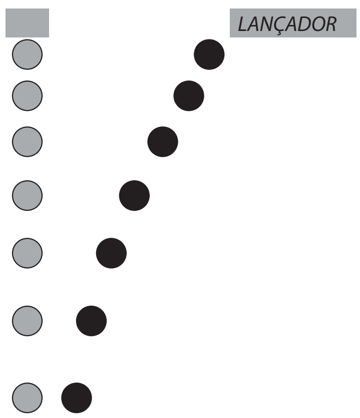


Figura 9.7 – Duas bolas são soltas simultaneamente de um mesmo ponto. A bola preta é lançada horizontalmente e por isso possui velocidade horizontal $\vec{v}_x$. O movimento na horizontal, no entanto, não altera o movimento na vertical e as duas bolas possuem mesmas componentes *y* da posição em quaisquer instantes de tempo, assinalados na figura.

Atenção: É importante que você **saiba aplicar** as equações do movimento unidimensional para cada eixo na análise do movimento de projéteis e recomendamos que você não apenas memorize as equações, mas que exercite bem o que desenvolvemos aqui.

Exemplo 9.2 – Alcance e altura de um projétil

Um jogador faz várias tentativas de chutes em uma bola buscando o maior alcance. Em todos os chutes a velocidade inicial da bola possui módulo $v_0 = 27,7\ m/s$ e faz um ângulo θ com o solo, como mostra a Figura 9.8:

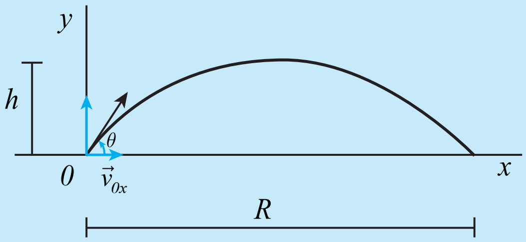


Figura 9.8 – Alcance e altura de um projétil.

a) Qual deve ser o ângulo θ_R para que a bola atinja o maior alcance R? Calcule R para esse ângulo.

b) Obtenha R para $\theta = 30^0$ e $\theta = 85^0$.

c) Para o ângulo θ_R, determine a altura atingida pela bola.

Solução

a) Considere a origem do sistema de coordenadas, de modo que no momento do lançamento $t_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$. A componente horizontal v_{0x} da velocidade é constante, de forma que para o eixo X pode-se utilizar a equação 9.16:

$$x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + (v_0 cos\theta)t$$

$$R = (v_0 cos\theta)t.$$

Observe que o tempo t é igual a duas vezes o tempo t_h necessário para que a bola atinja a altura máxima em que $y = h$, pois a parábola é simétrica em relação ao eixo X, de modo que escolhemos a origem do sistema de coordenadas. Utilizando então a equação 9.19, que descreve o movimento na direção y:

$$v_y = v_0 sen\theta - gt,$$

no momento em que a bola atinge a altura máxima $v_y = 0$ e então:

$$t_h = \frac{v_0 sen\theta}{g};$$

para R obtemos que:

$$R = (v_0 cos\theta)t$$

$$R = 2(v_0 cos\theta)t_h$$

$$R = \frac{2(v_0 cos\theta)(v_0 sen\theta)}{g}$$

$$R = \frac{v_0^{\ 2} sen2\theta}{g},$$

em que utilizamos a identidade trigonométrica $sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$.

Pode ser observado que o alcance R será máximo quando $sen2\theta = 1$, ou seja:

$$\theta_R = 45^0.$$

Para esse ângulo,

$$R = \frac{v_0^{\ 2}}{g} = \frac{(27,7\ m/s)^2}{9,80\ m/s^2}$$

$$R = 78,3\ m.$$

b) Para 30°,

$$R = \frac{(27,7\ m/s)^2 sen(2 \times 0,52\ rad)}{9,80\ m/s^2}$$

$$R = 67,8\ m.$$

Para 85°,

$$R = \frac{(27,7\ m/s)^2 sen(2 \times 1,48 rad)}{9,80\ m/s^2}$$

$$R = 13,6\ m\cdot$$

c) A altura máxima pode ser obtida pela equação 9.18:

$$y = y_0 + (v_0 sen\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$h = (v_0 sen\theta)t_h - \tfrac{1}{2}gt_h^{\ 2},$$

pois $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $y = h$ no ponto mais alto da trajetória. Já foi calculado t_h, de modo que a altura máxima é dada por:

$$h = (v_0 sen\theta)\frac{v_0 sen\theta}{g} - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sen\theta}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_0^{\ 2} sen^2\theta}{2g}.$$

Para o ângulo $\theta_R = 45^0$, temos:

$$h = \frac{(27,7\ m/s)^2 sen^2(0,78\ rad)}{2(9,80\ m/s^2)}$$

$$h = 21,3\ m.$$

ATIVIDADE 9.5

Um cano de abastecimento da Companhia de Saneamento se rompeu e um jato contínuo é arremessado a certa taxa de ejeção, com sua velocidade possuindo módulo $v_0 = 14,0\ m/s$. O jato faz um ângulo de 49° com o solo, como ilustra a Figura 9.9. No momento em que o jato alcança o ponto R, 50 litros de água estão no ar (fora do cano).

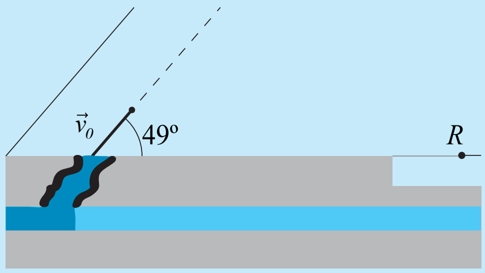


Figura 9.9 – Jato de água da atividade 9.5.

a) Determine a altura e o alcance atingidos pelo jato de água.

b) Qual é a taxa de ejeção de água?

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 9.1

a) Um ponto qualquer sobre a Terra realiza uma revolução em um dia, ou seja:

$$1h \leftrightarrow 3.600s$$

$$24h \leftrightarrow 8,64x10^4 s$$

$$T_T = 8,64x10^4 s.$$

Como a frequência é inversamente proporcional ao período:

$$f_T = \frac{1}{T}$$

$$f_T = 1,2 \times 10^{-5}\ Hz.$$

Para um CD:

$$T_{CD} = 0,5s.$$

E, portanto:

$$f_{CD} = 2,0Hz.$$

b) A velocidade angular da Terra ω_T é:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T_T} = 2\pi f_T$$

$$\omega_T = 2\pi rad\left(1,2\times10^{-5}\,Hz\right)$$

$$\omega_T = 7,3\times10^{-5}\,rad\,/\,s\,.$$

Observe que a velocidade angular tem unidade *rad/s*, enquanto a frequência é dada em s^{-1} ou *Hz*. A velocidade angular do CD é:

$$\omega_{CD} = 2\pi f_{CD}$$
$$\omega_{CD} = 1,3\times10\;rad\,/\,s.$$

Logo:

$$\frac{\omega_{CD}}{\omega_T} = \frac{1,3\times10\;rad\,/\,s}{7,3\times10^{-5}\,rad\,/\,s}$$

$$\omega_{CD} = 1,8\times10^5\,\omega_T.$$

A velocidade angular do CD é cerca de 180 mil vezes maior que a velocidade angular da Terra.

c) A aceleração radial no equador terrestre é dada pela equação:

$$a_c = \omega_T{}^2 R$$
$$a_c = \left(7,3\times10^{-5}\,rad\,/\,s\right)\left(6,38\times10^6\,m\right)$$
$$a_c = 3,4\times10^{-2}\,m\,/\,s^2.$$

A razão entre a_c e g é:

$$\frac{a_c}{g} = \frac{3,4\times10^{-2}\,m\,/\,s^2}{9,8\;m\,/\,s^2}$$

$$\frac{a_c}{g} = 3,5\times10^{-3}.$$

A aceleração radial é cerca de 3 mil vezes menor que a aceleração da gravidade.

Atividade 9.2

a) As velocidades angulares dos pontos *A* e *B* são iguais – eles descrevem um mesmo ângulo em um dado intervalo de tempo:

$$\omega_A = \omega_B = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_A = \frac{2\pi}{1,8s} = 3,5\ rad/s$$

$$\omega_A = \omega_B = 3,5\ rad/s.$$

Quando um ponto *A* completa uma volta, sua posição final coincide com sua posição inicial (o mesmo vale para o ponto *B*). Em outras palavras, o deslocamento desses pontos é nulo em uma volta completa e, portanto, o módulo do vetor velocidade média também é nulo, $v_m = 0$.

b) A velocidade de percurso v_p (ou velocidade escalar média) é igual à distância total percorrida pelo intervalo de tempo correspondente:

$$v_p = \frac{2\pi R}{\Delta t}$$

$$v_{pA} = \frac{2\pi R_A}{\Delta t} = \frac{2\pi(0,45\ m)}{1,8\ s}$$

$$v_{pA} = 1,6\ m/s$$

$$v_{pB} = \frac{2\pi R_B}{\Delta t} = \frac{2\pi(0,90\ m)}{1,8s}$$

$$v_{pB} = 3,2\ m/s.$$

Observe que a velocidade do ponto *B* é o dobro da velocidade do ponto *A*, por ele estar a uma distância duas vezes maior do eixo (ponto *O*).

Atividade 9.3

a) Como os discos estão fixos ao eixo, eles giram com a mesma velocidade angular do eixo, ou seja:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = 1.$$

b) A velocidade escalar em um ponto situado na borda do disco é:

$$v_A = \frac{2\pi R_A}{T_A}.$$

E do mesmo modo, para o disco *B*:

$$v_B = \frac{2\pi R_B}{T_B}.$$

Como $\omega_A = \omega_B$, sabemos que $T_A = T_B$. Logo:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{2\pi R_A}{2\pi R_B}\frac{T_B}{T_A}$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{R_A}{R_B}$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{3R_B}{R_B} = 3$$

$$v_A = 3v_B.$$

A velocidade de um ponto na borda do disco A é três vezes maior que a de um ponto situado na borda do disco B, pois R_A é três vezes maior que R_B e eles giram com a mesma velocidade angular. Lembre-se de que:

$$v_p = \omega R.$$

c) A aceleração dos discos só tem componente centrípeta, pois os discos giram uniformemente (ω constante):

$$a_{cA} = \omega^2 R_A$$

$$a_{cB} = \omega^2 R_B.$$

A aceleração de um ponto qualquer na borda do disco A é três vezes maior que o do disco B, pois o disco A possui um raio três vezes maior. Note que isso só é verdade quando os discos possuem a mesma velocidade angular.

Atividade 9.4

a) Sabemos que:

$$v_p = \omega R.$$

Se a correia não desliza, as velocidades lineares dos pontos P_1 e P_2 são iguais. Reflita um pouco para chegar à conclusão de que se a correia deslizar sobre as superfícies ("escorregar" ou "raspar" – o que geralmente não ocorre em correias de bicicletas, pois as catracas possuem dentes) as catracas poderão ter velocidades lineares diferentes (uma pode girar enquanto a outra fica parada, por exemplo). Então:

$$v_{pA} = v_{pB}$$

$$\frac{v_{p1}}{v_{p2}} = \frac{\omega_1 R_1}{\omega_2 R_2}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{8,00\,cm}{15,0\,cm}$$

$$\omega_1 = 0,533\omega_2 \text{ ou } \omega_2 = 1,88\omega_1.$$

A velocidade de P_2 é 1,88 vezes maior que a velocidade angular do ponto P_1.

Reflita um pouco e responda: com essa atividade você pode entender por que uma bicicleta possui catracas de raios diferentes?

b) Sabemos que $\omega_2 = 1,88\omega_1$, então:

$$\omega_2 = 1,88(65\ rpm)$$

$$\omega_2 = 122\ rpm,$$

c) Como:

$$\frac{1\ \text{rotação}}{min} = \frac{2\pi rad}{60\,s}$$

$$1\,rpm = \frac{\pi}{30\ s} = 0,105\ rad/s$$

$$\omega_2 = 12,8\ rad/s$$

$$\omega_1 = 6,81\ rad/s.$$

Atividade 9.5

a) Já foi calculado o alcance e a altura atingidos por um projétil no exemplo 9.2. Sabendo que:

$$h = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g} = \frac{(14,0\ m/s)^2 sen^2(0,86\ rad)}{2(9,80\ m/s^2)}$$

$$h = 5,70\ m$$

$$R = \frac{v_0^2 sen2\theta}{g} = \frac{(14,0\ m/s)^2 sen(1,71\ rad)}{9,80\ m/s}$$

$$R = 19,8\ m.$$

b) A taxa de ejeção corresponde à quantidade de água ejetada fora do cano por unidade de tempo. Sabemos que quando o jato alcança o ponto R, 50 litros de água estão no ar. Então, basta saber agora quanto tempo é necessário para que um elemento de volume de água alcance o ponto R. Como a trajetória descrita por esse elemento é uma parábola, o tempo será duas vezes igual ao tempo necessário para que ele alcance a altura máxima:

$$t = \frac{v_0 sen\theta}{g} = \frac{(14,0\ m/s)sen(0,86\ rad)}{9,80\ m/s^2} = 1,08\,s.$$

Logo, o elemento de volume gasta 2,16s para sair do cano e alcançar o ponto R. A taxa de ejeção E é, portanto:

$$E = \frac{50\ litros}{2,16s} = 23,1\ litros/s.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Em um treinamento, um astronauta senta-se em um brinquedo que consiste de um braço ligado a uma cadeira que gira em torno de um eixo que passa pela extremidade oposta à cadeira. Se o braço possui *5,9 m*, qual deve ser o período do movimento para que a aceleração do astronauta seja de 2,5*g*? E de 6,0*g*?

E1. Você está se divertindo em uma roda-gigante que possui um raio de 15,0 *m* e que gira com velocidade angular constante. A sua velocidade linear é de 8,50 *m/s*.

a) Determine o período de movimento da roda-gigante.

b) Qual é sua aceleração radial quando você está no ponto mais alto e no mais baixo da trajetória?

c) Qual é sua aceleração quando você está no ponto mais alto e no mais baixo da trajetória?

E1. Considere que na roda-gigante do exercício 9.2, em algum momento, você esteja passando pelo ponto mais alto da trajetória, quando sua velocidade linear é 2,00 *m/s*, e ganhando velocidade a uma taxa constante de 0,600 m/s^2.

a) Qual é a sua aceleração nesse ponto?

b) Faça um esboço mostrando a velocidade e a aceleração nesse ponto.

E2. Considere que a Terra gire em torno do Sol em exatamente 365 dias e em uma órbita circular. A distância da Terra ao Sol é $1,50 \times 10^8\,km$.

a) Determine a aceleração centrípeta da Terra devido a seu movimento em torno do Sol. Esse valor é quantas vezes maior (ou menor) que o valor de *g*?

b) Calcule o valor da velocidade orbital da Terra.

E1. A hélice da pá de um ventilador possui 48,0 *cm* desde o eixo central até sua extremidade. Se o conjunto de pás giram com 165 *rpm* (revoluções por minuto),

a) qual é o período do movimento?

b) qual é a velocidade linear de um ponto situado na extremidade da lâmina? E de um ponto situado a $^2/_3$ da lâmina?

c) qual é aceleração radial de um ponto na extremidade da pá? E de um ponto situado a $^2/_3$ da lâmina?

E1. Ronaldo chuta uma bola do alto de sua laje a 3,81 *m* da extremidade. A laje está a uma altura de 3,65 *m* do solo. A velocidade inicial da bola é $\vec{v}_0 = (15,1\,m/s)\hat{i} + (7,04\,m/s)\hat{j}$.

a) Calcule o tempo que a bola permanece no ar.

b) Calcule a altura máxima atingida pela bola em relação ao solo.

c) Determine o alcance da bola em relação à extremidade da laje.

E2. Um ovo rola sobre uma mesa e cai do topo com velocidade horizontal de 0,150 *m/s*. O ovo se quebra após 0,423 *s* de ter deixado o topo da mesa.

a) Encontre a altura da mesa.

b) Qual a distância horizontal em relação ao "pé" da mesa da qual o ovo caiu?

c) Determine a velocidade do ovo imediatamente antes de atingir o solo.

d) Qual é a aceleração do ovo?

E3. Em um parque de diversões, para ganhar um pequeno urso de pelúcia para seu filho, você deve arremessar uma bola de basquete em uma cesta que está a uma altura de 1,80 *m* acima das suas mãos e a uma distância de 3,00 *m* do ponto de lançamento.

a) Qual deve ser a velocidade de arremesso (lembre-se de que é módulo, direção e sentido) para que você consiga ganhar o urso?

b) Determine as componentes da velocidade no momento em que a bola acerta a cesta.

c) Faça esboços dos gráficos de x-t, y-t, a-t, v_x-t e v_y-t.

E4. Garrincha chuta uma bola com velocidade inicial, tal que a componente horizontal é igual a 12 *m/s* e a componente vertical é igual a 19 *m/s*.

a) Qual é o tempo que a bola permanece no ar?

b) Encontre a altura atingida pela bola.

c) Qual a distância horizontal percorrida pela bola?

d) Determine a velocidade da bola imediatamente antes de atingir o solo.

e) Qual é a aceleração da bola?

AULA 10

Velocidade relativa

Objetivo

- Definir velocidade relativa para movimentos em duas e em três dimensões.

10.1 VELOCIDADE RELATIVA EM DUAS E EM TRÊS DIMENSÕES

Suponha que você esteja viajando em um ônibus. Então você corre em sentido lateral para a janela oposta no momento em que o ônibus passa em frente a um posto policial da rodovia.

Considere o sistema de referência P do posto policial e o referencial O do ônibus. Dentro do ônibus você é representado pelo ponto V, como ilustrado de forma esquemática na Figura 10.1.

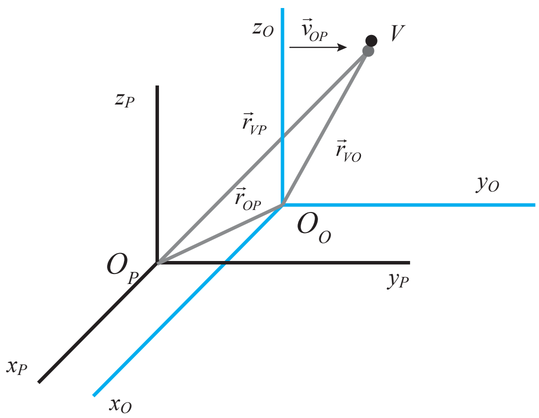


Figura 10.1 – Uma pessoa no referencial O (x_O, y_O, z_O) é representado pelo ponto V e sua posição neste referencial é dada pelo vetor $\vec{r}_{VO}$. A posição da pessoa no referencial P (x_P, y_P, z_P) é descrita pelo vetor $\vec{r}_{VP}$. A posição do referencial O em relação ao referencial P é dada pelo vetor $\vec{r}_{OP}$.

Essa figura mostra o seu vetor posição $\vec{r}_{VO}$ em relação ao referencial do ônibus, o qual possui velocidade $\vec{v}_{OP}$ em relação ao posto policial (velocidade do referencial O em relação ao referencial P) e o seu vetor $\vec{r}_{VP}$ em relação ao posto (posição de V em relação ao referencial P).

A figura também mostra o vetor posição $\vec{r}_{OP}$ do referencial O (do ônibus) em relação ao referencial P (do posto).

Observe que, independente do movimento do ponto *V*, sempre temos:

$$\vec{r}_{VP} = \vec{r}_{OP} + \vec{r}_{VO}. \tag{10.1}$$

Derivando a equação 10.1 em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{VP}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{OP}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{VO})$$

$$\vec{v}_{VP} = \vec{v}_{VO} + \vec{v}_{OP}. \tag{10.2}$$

A sua velocidade (do ponto *V*), medida no referencial *P*, depende da sua velocidade no referencial *O* mais a velocidade do próprio ponto *O* em relação ao referencial *P*.

Se derivarmos a equação 10.2 em relação ao tempo, obteremos sua aceleração (do ponto *V*) em relação ao referencial *P*:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{VP}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{OP}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{VO})$$

$$\vec{a}_{VP} = \vec{a}_{VO} + \vec{a}_{OP}. \tag{10.3}$$

Ou seja, sua aceleração (do ponto *V*), medida no referencial *P*, é igual à sua aceleração no referencial *O* mais a aceleração do próprio ponto *O* em relação ao referencial *P*.

Veja agora um exemplo para que essas ideias fiquem ainda mais claras.

Exemplo 10.1

Um barco faz a travessia de uma margem de um rio à outra. A sua velocidade em relação à água é de $\vec{v}_b = (30,0 km/h)\hat{j}$. A correnteza possui velocidade $\vec{v}_c = (15,0 km/h)\hat{i}$, conforme ilustra a Figura 10.2. Determine a velocidade do barco em relação à margem.

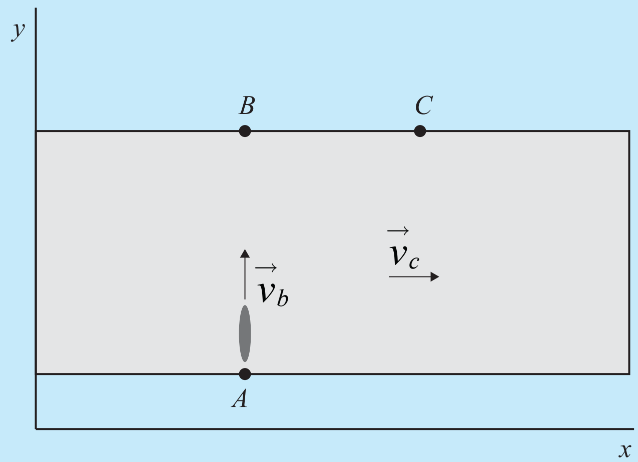


Figura 10.2 – Barco atravessando o rio de uma margem à outra.

A Figura 10.3a mostra um esquema dos dois sistemas de referência. O referencial nas margens é representado pelo índice *m* e o referencial da correnteza, que se move em relação às margens, é representado pelo índice *c*.

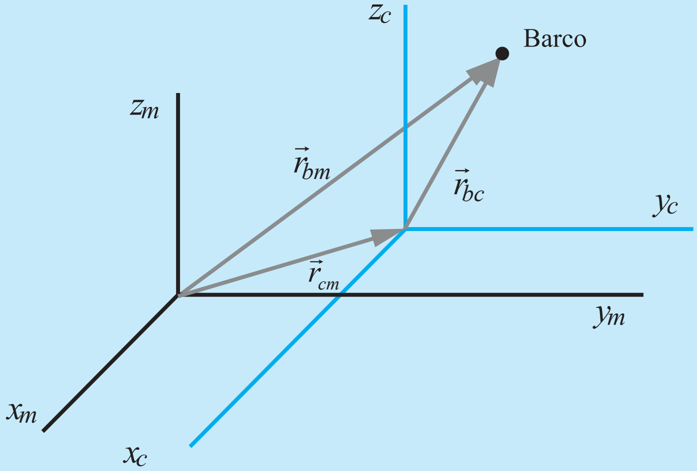


Figura 10.3(a) – Esquema dos sistemas de referência do exemplo 10.1.

Observe que:

$$\vec{r}_{bm} = \vec{r}_{bc} + \vec{r}_{cm},$$

em que $\vec{r}_{bm}$ é a posição do barco em relação à margem, $\vec{r}_{bc}$ é a posição do barco em relação à correnteza e $\vec{r}_{cm}$ é a posição da correnteza em relação à margem. Portanto, derivando a equação acima, temos:

$$\vec{v}_{bm} = \vec{v}_{bc} + \vec{v}_{cm},$$

em que $\vec{v}_{bm}$ é a velocidade do barco em relação à margem, $\vec{v}_{bc}$ é a velocidade do barco em relação à correnteza e $\vec{v}_{cm}$ é a velocidade da correnteza em relação à margem. Veja a Figura 10.3b. Temos então:

$$\vec{v}_{bm} = (15,0\ km/h)\hat{i} + (30,0\ km/h)\hat{j}.$$

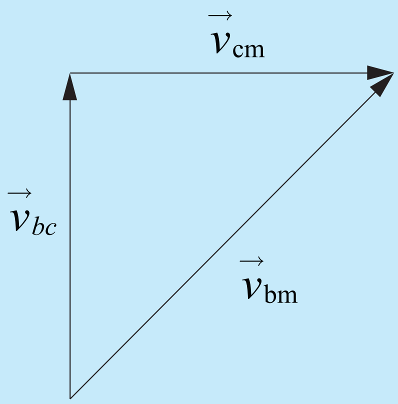


Figura 10.3(b) – Vetores velocidade no exemplo 10.1.

ATIVIDADE 10.1

Dois barcos idênticos e com mesma potência estão em um rio cuja correnteza possui velocidade $\vec{v}_c = (5,0\ m/s)\hat{i}$, como mostra a Figura 10.4. O barco dois tem componentes v_{2x} = 2,0*m/s* e v_{2y}= 3,0*m/s* em relação às águas. Determine a velocidade relativa do barco dois em relação ao barco um.

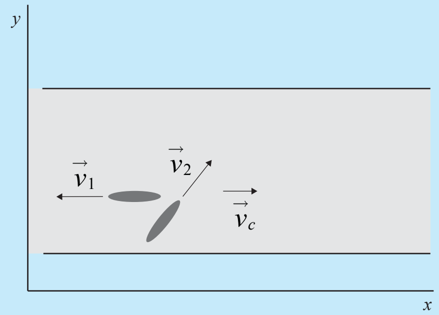


Figura 10.4 – Velocidade dos barcos em relação à correnteza na atividade 10.1.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 10.1

O barco dois possui componentes v_{2x} = 2,0 *m/s* e v_{2y} = 3,0 *m/s*, tal que sua velocidade é dada por:

$$\vec{v}_2 = (2,0\ m/s)\hat{i} + (3,0\ m/s)\hat{j}.$$

Como os barcos possuem a mesma potência, o módulo de suas velocidades são iguais:

$$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{(2,0\ m/s)^2 + (3,0\ m/s)^2} = 3,6\ m/s$$

$$v_1 = 3,6\ m/s.$$

Podemos ver pela figura que v_1 só possui componente horizontal v_x, logo:

$$\vec{v}_1 = -(3,6\ m/s)\hat{i}.$$

O sinal negativo se deve ao fato de o barco estar se movendo no sentido contrário ao do eixo *X* crescente:

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_{21} = -(3,6\ m/s)\hat{i} + (2,0\ m/s)\hat{i} + (3,0\ m/s)\hat{j}$$

$$\vec{v}_{21} = (-3,6\ m/s + 2,0\ m/s)\hat{i} + (3,0\ m/s)\hat{j}$$

$$\vec{v}_{21} = (-1,6\ m/s)\hat{i} + (3,0\ m/s)\hat{j}.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Considere o movimento do barco descrito no exemplo 10.1. Qual deve ser a inclinação do barco para que ele saia do ponto *A* e vá até o ponto *B*?

E2. Alaor está voltando de um congresso em um ônibus A, que passa em determinado momento em uma rodovia estadual com velocidade constante $\vec{v}_A = (56\ km/h)\hat{i}$. Alaor percebe que está sendo ultrapassado por outro ônibus B, que possui velocidade $\vec{v}_B = (65\ km/h)\hat{i}$. Dentro do ônibus B há um professor entediado jogando uma moeda verticalmente para cima com velocidade $\vec{v}_{moeda} = (1{,}00m/s)\hat{j}$. Tanto Alaor quanto um peão que está sentado no acostamento da rodovia veem o professor jogando a moeda para cima.

a) Qual a velocidade do ônibus A em relação ao ônibus B? E a do ônibus B em relação ao ônibus A?

b) Qual é a velocidade da moeda em relação ao peão quando ela sai da mão do professor? E em relação a Alaor?

c) Qual a trajetória da moeda vista pelos três observadores?

E3. Considere os dois ônibus do exercício E2. Em certo trecho o ônibus B segue por uma saída à esquerda que faz um ângulo de 30° com a rodovia principal, conforme mostra a Figura 10.5. O professor no ônibus B ainda joga a moeda verticalmente para cima com velocidade $\vec{v}_{moeda} = (1{,}00m/s)\hat{j}$ e o ônibus B tem agora velocidade $\vec{v}_B = (34{,}6Km/h)\hat{i} + (20{,}0Km/h)\hat{j}$. A velocidade do ônibus ainda é igual a $\vec{v}_A = (56Km/h)\hat{i}$.

a) Qual é a velocidade do ônibus B em relação a Alaor?

b) Determine a velocidade da moeda em relação ao peão quando ela sai da mão do professor?

c) Qual é a velocidade da moeda em relação a Alaor quando ela sai da mão do professor?

d) Qual é a velocidade da moeda para os três observadores quando ela está no ponto mais alto de sua trajetória?

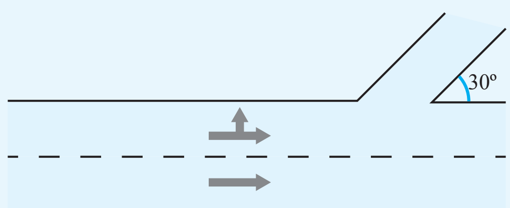


Figura 10.5

E4. Um avião faz uma viagem entre duas cidades A e B, com velocidade de 33,0 *m/s*. O vento sopra de leste para oeste, sendo o módulo da velocidade do vento 5,55 *m/s*. Sabe-se que as duas cidades estão separadas por uma distância de 830 *km*.

a) Qual é velocidade do avião em relação à Terra?

b) Em que direção o avião deve se orientar para fazer o percurso exato de norte a sul, como se não houvesse ventos?

c) Determine o tempo de viagem para os itens **a** e **b**.

PROBLEMAS DA UNIDADE 3

P1. Um pequeno helicóptero de brinquedo decola verticalmente, sendo as componentes de sua aceleração dadas pelas equações:

$$a_x = qt^2$$

$$a_y = b - ct,$$

em que $q = 0{,}023\ m/s^2$, $b = 0{,}08\ m/s^2$ e $c = 0{,}011\ m/s^3$. No instante de tempo inicial a partícula está na origem e sua velocidade é:

$$\vec{v}_o = (1{,}10\ m/s)\hat{i} + (1{,}50\ m/s)\hat{j}.$$

a) Encontre uma expressão para a posição e a velocidade em função do tempo.

b) Qual é a altura máxima atingida pelo helicóptero?

c) Qual o deslocamento horizontal máximo atingido pelo helicóptero?

d) Faça um esboço da trajetória.

P2. Um avião monomotor está sobrevoando uma fazenda e seu movimento se dá no espaço com velocidade:

$$\vec{v}(t) = (2{,}50\ m/s)\,t^2\,\hat{i} + (16{,}0\ m/s)\,t\,\hat{j}.$$

a) Determine a posição e a aceleração do avião em função do tempo.

b) Em que instante depois de $t = 0$ o avião está novamente na origem do sistema de coordenadas?

P3. Nas Olimpíadas, um arremessador de discos lança um disco com velocidade inicial $v_o = \sqrt{20\ hg}$, formando um ângulo de 41,2° com o solo que pode ser considerado plano na região. A altura h corresponde ao ponto de onde é arremessado o disco em relação ao solo. Despreze a resistência do ar.

a) Determine o alcance atingido pelo disco.

b) Calcule a altura máxima que o disco atinge.

c) Faça um gráfico da velocidade horizontal e da velocidade vertical do disco em função do tempo.

P4. Uma pequena bola de gude é arremessada com velocidade v_o do alto de ,uma mesa de altura h em relação a um grande pátio. Sabe-se que a velocidade inicial forma um ângulo θ_o com a horizontal.

a) Encontre uma expressão para o alcance e a altura atingidos pela bola.

b) Compare o seu resultado com as equações encontradas para o alcance e a altura no exemplo 9.2. Se $h = 0$ o seu resultado é igual ao obtido no exemplo 9.2?

c) Suponha que $v_o = 2{,}0\, m/s$ e $h = 1{,}1\, m$. Faça um gráfico de alcance em função do ângulo θ.

P5. Um carrossel gira com velocidade angular ω constante. As coordenadas de um ponto qualquer sobre o carrossel são dadas pelas equações:

$$x(t) = Rcos(\omega t) \text{ e } y(t) = Rsen(\omega t),$$

em que *R* é a distância do ponto em relação à origem do sistema e das coordenadas (que nesse caso é o eixo do carrossel).

a) Mostre que um ponto fixo sobre o carrossel se move sobre um círculo de raio constante *R*.

b) Determine o módulo do vetor velocidade.

c) Qual é a direção do vetor aceleração? Mostre que seu módulo é igual a $\omega^2 R$.

d) Qual a relação entre o módulo da aceleração e a velocidade linear de um ponto fixo do carrossel?

e) Mostre que o vetor velocidade é sempre perpendicular ao vetor posição.

P6. Em filmes de ação, para que uma criança seja salva, ela deve ser arremessada de um carro A, que se move em uma rodovia retilínea com velocidade constante de 80 *km/h*, para outro carro B, que se move no mesmo sentido com velocidade de 82 *km/h*. O carro B está 7,6 *m* a frente do carro A. A criança é arremessada com um ângulo de 49º com a horizontal.

a) Qual deve ser a velocidade do arremesso para que ela consiga chegar ao outro carro?

b) Com que velocidade a criança chega ao carro B?

c) Qual é a velocidade inicial da criança arremessada em relação ao carro A? E em relação ao carro B?

P7. Um ônibus faz uma pequena viagem entre duas cidades e em certo trecho, quando sua velocidade é constante e igual a 60 *km/h*, começa a chover. A chuva não é intensa e ocorre sem ventos. Os pingos das gotas formam um ângulo de 38º com a direção vertical nas janelas do ônibus.

a) Calcule a componente horizontal da velocidade da gota de chuva em relação ao ônibus e em relação à Terra.

b) Determine o módulo da velocidade da gota em relação à Terra e em relação ao ônibus.

P8. Um barco faz a travessia de um grande rio da direita para a esquerda (de uma margem à outra) com uma velocidade de 10,0 *m/s* em relação às águas. Depois de três minutos o barco se deslocou 15,0 *m* na direção horizontal (de uma margem a outra) e 7,60 *m* na direção vertical (abaixo do ponto onde ele iniciou seu movimento).

a) Determine a velocidade da correnteza.

b) Se a velocidade da correnteza fosse de 8,50 *m/s*, em que direção o barco deveria se orientar para se mover na horizontal?

UNIDADE 4
Leis de Newton

Nas unidades anteriores foi feito um estudo da cinemática, no qual o movimento é analisado sem se preocupar com as suas causas. Nesta unidade será iniciado o estudo da dinâmica, ramo da física que trata da relação entre o movimento e suas causas. Os princípios da dinâmica são sumarizados pelas três **leis de Newton do movimento**. Cada uma dessas três leis será discutida, em detalhes, nesta unidade.

Resumidamente: de acordo com a primeira lei, se a força resultante sobre um corpo for igual a zero seu movimento não se altera; pela segunda lei a força resultante sobre um corpo está relacionada com a aceleração por ele adquirida; a terceira lei mostra como se relacionam as forças que um corpo exerce sobre o outro.

AULA 11

Primeira lei de Newton

Objetivos

- Diferenciar os conceitos de massa e força;
- Identificar a existência de forças sobre um corpo;
- Calcular a força resultante;
- Explicar o princípio da inércia e relacionar suas aplicações em situações cotidianas.

11.1 MECÂNICA CLÁSSICA

O movimento dos corpos é descrito pelas leis de Newton, introduzidas por Isaac Newton em 1686 no seu livro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (*Princípios matemáticos da filosofia natural*). Com elas, Newton estabeleceu o método de solução de problemas da dinâmica, levando em consideração que o movimento de uma partícula é influenciado pela natureza e distribuição dos corpos próximos a ela (os quais constituem a sua vizinhança).

Ele introduziu o conceito de força para relacionar as interações da partícula e sua vizinhança com as mudanças que ocorrem no estado de movimento da partícula (indicado por sua aceleração). Para descrever o fato de que partículas diferentes, na mesma situação e mesma vizinhança, possuem comportamentos diferentes, Newton introduziu o conceito de massa.

O método de Newton, que constitui o que chamamos hoje de Mecânica Clássica, apresenta algumas características que devemos ter em mente ao usá-lo. Primeiramente, na descrição dos movimentos puramente de translação os corpos são tratados como partículas, porque essas, não tendo dimensão, não apresentam movimento de rotação. Quando os movimentos envolverem a rotação, a distribuição de massa do corpo deverá ser considerada. Em segundo lugar, a Mecânica Clássica se aplica somente aos casos em que as velocidades das partículas sejam muito menores que a da luz $c = 3x10^8\ m/s$ (em geral, $v < 0{,}1c$). Essas limitações do método, entretanto, não são muito sérias quando lidamos com os tipos de movimento a que estamos habituados na nossa vida diária; daí, então, a grande importância e sucesso da Mecânica Clássica para a descrição de fenômenos macroscópicos.

SAIBA MAIS

Isaac Newton (1642-1727)

Cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista e filósofo natural. Inventou o cálculo integral e diferencial, estendeu o trabalho de Galileu e formulou as três leis fundamentais do movimento. Isaac Newton é o autor da obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, publicada em 1687, que descreve a **lei da gravitação universal e as leis do movimento**.

Sua teoria da gravitação universal permitiu demonstrar as leis de Kepler do movimento planetário. Formulou a teoria da natureza da luz e mostrou com prismas que a luz branca é composta de todas as cores do arco-íris. Depois de seu livro ter adquirido ampla aceitação, Newton reconheceu as contribuições de Galileu e seus antecessores declarando: "Se eu tenho enxergado mais longe que os outros, é porque estou apoiado nos ombros de gigantes."

11.2 PRIMEIRA LEI DE NEWTON

O primeiro estudo sistemático das causas do movimento e suas variações foi feito por Aristóteles, que dividiu o movimento em duas classes: natural e violento. O movimento natural podia ser para cima ou para baixo, no caso de objetos na Terra, ou circular para objetos celestes. O movimento violento resultava de forças que empurravam ou puxavam. Para Aristóteles, uma vez que o objeto se encontrava em seu lugar natural, ele não mais se moveria a não ser que fosse obrigado por uma força. O estado normal dos corpos, na Terra, seria o de repouso.

Um dos problemas com as hipóteses de Aristóteles foi que ele não considerou a existência de um meio resistivo, que existe em qualquer movimento na Terra (ar ou água). Devido a este fato, era essencial na teoria de Aristóteles a presença de um empurrão ou puxão para manter o movimento. Foi Galileu Galilei, o mais importante cientista do século dezessete, quem afirmou que se não existisse interferência sobre um objeto móvel, este deveria mover-se em linha reta para sempre, não sendo necessários empurrões, puxões ou qualquer tipo de força para isto.

A primeira lei de Newton, também denominada Princípio da Inércia de Galileu, pode ser enunciada da seguinte forma:

Todo objeto permanece em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja obrigado a mudar aquele estado por ação de forças exercidas sobre ele.

A primeira lei contém implicitamente algumas asserções: a primeira, de acordo com Galileu, que o estado natural de movimento é o repouso ou o movimento retilíneo e uniforme; a segunda, é que ele resiste à mudança desse estado, que só pode ser modificado sob ação de uma força. Uma força é, então, qualquer agente da vizinhança sobre a partícula, capaz de modificar seu estado de repouso ou movimento retilíneo e uniforme.

Assim, uma formulação alternativa para a primeira lei de Newton poderia ser: "Se nenhuma força age sobre um corpo sempre se poderá encontrar um referencial no qual este corpo não possua aceleração."

O que a primeira lei nos diz também é que se não há outros corpos próximos à partícula (isto é, não há forças atuando sobre ela) é possível encontrar uma família de sistemas de referência nos quais a partícula não está acelerada. Esses referenciais são denominados referenciais inerciais. Em geral, a aceleração de uma partícula depende do referencial no qual ela é medida, por isso, é comum dizer que a primeira lei serve para introduzir e definir os sistemas de referência. Qualquer sistema de referência que se desloque com velocidade constante em relação a um sistema de coordenadas inercial também é um sistema de coordenadas inercial.

11.3 O CONCEITO DE MASSA

A resistência à mudança do estado de repouso ou movimento retilíneo e uniforme de uma partícula é denominada **inércia**. Portanto, quanto maior for a inércia de uma partícula, menor deve ser a variação de sua velocidade (e, consequentemente, a sua aceleração).

A medida da inércia de uma partícula é feita através da sua **massa inercial** (ou, simplesmente, **massa**). Sua definição operacional pode ser feita da seguinte maneira: consideremos duas partículas A e B e apliquemos sobre elas uma mesma força ($\vec{F}$) constante (como fazê-lo não importa no momento; basta sabermos por agora que isso é possível).

Sejam a_A e a_B as acelerações dessas partículas resultantes da aplicação da força. Como a inércia mede a resistência à variação da velocidade da partícula, podemos escrever que:

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{a_A}{a_B}.$$

A experiência nos mostra que se aplicarmos sobre as mesmas massas uma força $\vec{F}'$ diferente de $\vec{F}$, a razão das acelerações de A e B é a mesma que a obtida sob ação da força $\vec{F}$:

$$\frac{a'_A}{a'_B} = \frac{a_A}{a_B};$$

e, portanto, a razão das massas de duas partículas é independente da força comum usada.

Se tomarmos a partícula A como padrão, atribuindo a ela a massa unitária, podemos escrever que a massa da partícula B, relativamente à da A, é:

$$m_B = \frac{a_A}{a_B};$$

isto é, definimos a massa da partícula como a razão inversa das acelerações adquiridas por ela e uma partícula padrão quando sujeitas à ação de uma mesma força.

Como você já viu na Unidade 1, o padrão de massa adotado internacionalmente é o quilograma padrão, que é um cilindro de platina conservado cuidadosamente no

Bureau de Pesos e Medidas de Paris. Assim, quando falamos que a massa de uma partícula é m, queremos dizer que a massa dessa partícula é um múltiplo m do quilograma padrão.

A experiência nos mostra também que, se unirmos duas massas m_1 e m_2, elas se comportam como se fossem uma única massa $m = m_1 + m_2$. Em outras palavras, a **massa é uma grandeza escalar.**

Exemplo 11.1

Você viaja de carro com seu pai, sem estar devidamente preso ao cinto de segurança. O banco do carro é muito liso e você escorrega muito facilmente. Quando seu pai acelera o carro, você se movimenta para trás; quando ele freia bruscamente, você se move para frente. Quando seu pai faz uma curva você é jogado para fora da curva. Enfim, você tem a nítida impressão que está sendo "empurrado" ou "puxado", como se a primeira lei de Newton estivesse sendo violada. A sua velocidade está variando, mas não existe nenhuma força resultante atuando sobre você. Como se explicam estes fatos?

Solução

O problema aqui é que você está tentando aplicar a primeira lei de Newton, algumas vezes conhecida como lei da **inércia**, estando em um sistema de referência não inercial. Já que sua velocidade (no referencial do carro) está mudando, você tem a sensação que existe uma força que resulta no "empurrão" ou "puxão" sobre você. Mas, lembre-se, a primeira lei só vale para referenciais inerciais, e o carro estando em aceleração não é um sistema de referência inercial. Portanto a primeira lei de Newton não se aplica.

A Terra, nessa situação, pode ser considerada um bom referencial inercial (mesmo não sendo propriamente, por causa da rotação, translação etc.). Vamos analisar a situação nesse novo referencial. Agora sim, pela primeira lei de Newton, quando o carro sofre uma mudança de velocidade (aceleração) você tende a continuar o movimento que estava fazendo em relação ao referencial fixo (a Terra): assim, tende a ficar parado quando seu pai acelera, tende a continuar indo para frente quando seu pai freia o carro e tende a continuar se movendo em linha reta quando seu pai faz uma curva. Nenhuma força resultante atuou sobre você e a primeira lei de Newton não foi violada.

11.4 O CONCEITO DE FORÇA

Veja agora como estabelecer uma definição operacional para força. Na linguagem comum, exercer uma força sobre qualquer corpo nos faz lembrar imediatamente do ato de puxar ou empurrar. Quando empurramos um carro sem gasolina, exercemos uma força sobre este carro. Um cavalo exerce uma força para puxar a carroça, uma viga exerce uma força quando sustenta uma construção.

As forças podem ser de contato, como quando puxamos ou empurramos algum corpo; ou de longo alcance, que atuam mesmo quando os corpos estão afastados como no caso de dois ímãs que, mesmo próximos um do outro (sem estar em contato), podem se repelir ou se atrair.

Uma maneira de definir força consiste em fazê-lo através da aceleração que ela causa nos corpos. Tome então um quilograma padrão e o coloque sobre uma mesa horizontal sem atrito. Prenda uma mola a ele; a experiência nos mostra que, quando o corpo é puxado pela extremidade livre da mola, a aceleração que ele adquire é proporcional ao aumento de comprimento da mola. Então, através de várias medidas podemos determinar o comprimento da mola quando a aceleração do corpo for de 1 m/s^2.

Dessa forma, podemos estabelecer a unidade de força como a que produz no quilograma padrão, a unidade de aceleração. Se a força é dobrada (dobrando a variação de comprimento da mola), a experiência mostra que a aceleração do corpo dobra; consequentemente, a força que atua sobre ele dobra de forma linear. Com isso obtemos um modo operacional de estabelecer uma medida para a força.

ATIVIDADE 11.1 – NATUREZA VETORIAL DA FORÇA

Faça o seguinte experimento:

a) Empurre seu livro, conforme indica a Figura 11.1a, com "empurrões" de diferentes intensidades. Compare o que aconteceu em ambos os casos.

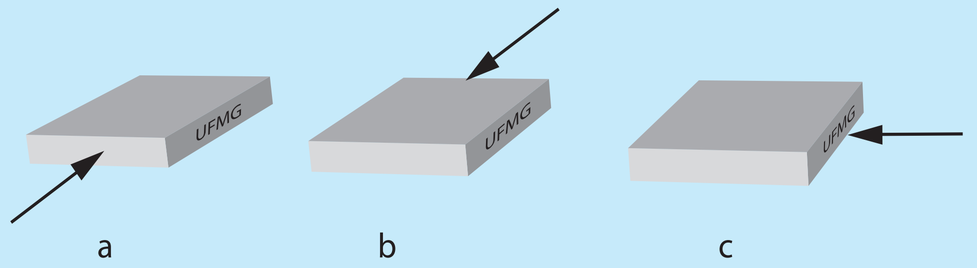


Figura 11.1

b) Repita agora o mesmo procedimento, desta vez conforme indica a Figura 11.1b. Compare o que aconteceu em ambos os casos.

c) Qual é a diferença entre o que acontece no item **a** e no item **b**?

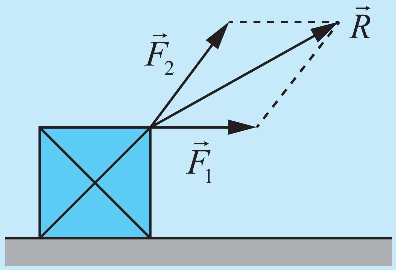
d) Por último, empurre seu livro conforme indica a Figura 11.1c.

e) Com base em seus resultados, quais são as suas conclusões acerca da natureza da força?

Como pode perceber, a experiência mostra também que para descrever a força que atua sobre um corpo é necessário conhecer sua direção, sentido e módulo (valor ou intensidade). Ou seja, **força é uma grandeza vetorial**.

11.5 FORÇA RESULTANTE

Quando mais de uma força atua sobre um corpo, por exemplo, duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ (Figura 11.2), o movimento do corpo é o mesmo que o efeito produzido pela ação de uma força denominada **força resultante** $\vec{F}_R$ ou $\vec{R}$, que é obtida pela soma vetorial das duas forças.



$$\vec{R} = \vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Figura 11.2 – Resultante de forças agindo sobre um corpo.

De modo geral, dizemos que

a força resultante é a soma vertical de todas as forças que atuam sobre um determinado corpo.

Desse modo, a força resultante é dada pela equação 11.1. Ou seja:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \qquad (11.1)$$

O símbolo Σ indica a soma (somatório) de todas as forças que atuam no corpo.

ATIVIDADE 11.2 – FORÇA RESULTANTE

Faça o seguinte experimento: puxe (ou empurre) seu livro usando as duas mãos de maneira que sejam feitas duas forças com ângulos diferentes entre elas e observe para qual lado o caderno se move. Ele sempre se moverá para o lado da força resultante?

Execute as situações sugeridas abaixo:

1. Duas forças perpendiculares:
   a) puxe o caderno para a esquerda e para você;
   b) puxe o caderno para a direita e para você.
2. Duas forças paralelas:
   a) puxe o caderno com uma mão para a esquerda e com a outra o empurre para a direita (mantenha as duas mãos na mesma linha de ação – uma em frente a outra);
   b) tente variar a força de cada mão e observe o que acontece.

11.5.1 Decomposição de forças

Uma força $\vec{F}$ pode ser decomposta em suas componentes cartesianas $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$, que quando somadas vetorialmente resultam na força original $\vec{F}$ (Figura 11.3). Essa decomposição de uma força ou cálculo da força resultante é feita usando as relações de um triângulo retângulo:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\vec{F}_x = F cos\theta$$

$$\vec{F}_y = F sen\theta$$

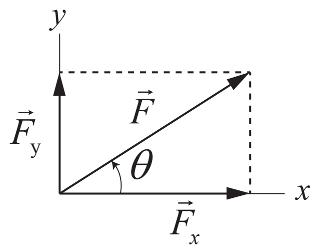


Figura 11.3 – Decomposição de forças.

Esse método de decomposição simplifica o cálculo da resultante quando mais de duas forças atuam sobre um corpo, pois é muito mais simples somar vetores que são paralelos ou perpendiculares.

Exemplo 11.2

Na Figura 11.4 são representadas três forças horizontais, $|\vec{F}_1| = 75N$, $|\vec{F}_2| = 100\ N$, $|\vec{F}_3| = 50N$, que atuam sobre um mesmo ponto situado na origem. Encontre os módulos das componentes x e y da força resultante. Determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante.

Solução

Este é basicamente um problema de soma vetorial que pode ser resolvido pelo método das componentes.

Os ângulos entre as forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ com o eixo $+Ox$ são $\theta_1 = 30º$, $\theta_2 = 180º - 45º = 135º$, $\theta_3 = 180º + 50º = 230º$.

Os módulos das componentes x e y das forças são:

$$F_{1x} = (75\ N)\ cos30º = 65\ N,$$
$$F_{1y} = (75\ N)\ sen30º = 38\ N,$$
$$F_{2x} = (100\ N)\ cos135º = -71\ N,$$
$$F_{2y} = (100\ N)\ sen135º = 71\ N,$$
$$F_{3x} = (50\ N)\ cos230º = -32\ N,$$
$$F_{3y} = (50\ N)\ sen230º = -38\ N.$$

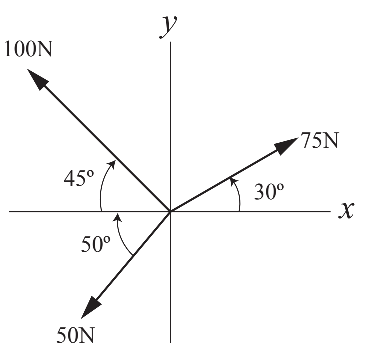


Figura 11.4 – Cálculo da força resultante.

Os módulos das componentes da força resultante $\vec{R} = \Sigma\vec{F}$ são:

$$R_x = \Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 65\ N + (-71\ N) + (-32\ N) = -38\ N,$$
$$R_y = \Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 38\ N + 71\ N + (-38\ N) = 71\ N.$$

Como R_x é negativa e R_y é positiva, a força resultante $\vec{R} = \Sigma\vec{F}$ está no segundo quadrante. Seu módulo é:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-38\ N)^2 + (71\ N)^2} = 81\ N.$$

O ângulo entre a força resultante e o eixo $+Ox$ é:

$$tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \theta = arctan\frac{R_y}{R_x} = arctan\left(\frac{71\ N}{-38\ N}\right) = arctan(-1{,}87) = -1{,}07$$

As duas soluções possíveis são $\theta = -62^o$ ou $\theta = -62^o + 180^o = 118^o$. Como a força resultante está no segundo quadrante, o ângulo correto é $\theta = 118^o$.

Equilíbrio: quando não existe nenhuma força atuando sobre uma partícula ou quando a resultante das forças que atuam sobre ela é nula, dizemos que a mesma está em equilíbrio. No equilíbrio, o corpo ou está em repouso ou está se movimentando com velocidade constante. No primeiro caso o equilíbrio é estático e no segundo dinâmico.

ATIVIDADE 11.3 – DECOMPOSIÇÃO DE FORÇAS E CÁLCULO DE RESULTANTE

Duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ atuam sobre um corpo conforme indica a Figura 11.5. Cada força tem módulo de 300 N e faz um ângulo de 30º com a horizontal. Calcule a força resultante sobre o corpo.

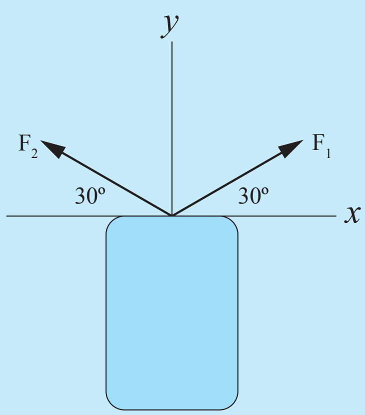


Figura 11.5 – Duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ atuando sobre o corpo da atividade 11.2.

ATIVIDADE 11.3 – SEGURANÇA NO TRÂNSITO

Como o cinto de segurança e o encosto de cabeça do banco de um carro ajudam a prevenir as lesões no pescoço e na coluna cervical quando o mesmo sofre uma colisão pela traseira?

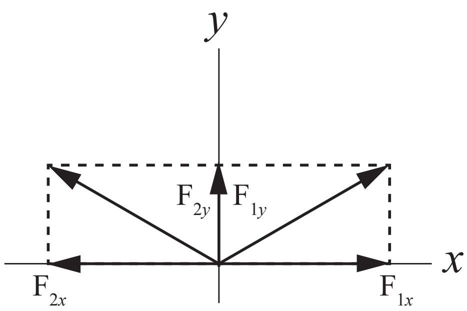
RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 11.1 – Natureza vetorial da força

Ele sempre se moverá para o lado da força resultante.

Atividade 11.2 – Força resultante

Para encontrar a força resultante, as forças devem ser decompostas em componentes ortogonais x e y, conforme mostra a figura abaixo:



Observe que as componentes F_{1Y} e F_{2Y} estão no sentido positivo do eixo y, enquanto que as componentes F_{1X} e F_{2X} estão, respectivamente, no sentido negativo e positivo do eixo x.

$F_{1X} = 300\ cos(30°) = 260\ N$ $\qquad$ $F_{2X} = 300\ cos(120°) = -260\ N$

$F_{1Y} = F_{2Y} = 300\ sen(30°) = 150\ N$

A resultante em cada eixo é:

$$R_{1X} = F_{1X} + F_{2X} = 260\ N + (-260\ N) = 0\ N$$

$$R_{1Y} = F_{1Y} + F_{2Y} = 150\ N + 150\ N = 300\ N$$

Dessa maneira, a força resultante será $\vec{R}$ **= 300 *N* no sentido positivo do eixo *Oy***.

Atividade 11.3 – Segurança no trânsito

Se o carro estiver em equilíbrio (estático ou dinâmico), você também estará. Ao sofrer a colisão, uma força atua sobre o carro, mudando a velocidade dele e não a sua (inicialmente). Dessa forma, seu corpo inicialmente continua seu movimento para frente. O cinto de segurança impede que você seja lançado contra o para-brisa. Num segundo momento do choque seu corpo volta para trás; e o encosto previne fraturas na sua coluna cervical.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Responda as questões abaixo, ou explique as situações utilizando a primeira lei de Newton.

E1. É possível um corpo estar em equilíbrio quando somente uma força atua sobre ele?

E2. Se você atira uma moeda diretamente para cima, enquanto está andando de trem, onde ela cai, se o movimento do trem é uniforme sobre os trilhos retos? E quando o trem diminui a sua velocidade enquanto a moeda está no ar? E quando o trem está fazendo uma curva?

E3. Jogue uma bola de boliche numa pista e você notará que ela move-se cada vez mais lentamente com o decorrer do tempo. Isso viola a lei de Newton da inércia? Justifique a sua resposta.

E4. Como a terra gira uma vez a cada 24 horas, a parede do lado oeste da sua casa move com relação a você a uma velocidade linear que provavelmente é maior do que 1.000 *km/h* (a velocidade exata depende da latitude geográfica do local). Quando fica de frente para a parede você está sendo levado junto com a mesma velocidade, por isso você não nota. Mas quando você pula para cima, com seus pés tendo perdido contato com o solo, por que essa parede altamente veloz não investe sobre você?

AULA 12

Segunda lei de Newton

Objetivos

- Entender os conceitos de força e massa;
- Diferenciar massa e peso de um corpo;
- Aplicar a segunda lei de Newton em situações cotidianas.

12.1 SEGUNDA LEI DE NEWTON

ATIVIDADE 12.1 – EFEITO DE UMA FORÇA SOBRE MASSAS DIFERENTES

Faça o seguinte experimento:

Empurre uma cadeira de escritório vazia. Com a mesma força, aproximadamente, empurre a cadeira com uma pessoa assentada sobre ela. Em qual dessas situações foi mais fácil mudar a velocidade ao longo do tempo (isto é, acelerar)?

Para provocar a mesma aceleração em ambos os casos, em qual situação você precisa fazer mais força?

Tendo em vista as suas observações, estabeleça uma relação entre as grandezas físicas massa, força e aceleração. Explique as suposições envolvidas.

A segunda lei estabelece a relação entre força e aceleração. Ela afirma que:

A aceleração adquirida por uma partícula sob ação de uma força é diretamente proporcional à força e inversamente proporcional à massa da partícula.

Então, se a força que atua na partícula de massa m é $\vec{F}$ e se a aceleração adquirida pela partícula for $\vec{a}$, tem-se que:

$$\vec{a} \propto \frac{\vec{F}}{m}.$$

Lembre-se de que uma grandeza proporcional a outras duas é proporcional ao produto delas. A equação anterior pode ser transformada em uma igualdade se for introduzida uma constante de proporcionalidade k:

$$\vec{F} = k\, m\, \vec{a}.$$

Nessa equação há quatro variáveis, mas até agora temos unidades para apenas duas delas: a massa e a aceleração. Para que a equação seja fisicamente aceitável, é preciso definir uma unidade para a força e determinar experimentalmente o valor de k (para que a equação fique dimensionalmente correta), ou, alternativamente, definir um valor para a constante k e determinar a unidade de força que satisfaça a equação.

O caminho escolhido por Newton e seus sucessores foi o de escolher k adimensional e tomar o valor de $k = 1$. A equação acima pode então ser escrita como:

$$\vec{F} = m\, \vec{a}. \tag{12.1}$$

Assim, a unidade de força passou a ser a força que produz em uma massa unitária a aceleração unitária. Como a massa é medida em quilogramas (kg) no SI e a aceleração em metros por segundo ao quadrado (m/s^2), podemos definir o **Newton** (***N***), a unidade de medida de força, como:

$$1N = 1kg \cdot m / s^2. \tag{12.2}$$

Quando atuam várias forças sobre a partícula, a força $\vec{F}$ passa a ser a força resultante do sistema. Desse modo, podemos escrever que:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \tag{12.3}$$

Note que a primeira lei está contida na segunda, pois se $\vec{F} = 0$, $\vec{a} = 0$ e a partícula está em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme. **Note também que a equação** $\vec{F} = m\,\vec{a}$ **é uma equação vetorial**. Para resolvê-la, você tem que escrevê-la em termos das componentes da força e da aceleração em um sistema de coordenadas.

Da mesma forma que na primeira lei de Newton, a segunda lei só é válida em referenciais inerciais. **Você consegue explicar o porquê?**

Um corpo é acelerado quando uma força resultante externa atua sobre ele. Nesse caso o vetor força resultante é igual ao produto da massa pelo vetor aceleração do corpo. Portanto, o vetor aceleração terá a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante.

Exemplo 12.1

Uma caixa com massa de 45 kg está em repouso sobre um lago congelado, que é uma superfície horizontal sem atrito. Se um pescador aplica uma força horizontal de módulo 56 N sobre a caixa, qual é a aceleração produzida?

Solução

Os primeiros passos da resolução são escolher o sistema de coordenadas e identificar todas as forças que atuam sobre o corpo em questão. Escolha o eixo $+Ox$ no mesmo sentido da força e o eixo $+Oy$ apontando para cima.

As forças que atuam sobre a caixa são: a força horizontal $\vec{F}_p$ exercida pelo pescador; o peso $\vec{P}$ da caixa; e a força de baixo para cima $\vec{N}$ exercida pela superfície sobre a caixa. A aceleração é dada pela segunda lei de Newton. Não existe nenhuma aceleração vertical, portanto a soma das forças verticais deve ser igual a zero. Existe somente uma força horizontal, logo

$$\Sigma F_x = F_p = ma_x$$

$$a_x = \frac{F_p}{m} = \frac{56\ N}{45\ kg} = 1{,}24\ m/s^2.$$

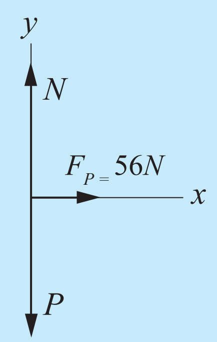


Figura 12.1 – Diagrama de forças para o exemplo 12.1.

A aceleração possui a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante.

Exemplo 12.2

Em um comercial de determinada marca de cerveja, um garçom empurra uma lata de cerveja de massa igual a 0,35 *kg* ao longo de um balcão liso e horizontal. Quando a lata deixa sua mão, ela possui velocidade de 1,9 *m/s*. Enquanto ela desliza, sua velocidade diminui devido ao atrito horizontal constante exercido pela superfície do balcão sobre a lata. Ela percorre uma distância de 1,3 *m* até parar. Determine o módulo, a direção e o sentido da força de atrito que atua na lata.

Solução

Escolha o eixo $+Ox$ no mesmo sentido em que a lata desliza, sendo $x_0 = 0\ m$ o ponto onde ela deixa a mão do garçom. As forças que atuam sobre a lata são indicadas na Figura 12.2.

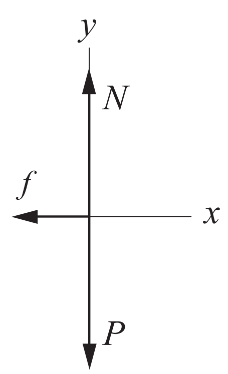


Figura 12.2 – Diagrama de forças para o exemplo 12.2.

A força de resistência do balcão $\vec{f}$ tem seu sentido oposto ao da velocidade, pois atua diminuindo a velocidade inicial da lata.

Como a força de atrito é constante, a aceleração também é constante, assim a equação para aceleração constante pode ser usada. Ou seja:

$$v^2 = v_0^{\ 2} + 2a(x - x_0),$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^{\ 2}}{2(x - x_0)} = \frac{(0\ m/s)^2 - (1{,}9\ m/s)^2}{2(1{,}3\ m - 0\ m)} = -1{,}4\ m/s^2.$$

O sinal negativo indica que o sentido da aceleração é para a esquerda. A lata está diminuindo sua velocidade, que possui sentido contrário ao da aceleração. O módulo da força resultante na direção de x é $-f$, a componente x da força de resistência. Assim sendo,

$$\Sigma F_x = -f = ma = (0{,}35\ kg)(-1{,}4\ m/s^2) = -0{,}5\ N.$$

O sinal negativo indica que o sentido da força é para a esquerda, como era esperado.

ATIVIDADE 12.2 – CÁLCULO DE FORÇA RESULTANTE

Um trator é usado para puxar um tronco de madeira de massa igual a 500 *kg* através de uma força de tração horizontal de 200 *N* que é aplicada em um cabo de aço. Se o tronco se mover com velocidade constante, qual é o valor da força de resistência do solo sobre o tronco?

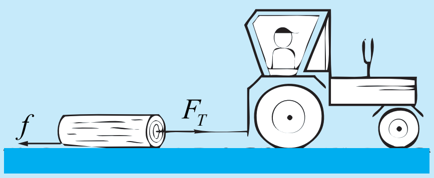


Figura 12.3 – As forças exercidas sobre o tronco da atividade 12.2.

ATIVIDADE 12.3 – CÁLCULO DE FORÇA SOBRE UM CORPO

Considere que o tronco da Atividade 12.2 agora se mova com aceleração constante de 1 m/s^2. Qual é o valor da força F_T que o trator puxa o tronco? Considere que a força de resistência do solo f tenha o mesmo valor calculado na Atividade 12.2.

12.2 A FORÇA PESO

O peso de um corpo é o efeito da atração gravitacional sobre sua massa. No caso da Terra, lembre-se de que um corpo cai com aceleração de 9,8 m/s^2, logo o módulo da força sobre um corpo de massa igual a 1 *kg* será de 9,8 *N*.

É importante não confundir a massa de um corpo, que caracteriza a inércia, com o peso, que é um efeito da força de atração gravitacional da Terra ou qualquer outro corpo que tenha massa grande o suficiente para que essa atração seja percebida.

Na Terra é difícil lançar uma grande pedra horizontalmente por causa de sua massa (inércia) e é difícil levantá-la porque seu peso é grande. Na Lua, onde a aceleração da gravidade é menor, a dificuldade do lançamento horizontal seria a mesma da Terra, pois a massa da pedra não mudou, mas levantá-la seria bem mais fácil, pois seu peso seria menor.

O peso de um corpo é calculado pela expressão:

$$\vec{P} = m\vec{g}, \tag{12.4}$$

na qual $\vec{g}$ representa a aceleração da gravidade e m a massa.

Foi dito acima que usaremos $g = 9{,}8\ m/s^2$, mas esse é um valor médio para a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Na verdade o valor de g varia de um ponto para outro da superfície da Terra desde 9,78 m/s^2 até 9,82 m/s^2. Isso ocorre porque a Terra não é uma esfera perfeita e também apresenta rotação em torno de seu eixo. Na tabela abaixo estão listados os valores da aceleração da gravidade para alguns locais:

Tabela 12.1 – Valores da aceleração da gravidade

Local	Polo Norte	Rio de Janeiro	Recife	Porto Alegre	Buenos Aires	Belo Horizonte	São Paulo	Salvador	Polo Sul
$g\ (m/s^2)$	9,832	9,788	9,781	9,789	9,797	9,785	9,788	9,782	9,814

Fonte: POZZANI; TALAVERA (2002).

Exemplo 12.3

Um astronauta, com todos os equipamentos, pesa, na Terra, 1.176 N. Qual é o seu peso na Lua, cuja gravidade é um sexto da gravidade na Terra? E qual é a sua massa?

Solução

O peso de um corpo é obtido pela equação $P = mg$, na Terra $g = 9{,}8\ m/s^2$. Resolvendo essa equação, obtemos:

$$1176\text{N} = m \times 9{,}8 m/s^2$$

$$m = 120 kg.$$

Essa é a massa do astronauta, quer ele esteja na Terra ou na Lua, uma vez que a massa não depende do local. Então, o seu peso na Lua seria

$$P = mg = 120kg \times \frac{9{,}8 m/s^2}{6} = 196\ N \cdot$$

ATIVIDADE 12.4 – DEFINIÇÃO DE QUILOGRAMA-FORÇA E USO DE BALANÇAS

Outra unidade de força é o quilograma-força (*kgf*), que equivale à força com que a Terra atrai a massa de 1 *kg*. Temos que 1 *kgf* = 9,8*N*. Usando essa informação responda à seguinte pergunta: quando você sobe em uma balança, ela lhe informa sua massa ou seu peso?

ATIVIDADE 12.5 – CÁLCULO DO PESO E FORÇA RESULTANTE SOBRE UM ELEVADOR

Um elevador de carga tem uma massa total (elevador mais a carga) de 700 *kg*. Se esse elevador sobe com uma aceleração de 1,5 m/s^2, determine (considere g = 9,78 m/s^2):

a) A força resultante sobre o elevador.

b) O peso do elevador.

c) A força (tensão) no cabo que puxa o elevador.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 12.1 – Efeito de uma força sobre massas diferentes

Executando as atividades, como proposto, notará que com a mesma força é mais fácil acelerar a cadeira vazia. Ou seja, quanto maior a massa (maior inércia), mais difícil será mudar o estado de movimento e, portanto, menor a aceleração que pode ser imposta pela mesma força. Assim, a aceleração é inversamente proporcional à massa do corpo, para uma mesma dada força. No segundo caso, para uma mesma aceleração, será preciso fazer mais força no corpo de maior massa. Assim, a força é proporcional à massa do corpo, para uma mesma dada aceleração. Assim, $m \propto \frac{1}{\vec{a}}$ e $m \propto \vec{F}$, tal que $m \propto \frac{\vec{F}}{\vec{a}}$, ou, reescrevendo a relação, $\vec{F} \propto m\vec{a}$.

Atividade 12.2 – Cálculo de força resultante

Como o movimento do tronco acontece na horizontal e na vertical $\sum \vec{F}_y = 0$, iremos analisar somente as forças nessa direção. A informação importante deste exercício é que o carro se move com velocidade constante, **ele está em equilíbrio**. Nesta situação, $\sum \vec{F}_y = 0$ e considerando a horizontal como sendo o eixo x e o sentido positivo para a direita, temos:

$$F_T - f = 0$$

$$f = F_T$$

$$f = 200\ N.$$

Como $\vec{f}$ é uma grandeza vetorial, ela vale 200 N, apontando da direita para a esquerda.

Atividade 12.3 – Cálculo de força sobre um corpo

Novamente analise somente as forças na direção horizontal. Como o tronco agora se move com uma aceleração diferente de zero, a força resultante é diferente de zero. Nessa situação, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, considerando a horizontal como sendo o eixo x e o sentido positivo para a direita temos:

$$F - f = ma$$

$$F = ma + f$$

$$F = 500 + 200 = 700\ N.$$

Note que apesar de ser puxado com uma força de 700 N, a resultante vale 500 N, pois 200 N são gastos para vencer a força de resistência do solo.

Atividade 12.4 – Definição de quilograma-força e uso de balanças

O que provoca a leitura da balança é o seu peso sobre a plataforma que move um conjunto de molas e alavancas. Se você subir em uma balança na Terra, anotar seu peso, e depois conseguir levá-la para a Lua, verá que a leitura será diferente. Isto porque seu peso (que depende da aceleração da gravidade) irá mudar, mas sua massa não. Dessa maneira você pode concluir que **a balança fornece uma leitura de uma força que é o peso**.

Agora, as balanças na Terra são calibradas (ajustadas) para indicar o peso em *kgf*, que nos fornece a massa do corpo que está sobre ela.

Atividade 12.5 – Cálculo do peso e força resultante sobre um elevador

O elevador se move com uma aceleração diferente de zero e a força resultante é diferente de zero. Nessa situação, o elevador se move na vertical, e o sentido positivo será considerado para cima.

a) $F_R = ma$ $\quad$ $F_R = 1{,}5 \times 700$ $\quad$ $F_R = 1050\ N$

b) $P = mg$ $\quad$ $P = 700 \times 9{,}78$ $\quad$ $P = 6860\ N$

c) $F_R = T - P$, nesta equação T representa a tensão no cabo do elevador. Logo,

$$1050 = T - 6860$$

$$T = 7910\ N.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Se uma força resultante horizontal de 129 *N* é aplicada a uma pessoa de massa de 63 *kg* em repouso na beira de um lago, qual é a aceleração produzida?

E2. Uma caixa de 6 *kg* encontra-se inicialmente em repouso em uma superfície horizontal sem atrito. Ela é empurrada com uma força horizontal constante de 4,2 *N*.

a) Qual é a aceleração da caixa?

b) Durante quanto tempo a força deve agir sobre a caixa de modo que ela atinja a velocidade de 5,5 *m/s*?

c) Que distância a caixa percorreu durante esse tempo?

E3. Um carro viajando a uma velocidade de 52 *km/h* colide com um poste. Um passageiro no interior do carro desloca-se por uma distância de 67 *cm* (em relação à estrada) enquanto é amparado por um dispositivo constituído por um saco inflável (*air bag*). Qual é a força que atua sobre a parte superior do torso do passageiro? Suponha que a massa do passageiro seja 80 *kg* e que 2/3 dessa massa participem da interação com o saco inflável.

E4. Uma bala de revólver com massa de 1,7 × 10-3 *kg* movendo-se a 505 *m/s* colide com o tronco de uma árvore e percorre 7 *cm* antes de parar. Admitindo que a aceleração da bala seja constante, determine a força exercida pelo tronco da árvore sobre ele.

E5. Um super-herói lança uma rocha de 3.000 *N* sobre seu adversário. Qual é a força horizontal que esse super-herói deve aplicar sobre a rocha para que ela se desloque com uma aceleração horizontal igual a 10 m/s^2?

E6. Na superfície da Lua, a aceleração da gravidade é apenas 1/6 da gravidade na Terra. Uma melancia pesa 40 *N* na superfície da Terra.

a) Qual é a sua massa na superfície da Terra?

b) Qual é a sua massa e o seu peso na superfície da Lua?

E7. Uma certa pessoa pesa 700 *N* em um ponto onde a aceleração da gravidade é 9,8 m/s^2.

a) Quais são o peso e a massa da pessoa em um ponto onde a aceleração da gravidade é 4,7 m/s^2?

b) Quais são o peso e a massa da pessoa se ela for movimentada para um ponto no espaço onde a força gravitacional é nula?

AULA 13

Terceira lei de Newton

Objetivos

- Identificar as forças de ação e reação;
- Entender o significado da força de reação normal;
- Relacionar suas aplicações com situações cotidianas.

13.1 ENTENDENDO A TERCEIRA LEI DE NEWTON

Uma força é um aspecto da interação entre duas ou mais partículas. Portanto, as forças que atuam sobre determinada partícula são devidas às outras partículas que formam a sua vizinhança.

Veja a Figura 13.1, que mostra um livro de massa m em repouso sobre uma mesa horizontal. Se não houvesse a mesa, o livro cairia verticalmente com uma aceleração constante $\vec{g}$. Então, de acordo com a segunda lei de Newton, a Terra exerce sobre ele uma força vertical constante $\vec{F}_{TL} = \vec{P} = m\vec{g}$, ou seja, o seu peso (força da Terra sobre o livro). Da mesma forma, o livro exerce sobre a Terra uma força vertical constante apontada para cima $\vec{F}_{LT}$ (força do livro sobre a Terra).

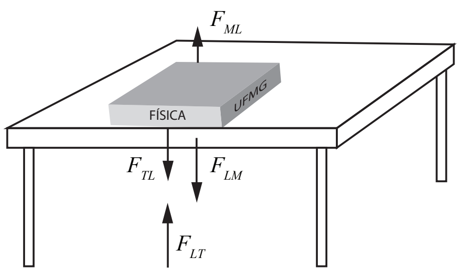


Figura 13.1 – Pares de ação/reação, conforme a terceira lei de Newton.

Mas, como o livro está sobre a mesa, ele exerce uma força **sobre** a mesa $\vec{F}_{LM}$, que tem a direção vertical, sentido para baixo e mesmo módulo de seu peso. A mesa reage aplicando sobre o livro uma força $\vec{F}_{ML}$ na direção vertical, sentido para cima e mesmo módulo. Essa força é denominada **reação normal** da superfície da mesa sobre o livro (veja uma discussão mais detalhada na próxima seção).

Essas observações são sintetizadas na **terceira lei de Newton**:

Quando um determinado corpo exerce uma força sobre outro corpo (uma ação), este último exerce uma força de mesmo módulo, mesma direção, mas sentido contrário sobre o primeiro (uma reação).

Essas forças são referenciadas como um par ação/reação e nunca se anulam, pois atuam em corpos diferentes.

Ou seja, $\vec{F}_{ML}$ e $\vec{F}_{LM}$ formam um par ação/reação, e, portanto, $\vec{F}_{ML}$ **não** anula $\vec{F}_{LM}$. Da mesma forma que $\vec{F}_{TL}$ também **não** anula $\vec{F}_{LT}$. Sem dúvida, os módulos são iguais, a direção é a mesma, o sentido é contrário, mas nunca se anulam porque atuam em corpos diferentes. Portanto, nunca some duas forças de um par ação/reação, sob o risco de achar que elas produzem uma força resultante nula.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Além das características citadas, **o par ação/reação deve estar na mesma linha de ação**. Lembre-se de que duas forças de sentidos contrários não estão necessariamente alinhadas; elas podem estar deslocadas. Pense na seguinte situação: duas canetas sobre uma mesa, uma com a ponta para direita e outra com a ponta para a esquerda, mas uma acima da outra. Os sentidos são contrários, mas elas não estão na mesma linha. Veja a Figura 13.2.

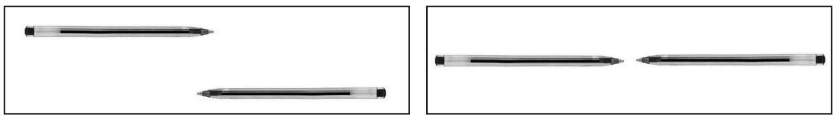


Figura 13.2 – As forças de ação e reação têm o mesmo módulo e orientações opostas. No lado esquerdo da figura as forças, representadas pelas canetas, não estão na mesma linha de ação, enquanto que no lado direito sim. Pela terceira lei de Newton o par ação/reação deve estar na mesma linha de ação.

De acordo com a segunda lei de Newton, sobre o livro atuam o seu peso $\vec{F}_{TL} = m\,\vec{g}$ e a reação normal da mesa $\vec{F}_{ML}$. Repare que só foram levadas em conta as forças que atuam sobre o livro. Pela terceira lei essas forças têm módulos iguais, de modo que a resultante de forças que atuam **sobre** o livro é nula, e, portanto, a aceleração do livro também será nula. Se o livro estiver inicialmente em repouso, ele permanecerá em repouso, não podendo se deslocar verticalmente.

Exemplo 13.1

Sua mão segura uma corda fina colocada na vertical, quando seu amigo prende um pequeno bloco à extremidade livre da corda. Quando o bloco é solto você sente a ação de uma força sobre sua mão. Analise a situação em termos da terceira lei de Newton.

Solução

A Figura 13.3a ilustra a situação. Sobre o bloco atua seu peso $\vec{P}$, que é vertical. Sob ação da força peso, o bloco tende a cair e puxa a corda com uma força $\vec{F}_{bc}$, que está **aplicada na corda e tem sentido para baixo**. A corda, de acordo com a terceira lei de Newton, exerce sobre o bloco uma força $\vec{F}_{cb}$, aplicada no bloco e com sentido para cima. A corda, por sua vez, exerce sobre a sua mão (e aplicada na sua mão) uma força $\vec{F}_{cm}$ para baixo, enquanto sua mão exerce sobre a corda (aplicada na corda) a força $\vec{F}_{mc}$.

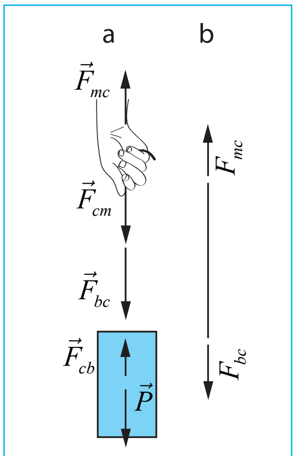


Figura 13.3 – Forças de ação e reação pelo sistema que envolve o bloco, a corda e a mão.

Se o bloco fica suspenso, em repouso, a segunda lei nos diz que a resultante de forças que atua sobre ele é zero, ou seja, $\sum \vec{F}_{bloco} = 0$, tal que:

$$\vec{P} + \vec{F}_{cb} = 0.$$

Escolhendo um eixo de coordenadas com sentido positivo para cima, temos:

$$-P + F_{cb} = 0 \qquad \rightarrow \qquad P = F_{cb}.$$

Da mesma forma, a corda estando em repouso $\sum \vec{F}_{corda} = 0$, temos que:

$$\vec{F}_{bc} + \vec{F}_{mc} = 0.$$

Veja a Figura 13.3b. Com o mesmo sistema de eixos, temos que:

$$-F_{bc} + F_{mc} = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_{bc} = F_{mc}.$$

Quando a corda está sujeita a duas forças iguais aplicadas a suas extremidades, dizemos que ela **está sob tensão**. Sobre sua mão atua a força $\vec{F}_{cm}$. Como indicado pelas equações acima, o peso do bloco é totalmente transmitido para sua mão quando o sistema bloco + corda está em repouso.

Imagine agora que o bloco do exemplo 13.1 seja colocado sobre uma superfície horizontal bem polida (isto é, que não ofereça resistência ao movimento do bloco), como mostrado na Figura 13.4. Como fica a análise em termos da terceira lei de Newton?

Suponha que a corda seja puxada de modo que o sistema bloco + corda tenha aceleração constante $\vec{a}$. As forças que atuam **na direção horizontal** na corda e no bloco são mostradas na Figura 13.4a, no caso do bloco e da corda estarem em repouso. $\vec{F}_{mc}$ é a força que a mão exerce sobre a corda e está aplicada na corda; sua reação, a força que a corda exerce sobre a mão, é $\vec{F}_{cm}$. Da mesma forma, $\vec{F}_{cb}$ é a força que a corda exerce sobre o bloco e está aplicada no bloco; $\vec{F}_{bc}$ é a força que o bloco exerce sobre a corda e está aplicada na corda. Como o sistema bloco + corda está em repouso, é fácil ver que todas as forças são iguais, pois não há aceleração.

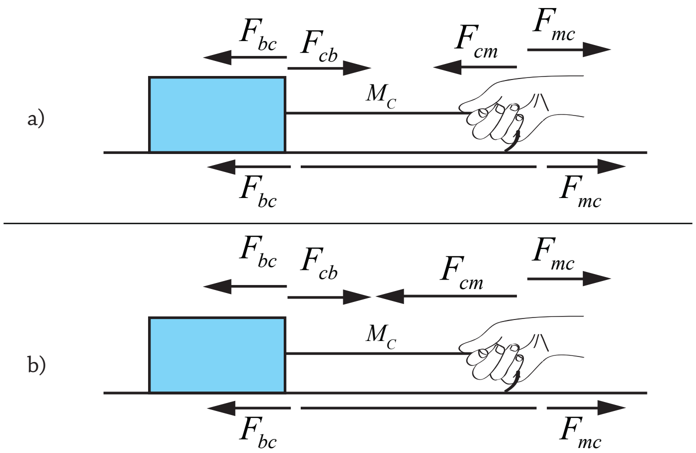


Figura 13.4 – Bloco sendo puxado por uma corda através de uma superfície polida. (a) O bloco e a corda se encontram em repouso. (b) O sistema bloco + corda se move com aceleração constante.

Observe com cuidado a diferença entre as forças $\vec{F}_{mc}$ e $\vec{F}_{bc}$ que indica a força resultante, em ambas as situações.

A Figura 13.4b mostra o caso em que o sistema se move com aceleração constante para a direita. Nesse caso ainda temos os pares ação/reação $\vec{F}_{mc} = \vec{F}_{cm}$ e $\vec{F}_{bc} = \vec{F}_{cb}$. Porém, há agora sobre o bloco uma força resultante $\vec{F}_{cb}$ (note que $\vec{F}_{bc}$ está aplicada na corda!). Portanto, de acordo com a segunda lei de Newton, devemos ter, escolhendo um eixo *Ox* com sentido positivo para a direita e projetando as forças nesse eixo:

$$\vec{F}_{cb} = m_b \vec{a},$$

em que m_b é a massa do bloco.

Da mesma forma, sobre a corda estão aplicadas duas forças e pela segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_{mc} - \vec{F}_{bc} = m_c \vec{a},$$

em que m_c é a massa da corda. Se a corda não estica nem encolhe, a aceleração do bloco é a mesma da corda. Essa equação mostra que as forças nas extremidades da corda são diferentes e, agora, $\vec{F}_{mc} > \vec{F}_{bc}$. Portanto, podemos dizer que a corda está sob tensão. Somente quando a massa da corda for desprezível em relação à massa do bloco, ou quando o sistema bloco + corda estiver em repouso ou movimento retilíneo e uniforme, as forças nas extremidades da corda serão iguais.

Na discussão anterior não se pode dizer quem exerce a força e quem sofre a ação dessa força. Pela terceira lei, nenhuma força pode ser identificada como ação ou reação; ambas devem ser tratadas igualmente. Por exemplo, quando o pneu do carro empurra o asfalto, este simultaneamente empurra o pneu. Este par de forças constitui uma única interação. Se uma for considerada a ação a outra será a reação, e vice-versa.

ATIVIDADE 13.1

Pense em outras situações como as citadas anteriormente e identifique as forças que formam o par ação/reação. (Você não encontrará resposta comentada para esta atividade.)

O que acontece quando corpos de massas muito diferentes interagem? Por que a força parece ser muito maior sobre um corpo do que sobre o outro, apesar de serem iguais?

Para responder a essa pergunta, você deve se lembrar da segunda lei de Newton: a aceleração que o corpo irá adquirir depende de sua massa. O corpo de menor massa terá uma aceleração muito maior que o de massa maior. A força de atração gravitacional é um exemplo desse fato: a atração da Terra sobre você é mútua. Você atrai a Terra com a mesma força que ela te atrai. Mas a massa (inércia) da Terra é muito maior que a sua, sendo praticamente impossível perceber o efeito desta força sobre ela.

ATIVIDADE 13.2 – CÁLCULO DA ACELERAÇÃO DA TERRA

Uma pessoa que possui uma massa de 100 *kg* é atraída pela Terra por uma força de 980 *N*, que é o seu peso. Pela terceira lei de Newton, a Terra é atraída pela pessoa com uma força de mesma intensidade, direção e sentido contrário. Calcule a aceleração da Terra devido à ação dessa força.

13.2 FORÇA DE REAÇÃO NORMAL

Sempre que um corpo está apoiado sobre uma superfície, ele exerce uma força sobre essa superfície, que aqui será identificada como na superfície horizontal é a ação. De acordo com a terceira lei de Newton, a superfície também exerce uma força sobre o corpo, que neste caso é a reação. Como a reação é perpendicular à superfície de contato, ela é denominada reação normal ou simplesmente normal (em matemática, um vetor perpendicular a uma superfície é denominado vetor normal).

Sempre que um corpo estiver apoiado sobre uma superfície horizontal seu peso irá comprimir a superfície, logo a reação normal será igual ao peso do corpo (Figura 13.1).

Atenção! A normal só é igual ao peso quando o corpo estiver apoiado sobre uma superfície horizontal e sem a ação de outras forças. Veja a Figura 13.5.

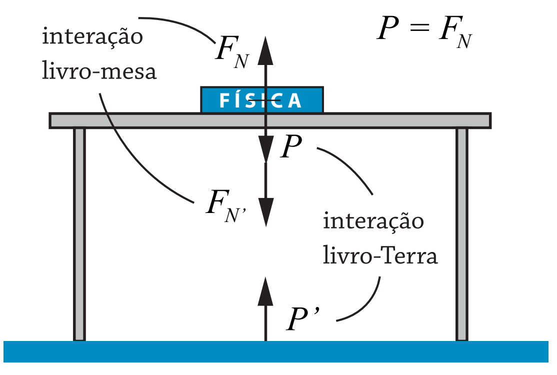


Figura 13.5 – Sistema mesa-livro mostrando os pares de ação e reação.

Se você mantém um quadro apoiado na parede para marcar a posição para fixá-lo, a parede irá reagir e esta reação é uma reação normal (perpendicular) que é igual ao valor da força que você faz para manter o quadro apoiado na parede.

Exemplo 13.2 – Identificação das forças de ação e reação

Um operário puxa um engradado de massa 20 *kg* com uma força de 50 *N*, que faz um ângulo de 30° com a horizontal. Se não existe atrito e o engradado se move apoiado em uma superfície horizontal, desenhe um diagrama mostrando todas as forças que atuam sobre ele e determine o valor da força que mantém apoiado na superfície.

Solução

Para resolver este exercício construa o que se denomina **diagrama de corpo livre**, que é exatamente um diagrama que mostra todas as forças que atuam sobre um corpo.

Perceba que neste caso a reação normal não será igual ao peso, pois a força que puxa o engradado possui uma componente para cima. A força que mantém o corpo na superfície é menor que o peso. Mesmo que o ângulo fosse zero, a normal nunca é a reação ao peso. Lembre-se sempre disso!

Como não existe movimento na vertical, a resultante nesta direção vale zero:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$N + F_y - P = 0$$

$$N + F_y = P$$

$$F_y = F\,sen\,30^0 = 25\ N$$

$$P = mg = 20 \times 9,8 = 196\ N$$

$$N = 196 - 25 = 171\ N$$

Como a normal vale 171 *N*, a força que o engradado exerce sobre a superfície vale 171 *N*.

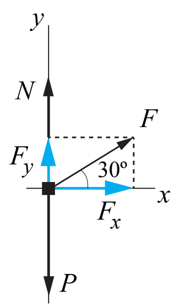


Figura 13.6 – Diagrama de corpo livre para o problema.

LIMITE DE VALIDADE DA TERCEIRA LEI DE NEWTON

A terceira lei de Newton não é sempre válida, porque ela pressupõe que as interações entre os corpos se fazem instantaneamente. De acordo com a hipótese de ação instantânea, o Sol "sabe" instantaneamente que a Terra se movimentou de um certo ponto P_1 para outro P_2 pela força que ela exerce sobre ele.

Entretanto, nenhum sinal (interação) pode se propagar no espaço com velocidade maior que a da luz no vácuo. Então o Sol leva um intervalo de tempo $\Delta T = R/c$ (em que R é a distância entre os corpos e c, a velocidade da luz) para "perceber" que a Terra movimentou-se de P_1 para P_2.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE 13.2 PROPOSTA

Atividade 13.2 – Cálculo da aceleração da Terra

Para determinar o valor da aceleração basta utilizar a segunda lei de Newton, pois está se considerando apenas a força de reação.

Ou seja:

$$F = ma$$

e sendo

$$m_{TERRA} = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$$

$$980 = (5{,}7 \times 10^{24}) \times a$$

$$a = 1{,}64 \times 10^{-22}\ m/s^2$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um copo em uma mesa é esbarrado por uma pessoa e cai para fora da extremidade da mesa. Não despreze a resistência do ar.

a) Quais as forças que atuam sobre o copo enquanto ele cai da mesa até o chão?

b) Quais são as reações dessas forças, ou seja, sobre quais corpos e por quais corpos as reações são exercidas?

E2. O piso de um elevador exerce uma força normal de 600 N de baixo para cima sobre um passageiro que pesa 630 N. Quais são as reações dessas duas forças? O passageiro está sendo acelerado? Em caso afirmativo, determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração.

E3. Um ônibus de 2.000 kg colide com um automóvel de 570 kg e, durante a colisão, a força resultante sobre cada veículo é essencialmente a força exercida pelo outro veículo. Se o módulo da aceleração do caminhão é 11 m/s^2, qual o módulo da aceleração do carro?

E4. Um homem de 60 kg e um trenó de massa 10 kg acham-se na superfície de um lago congelado sem atrito, separados por uma distância de 17 m. O homem exerce uma força de 6,0 N sobre o trenó, por meio de uma corda, puxando-o na sua direção.

a) Qual a aceleração do trenó?

b) Qual a aceleração do homem?

c) Qual a distância entre o ponto de encontro do trenó com o homem, contada a partir da posição do homem?

PROBLEMAS DA UNIDADE 4

P1. Um pescador suspende seu peixe em uma balança de molas presa no teto de um elevador.

a) Se o elevador possui uma aceleração de baixo para cima igual a 2,30 m/s^2 e o ponteiro da balança indica 45,0 N, qual é o peso verdadeiro do peixe?

a) Em que circunstâncias o ponteiro da balança indicará 35,0 N?

b) Qual será a leitura da balança se o cabo do elevador se romper?

P2. Um artista circense está subindo em um tecido acrobático vertical preso ao teto. O peso do tecido e sua deformação podem ser desprezados. Calcule a tensão no tecido quando o artista está

a) subindo com velocidade constante;

b) suspenso em repouso no tecido;

c) subindo e aumentando de velocidade com uma aceleração de módulo a;

d) descendo e aumentando de velocidade com uma aceleração de módulo a.

P3. Um homem, utilizando uma corda, retira um balde de água de massa igual a 0,50 kg de um poço. O movimento do balde até sair do poço ocorre da seguinte forma:

a) sua velocidade aumenta de zero para 0,60 m/s com aceleração constante durante os primeiros 0,15 m;

a) sua velocidade permanece constante após os primeiros 0,15 m e até que esteja a 0,20 m da beira do poço;

a) a velocidade decresce com aceleração constante de 0,70 m/s durante os últimos 0,20 m. A massa do balde de água é 5,0 kg.

Determine a tensão na corda durante cada uma das três partes do percurso.

P4. Uma determinada força impõe ao objeto m_1 uma aceleração de 10 m/s^2. A mesma força impõe ao objeto m_2 uma aceleração de 4 m/s^2. Qual é a aceleração que essa força impõe a um objeto cuja massa é:

a) a diferença entre m_1 e m_2;

b) a soma de m_1 e m_2.

P5. Um meteoro com massa de 0,28 kg está em queda vertical através da atmosfera terrestre com uma aceleração de 9,3 m/s^2. Além da gravidade, uma força vertical retardadora devido ao atrito com a atmosfera age sobre o meteoro. Qual é a intensidade dessa força retardadora?

UNIDADE 5
Aplicações das leis de Newton

Nesta unidade você utilizará todos os conhecimentos apresentados anteriormente em diversas aplicações das leis de Newton. Este estudo será iniciado pelas aplicações do diagrama de corpo livre, incluindo os problemas com plano inclinado, roldanas e a força elástica. Na aula seguinte serão introduzidas as forças de atrito que tornam os exercícios mais consistentes com as situações do dia a dia. Por último, será discutido o movimento em referenciais acelerados.

AULA 14

Aplicações do diagrama de corpo livre

Objetivos

- Aplicar os conceitos das três leis de Newton em situações gerais;
- Utilizar o diagrama de corpo livre para o estudo do movimento de um corpo;
- Calcular a aceleração e a força resultante em problemas envolvendo roldanas, planos inclinados e a força elástica.

14.1 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DA DINÂMICA

Nesta aula será estudado o método para a solução de problemas da dinâmica usando as leis de Newton. Esse método consiste em certo número de passos que devem ser dados para montar e resolver as equações de movimento.

O primeiro passo é, com a terceira lei de Newton, determinar todas as forças que atuam na partícula cujo movimento desejamos estudar. Se houver mais de uma partícula, as forças que atuam em cada uma delas devem ser determinadas.

O segundo passo consiste na construção do **diagrama de corpo livre** da partícula, no qual essas forças são posicionadas num sistema de coordenadas com origem na partícula e cujos eixos de coordenadas podem ter direções arbitrárias; entretanto, a solução do problema fica mais fácil se for escolhido um eixo na direção presumida do movimento ou, então, passando pelo maior número de forças que atuam na partícula.

Calculam-se as componentes de cada força no sistema de eixos escolhido e utiliza-se a segunda lei de Newton para determinar as variáveis desejadas.

14.1.1 Corpos se movendo em conjunto

Considere o sistema de dois blocos $m_1 = 2,0\ kg$ e $m_2 = 3,0\ kg$, ligados por uma corda inextensível e de massa desprezível. Os blocos situam-se sobre uma superfície horizontal sem atrito. Aplique uma força $\vec{F} = 6\ N$ ao bloco de massa m_2, como mostra a Figura 14.1. Determine a aceleração a do sistema e a tensão T na corda.

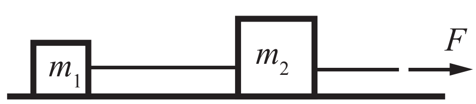


Figura 14.1 – Sistema de dois blocos ligados por uma corda sob a ação de uma força.

A Figura 14.2 abaixo mostra o diagrama de corpo livre dos dois blocos, com um sistema de coordenadas cujo eixo *Ox* é horizontal e orientado para a direita e eixo *Oy*, vertical e orientado para cima.

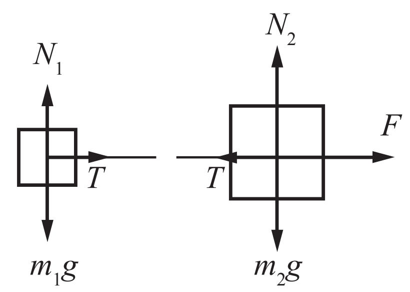


Figura 14.2 – Diagrama de corpo livre dos dois blocos.

As forças $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ são as reações normais da superfície ao peso dos blocos. Cada um deles exerce sobre a superfície uma força igual ao seu peso *mg* e, pela terceira lei de Newton, a superfície reage com uma força $\vec{N}$ sobre os blocos. A força $\vec{F}$ é a força aplicada e as forças $\vec{T}$ são as forças exercidas pela corda sobre os blocos.

De acordo com a segunda lei de Newton, como o movimento só se faz ao longo da horizontal, a componente vertical da resultante de forças em cada bloco é nula. A componente da resultante ao longo da horizontal deve ser igual à massa do bloco multiplicada pela aceleração do sistema, uma vez que os blocos se deslocam juntos.

Note que, apesar de $m\vec{a}_{res}$ ser igual ao vetor força resultante $\vec{F}_{res}$, esse vetor $m\vec{a}_{res}$ não é uma força aplicada a qualquer dos corpos. Ele é apenas o resultado da soma de todas as forças que provocam a aceleração no corpo. Portanto, não faz sentido desenhar um vetor $m\vec{a}_{res}$ no diagrama de corpo livre.

Para m_1 e m_2, respectivamente, temos então que:

$$\vec{F}_{res,y} = \vec{N}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_{res,y} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{res,x} = \vec{T} = m_1\vec{a}_{res,x}$$

$$\vec{F}_{res,y} = \vec{N}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_{res,y} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{res,x} = \vec{F} + \vec{T} = m_2\vec{a}_{res,x}.$$

Assim, para o bloco m_1:

$$N_1 - m_1\, g = 0 \quad \text{e} \quad T = m_1\, a$$

E para o bloco m_2:

$$N_2 - m_2\, g = 0 \quad \text{e} \quad F - T = m_2\, a$$

Podemos agora continuar na solução algébrica com quatro equações e duas variáveis. Eliminando T da segunda e quarta equações, obtemos:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Conhecida a aceleração, a força T pode ser determinada:

$$T = m_1 a = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2}.$$

Numericamente:

$$a = 1{,}2\ m/s^2 \quad \text{e} \quad T = 2{,}4\ N.$$

Exemplo 14.1

Sejam dois blocos $m_1 = 1{,}0\ kg$ e $m_2 = 2{,}0\ kg$ colocados em contato sobre uma superfície horizontal sem atrito. Aplica-se ao bloco m_1 uma força $\vec{F} = 3{,}0\ N$. Determine a força de contato entre os blocos e a aceleração dos mesmos supondo que eles permaneçam sempre em contato ao se deslocarem sobre a superfície.

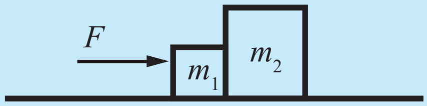


Figura 14.3 – Blocos em contato sobre uma superfície sem atrito sob a ação de uma força.

O diagrama de corpo livre dos dois blocos é mostrado na figura abaixo. A força $\vec{f}$ é a força de contato entre os blocos (força que cada bloco exerce sobre o outro).

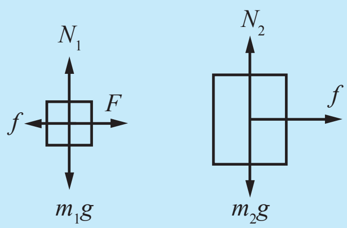


Figura 14.4 – Diagrama de corpo livre dos blocos em contato.

Como o movimento se faz na horizontal, escolhendo o eixo Ox para a direita nos dois blocos, temos da segunda lei de Newton que:

Para o bloco m_1: $F - f = m_1\ a$ e $N_1 - m_1\ g = 0$.

Para o bloco m_2: $f = m_2\ a$ e $N_2 - m_2\ g = 0$.

Eliminando a aceleração das duas equações, obtemos:

$$f = m_2 a = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}.$$

Levando os valores das massas e da força F nessa equação, obtemos $f = 2{,}0\ N$. A aceleração é:

$$a = \frac{f}{m_2} = \frac{2{,}0}{2} = 1{,}0\ m/s^2$$

ATIVIDADE 14.1 – CORPOS LIGADOS

Se a força $\vec{F}$ for aplicada (da direita para a esquerda) ao bloco de massa m_2, qual será a força de contato entre os blocos?

14.2 ROLDANAS

Uma roldana, ou polia, é um instrumento utilizado para mudar a direção de uma força aplicada em um fio ou em um cabo. Quando a massa da roldana puder ser considerada desprezível e não oferecer nenhuma resistência ao movimento da corda que passa por ela, diz-se que a roldana é ideal. Quando a corda também for ideal (massa desprezível e não esticar), as intensidades das forças aplicadas nos seus extremos serão iguais.

Considere a situação na qual um bombeiro está puxando um alpinista usando uma polia fixa (Figura 14.5). Nessa situação a tensão $|T|$ na corda, causada pelo peso do alpinista, é igual à força $|\vec{T}'|$ que o bombeiro faz. Ou seja, $|\vec{T}'| = |\vec{T}|$.

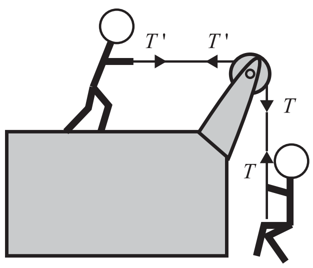


Figura 14.5 – Um alpinista é resgatado por um bombeiro que usa uma polia fixa. A tensão $|T|$ na corda, causada pelo peso do alpinista, é igual à força $|\vec{T}'|$ que o bombeiro faz.

O uso de duas ou mais polias pode reduzir o esforço necessário para se elevar um corpo. Veja as duas situações representadas nas Figuras 14.6a e 14.6b, nas quais um corpo de peso P é elevado com velocidade constante.

No caso da Figura 14.6a, a força $\vec{T}$ tem o mesmo valor do peso $\vec{P}$. No caso da Figura 14.6b, existem duas roldanas: a roldana I é fixa (seu eixo é fixo) e a II é móvel (seu eixo pode subir e descer). Como o corpo está preso na polia II, ele recebe uma força igual a $2\vec{T}$. Para que ele suba com velocidade constante temos $\vec{T} = \frac{\vec{P}}{2}$. O esforço necessário para elevar o corpo é apenas a metade do peso dele.

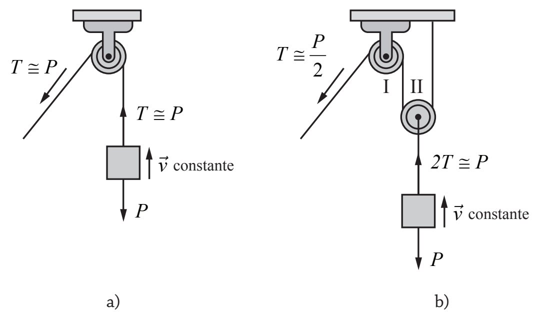


Figura 14.6 – (a) Roldana fixa e (b) roldana móvel. A roldana fixa apenas muda a direção da força exercida pelo bloco sobre a mão, devido à força peso do bloco. A roldana móvel divide o peso ao meio.

Exemplo 14.2

Para diminuir o esforço feito pelos operários de uma pequena obra, o encarregado resolveu substituir a carretilha por um sistema composto de uma roldana fixa e outra roldana móvel. Se a maior carga que deve ser erguida é 300 N e a mesma sobe com velocidade constante, calcule a força necessária para elevá-la.

Solução

Como existem duas roldanas temos uma situação idêntica à discutida acima. O diagrama de corpo livre é igual à Figura 14.6b. Nesse caso, a força necessária para elevar a carga será 150 N.

14.2.1 Máquina de Atwood

A máquina de Atwood consiste em dois blocos de massas m_1 e m_2, ligados às extremidades de uma corda que passa por uma roldana circular fixa, como mostra a Figura 14.7.

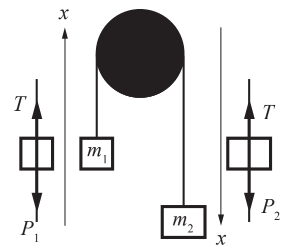


Figura 14.7 – Máquina de Atwood.

Nessa mesma figura, ao lado das massas estão mostrados os diagramas de corpo livre das massas. $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ são os pesos de m_1 e m_2. Como se supõe que a corda tem massa desprezível, as forças que ela exerce sobre os dois blocos é a tensão $\vec{T}$ igual em módulo nas suas extremidades.

Suponha que $m_2 > m_1$. A experiência indica que, nesse caso, o bloco m_2 deve descer verticalmente, enquanto que o bloco m_1 deve subir. Escolha, então, os eixos de coordenadas *Ox* verticais, com o sentido positivo coincidindo com o do movimento de cada bloco. A aplicação da segunda lei de Newton a cada bloco nos dá:

- Para o bloco m_1: $T - P_1 = m_1\, a_1$;
- Para o bloco m_2: $P_2 - T = m_2\, a_2$.

As acelerações a_1 e a_2 têm sentidos contrários, mas mesmo módulo a. Temos então duas equações com duas incógnitas T e a que são determinadas facilmente. Eliminando T das duas equações, obtemos:

$$P_2 - P_1 = (m_1 + m_2)a;$$

de onde vem que:

$$a = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Levando o valor de a em qualquer das duas equações, obtemos a tensão T:

$$T = \frac{2m_2 m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Esse exemplo merece um pouco de reflexão. Para resolver o problema, determinamos antes o sentido do movimento dos dois blocos e os eixos de coordenadas foram escolhidos com o sentido positivo coincidindo com o do movimento. **Isso não é necessário: a escolha do sentido de movimento e do sentido positivo dos eixos é arbitrária; o resultado não depende dessas escolhas**. Para ver isso, suponha, primeiramente, que tivesse sido escolhido o eixo dos x no corpo m_2 para cima, mantendo a escolha do sentido de movimento do conjunto. Então, as equações da segunda lei de Newton ficariam:

- Para o bloco m_1: $T - P_1 = m_1\, a$;
- Para o bloco m_2: $T - P_2 = -m_2\, a$.

Essas equações são idênticas às anteriores: a primeira é exatamente igual; a segunda é a mesma do caso anterior, mas com o sinal trocado. O resultado é, portanto, o mesmo. Faça os cálculos.

Suponha agora que tivesse sido escolhido o sentido de movimento tal que a massa m_2 subiria, enquanto m_1 desceria. Mantendo os sentidos dos eixos inalterados, você teria:

- Para o bloco m_1: $T - P_1 = -m_1\ a$;
- Para o bloco m_2: $P_2 - T = -m_2\ a$;
- Tal que $a = \dfrac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} = -\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$.

Como você pode ver, a solução dessas equações dá o mesmo valor numérico para a aceleração, porém com o sinal negativo. Como o resultado é o valor do módulo da aceleração (e do módulo da tensão também), ele não pode ser negativo. Assim, a interpretação que se dá é que o sentido real da aceleração é oposto ao que foi tomado como verdadeiro.

Ao invés de mudar o sentido do movimento, poderia ser mudado o sentido dos eixos, mas o resultado seria o mesmo. Assim, não importa o sentido dos eixos ou do movimento escolhido *a priori* para resolver o problema. O que é importante é que as componentes dos vetores sejam bem determinadas, com seus sentidos bem especificados.

ATIVIDADE 14.2

Um lavador de janelas se balança ano após ano em sua cadeirinha de pintor. Ele pesa 700 *N* e a corda, sem que ele saiba, tem uma tensão de ruptura de 400 *N*. Por que a corda não se rompe quando ele é sustentado, como ilustrado no lado esquerdo da Figura 14.8?

Um dia, lavando uma fachada próxima a um mastro de bandeira, ele resolve amarrar a extremidade livre da corda ao mastro em vez de amarrá-la a sua cadeira, como ilustrado na Figura 14.8.

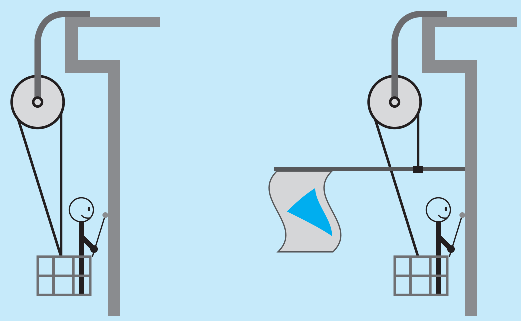


Figura 14.8

Esse lavador sofrerá um acidente de trabalho? Explique sua resposta.

14.3 PLANO INCLINADO

Quem dirige sabe que ao encontrar uma subida é preciso pisar no acelerador. Parece que o peso do carro atrapalha durante a subida. Para descer já acontece o contrário, você precisa pisar no freio, o peso do carro parece ajudar.

A situação descrita acima acontece porque a força peso é "parcialmente distribuída" devido à inclinação da rampa. Compare a Figura 14.9a com a Figura 14.9b. Na horizontal o peso é igual à reação normal. Mas na rampa o peso é decomposto em duas componentes: uma na direção da rampa e outra perpendicular à rampa (veja os detalhes na Figura 14.9).

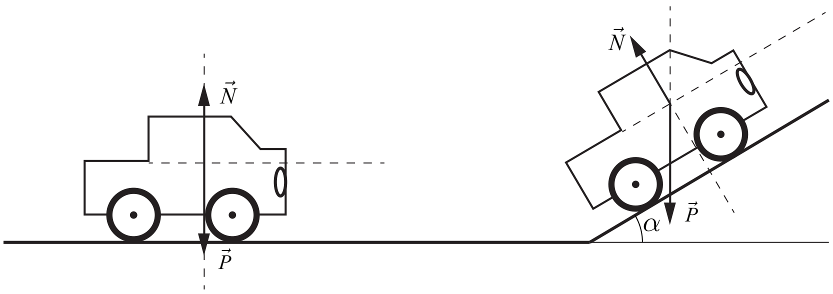


Figura 14.9 – (a) Carro no plano e (b) carro numa rampa inclinada.

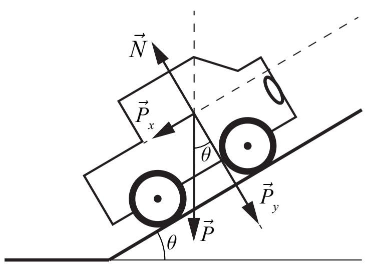


Figura 14.10 – Decomposição da força peso.

A componente na direção da rampa será denominada $\vec{P}_x$ e a perpendicular à rampa, $\vec{P}_y$, correspondendo aos eixos x e y do sistema de coordenadas.

Como não há movimento na direção y, $\vec{P}_y$ é igual à força de reação normal $\vec{N}$:

$$P_x = Psen\theta = mgsen\theta$$

$$P_y = Pcos\theta = mgcos\theta .$$

Logo, pela segunda lei de Newton:

$$P_x = ma_x \to a_x = gsen\theta;$$

$$N - P_y = ma_y \to N = mgcos\theta.$$

Exemplo 14.3

Um engradado de massa 50 *kg* é puxado por um operário, para dentro de um caminhão, através de uma rampa de inclinação 30°. Se a força que o operário puxa o engradado faz um ângulo de 20° com a rampa e ela sobe com velocidade constante, calcule o valor da força com que o engradado é puxado e a reação normal. Considere a superfície totalmente lisa e $g = 9{,}8\ m/s^2$.

Solução

O primeiro passo é decompor as duas forças (peso e a que puxa o corpo) para depois utilizarmos a segunda lei de Newton, supondo o eixo *Ox*, paralelo à rampa.

A força peso é decomposta em duas componentes:

$$P_x = mg\ sen\ 30^0 = 245\ N,$$
$$P_y = mg\ cos 30^0 = 424\ N.$$

A força que puxa o engradado tem componentes:

$$F_x = F\ cos 20^0,$$
$$F_y = F\ sen 20^0.$$

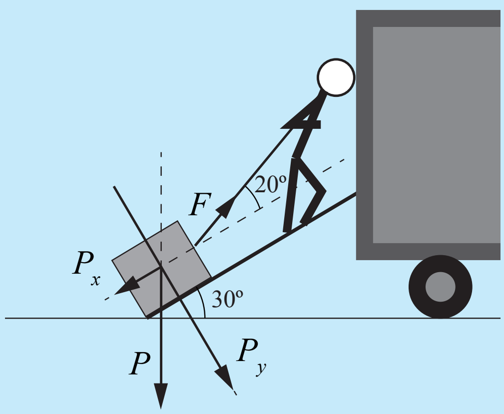


Figura 14.11 – Diagrama de corpo livre para o engradado.

Na direção perpendicular ao plano a força resultante é zero (não existe movimento):

$$N + F_y = P_y,$$

logo temos $N = P_y - F_y$.

Na direção do plano a força resultante também é zero (a velocidade é constante):

$F_x - P_x = 0$, logo temos $F_x = P_x = 245\ N$.

Dessa forma a reação normal vale:

$$N = P_y - F_y = 424 - 89 = 335\ N.$$

Mostre que $F = 261\ N$ e, consequentemente, $F_y = 89\ N$.

Exemplo 14.4

Um bloco é lançado na base de um plano inclinado de um ângulo θ sem atrito, com uma velocidade v_0. Determine a distância que ele percorre sobre o plano até parar e a altura máxima atingida por ele em relação ao ponto de partida.

A Figura 14.12 mostra o bloco sobre o plano inclinado, com uma velocidade v. Na mesma figura estão desenhadas as forças que atuam no bloco: N é a reação normal da superfície do plano sobre o bloco e P é o peso do bloco. O sistema de coordenadas Oxy tem origem na base do plano com Ox paralelo a ele.

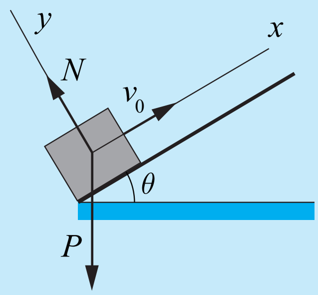


Figura 14.12 – Diagrama de forças para o bloco lançado no plano inclinado.

Como não há movimento ao longo de Oy, a segunda lei nos fornece que:

$$N = Pcos\theta$$

Ao longo de Ox, temos: $-Psen\theta = ma$,

de onde obtemos para a aceleração do bloco: $a = -gsen\theta$.

Como a é constante, podemos aplicar as fórmulas do movimento retilíneo uniformemente acelerado e obter a distância máxima percorrida pelo bloco no plano:

$$x = \frac{v_0^2}{2gsen\theta}.$$

A altura máxima é então:

$$H = xsen\theta = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Exemplo 14.5

Determine a aceleração e a tensão na corda no sistema da Figura 14.13, sabendo que o plano é inclinado de um ângulo α e não tem atrito, e que $m_2 = 3m_1$.

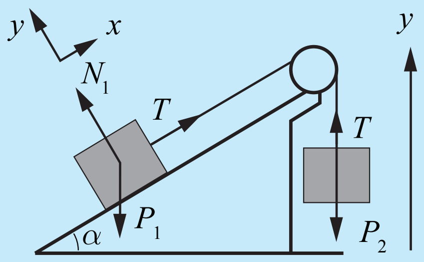


Figura 14.13 – Diagrama de corpo livre dos blocos no plano inclinado.

A Figura 14.13 mostra os blocos e os diagramas de corpo livre. Supondo que o bloco de massa m_2 caia verticalmente, temos, da segunda lei de Newton:

Para o bloco m_1: $N_1 - P_1 cos\alpha = 0$

$$T - P_1 sen\alpha = m_1\ a$$

Para o bloco m_2: $-P_2 + T = -m_2\ a.$

Eliminando T da segunda e terceira equações, obtemos a aceleração do conjunto:

$$a = \frac{m_2 - m_1 sen\alpha}{m_1 + m_2} g.$$

Levando a na terceira equação, temos que:

$$T = \frac{m_1 m_2 (1 + sen\alpha)}{m_1 + m_2} g.$$

Note que, se $\alpha = 90^0$, os resultados se reduzem aos da máquina de Atwood.

14.4 A FORÇA ELÁSTICA

Sempre que um corpo recebe a ação de uma força ele sofre uma deformação. Em alguns casos essa deformação é bem visível, como quando se aperta uma bola de borracha ou balão, ou se estica um elástico ou se puxa uma mola. Quando a força para de atuar o corpo pode voltar à situação original ou não.

Esse retorno depende de propriedades intrínsecas do corpo e da intensidade e do tempo de atuação da força deformadora. **A força que atua no sentido de devolver o corpo para a sua condição original é chamada de força restauradora**.

ATIVIDADE 14.3 – DUREZA DE UMA MOLA

Pegue algumas canetas, dessas que são dadas como brindes, retire as molas e teste como elas se deformam puxando-as e comprimindo-as levemente. Se possível, vá a uma oficina e tente deformar a mola de um amortecedor. Ou, simplesmente, tente empurrar seu carro para baixo próximo a uma de suas rodas. Você consegue associar alguma característica da mola com a força e a deformação?

A dureza de uma mola se relaciona com uma grandeza denominada **constante elástica**, representada pela letra k. Dentro de certo limite, chamado de **limite de deformação linear**, a força restauradora é proporcional à deformação da mola.

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad (14.1)$$

O sinal negativo indica que a força é sempre contrária ao deslocamento da mola em relação à sua posição de equilíbrio. Isto pode ser visto nas Figuras 14.14a, que mostra uma mola em sua posição de equilíbrio (sem distensão ou compressão), 14.14b e 14.14c, que mostram, respectivamente, a mola comprimida e distendida. Na Figura 14.14 estão indicadas também a força de mola e a deformação em cada caso.

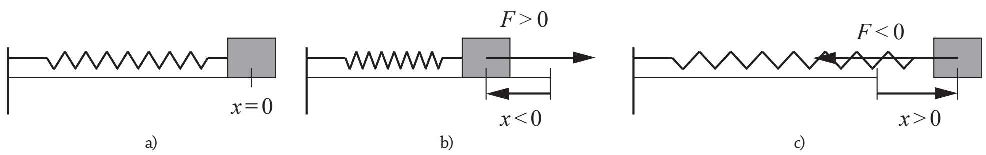


Figura 14.14 – Bloco preso a uma mola. (a) Em equilíbrio; (b) comprimida; (c) distendida.

Enquanto a mola obedecer a essa **relação linear** ela estará obedecendo a uma lei denominada **lei de Hooke**, dentro de um regime denominado **regime elástico**. Se a mola for deformada além deste ponto, ela entrará em um regime denominado plástico e não retornará mais para seu tamanho (forma) original. Pegue uma mola e a estique até que ela perca suas "voltas". Você a terá deformado até o **regime plástico**.

Exemplo 14.6

Uma mola vertical, com a constante de força $k = 800\ N/m$, está presa por uma ponta no teto de uma sala. Na outra extremidade está dependurado um corpo de 15 kg que repousa sobre uma superfície horizontal, de modo que a mola exerce uma força para cima sobre esse corpo. A mola está esticada 10 cm.

a) Qual é o módulo da força que a mola exerce sobre o bloco?

b) Que força a superfície exerce sobre o corpo?

Solução

a) A mola foi deformada pela ação do peso do corpo. Como a deformação foi de 10 *cm*, a força restauradora, em módulo, é $F = kx = 800 \times 0{,}1 = 80\ N$.

b) Para determinar a força que a superfície exerce sobre o corpo, devemos considerar o diagrama de corpo livre (Figura 14.15):

Como o corpo está em repouso o somatório das forças é igual a zero.

$$\sum F = F_E + N - P = 0$$

$$N = P - F_E$$

$$N = 147 - 80 = 67\ N$$

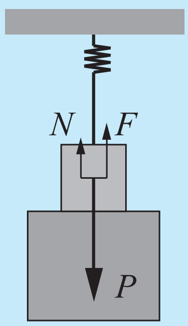


Figura 14.15

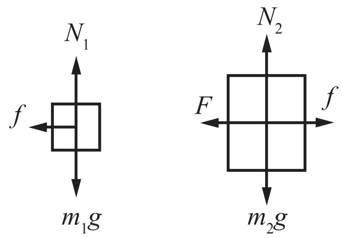
ATIVIDADE 14.4 – FORÇA RESTAURADORA

As molas do sistema de amortecimento de um carro possuem $k = 80\ N/m$. Quando o carro passa por um buraco o pneu desce e a mola sofre uma deformação $X = 4{,}0$ *cm*. Encontre a força restauradora feita pela mola sobre o pneu.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 14.1 – Corpos ligados

O diagrama de corpo livre para os blocos é mostrado na figura abaixo:



Escolhendo o eixo *Ox* horizontal e para a direita, temos da segunda lei de Newton:

Para o bloco m_1: $-f=-m_1\,a$;

Para o bloco m_2: $f-F=-m_2\,a$.

De novo, eliminando a aceleração dessas equações, obtemos:

$$f=\frac{m_1F}{m_1+m_2}.$$

Ou, numericamente, $f=1,0\,N$. A aceleração do sistema é:

$$a=\frac{f}{m_1}=\frac{1,0}{1}=1,0\,m/s^2\ .$$

Atividade 14.2

Na primeira situação existem duas cordas segurando o lavador. Dessa forma, pode ser suportado um peso total de 800 *N* (a corda se rompe com 400 *N*).

Na segunda situação apenas uma corda sustenta o lavador, que tem um peso de 700 *N*. Como a corda suporta uma carga máxima de 400 *N* ela irá se romper. Logo, o lavador irá sofrer um acidente de trabalho. Desenhe o diagrama de forças sobre o lavador para visualizar melhor esta situação.

Atividade 14.3 – Dureza de uma mola

Comentários: você irá perceber que algumas molas são mais duras que outras, são mais difíceis de deformar. Para deformar molas diferentes você terá de fazer mais ou menos força.

Atividade 14.4 – Força restauradora

Comentários: a força restauradora terá módulo

$$F=k\Delta x=80\ (N/m)\times 0,04\ m=3,20\ N.$$

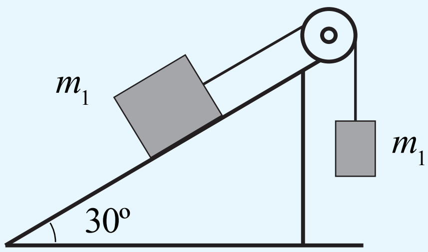
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um bloco de massa $m_1 = 3,7\ kg$ está apoiado sobre um plano inclinado liso, fazendo um ângulo de 30º com a horizontal. Um segundo bloco, de massa $m_2 = 2,3\ kg$, está ligado ao primeiro por uma corda que passa por uma polia. O atrito com a polia é desprezível e o segundo bloco está dependurado verticalmente.

a) Qual é a aceleração de cada bloco?

b) Qual é a tensão na corda?

E2. Uma caixa de 800 *N* está sobre uma superfície plana inclinada de 30° em relação à horizontal.



Qual é a maior força que pode ser aplicada à caixa, paralela ao plano inclinado, e que não provoca o escorregamento da caixa plano acima?

E3. Uma melancia de massa 5 *kg* está pendurada, imóvel, numa balança de mola cuja constante elástica é $k = 400\ N/m$. De quanto a mola dessa balança está esticada?

E4. Uma mola de constante $k = 300\ N/m$ está presa a um corpo de massa 4 *kg* que repousa sobre uma superfície lisa. De quanto essa mola tem de ser deformada para que o corpo adquira uma aceleração de $5\ m/s^2$?

AULA 15

Forças de atrito

Objetivos

- Entender a importância do atrito para o estudo do movimento de um corpo;
- Diferenciar atrito estático de atrito cinético;
- Determinar o coeficiente de atrito entre duas superfícies.

15.1 ATRITO

Atrito é uma força que aparece sempre que duas superfícies estão em contato e há a tendência de movimento relativo. Você já deve ter percebido que um carro com pneu careca derrapa mais facilmente do que um com pneu novo; que os jogadores devem usar chuteiras de travas maiores para não escorregarem se o campo de futebol estiver molhado; que é difícil correr só de meias em um piso encerado. Nessas situações costuma-se dizer que faltou **atrito**.

Toda vez que um corpo desliza sobre o outro, cada um deles exerce uma força sobre o outro, paralela à superfície de contato entre eles. A força de atrito em cada corpo se opõe ao movimento deste relativamente ao outro corpo. As forças de atrito, portanto, sempre se opõem ao movimento relativo e nunca o ajudam. Elas têm papel importante na vida diária. Cerca de 20% da potência de um automóvel é usada para vencer o atrito. Por outro lado, sem o atrito não poderíamos andar, segurar um lápis ou escrever.

Nesta aula será considerado o atrito de superfícies secas (não lubrificadas), uma sobre a outra. Do ponto de vista microscópico, o atrito é um fenômeno muito complicado, mas, macroscopicamente, ele pode ser tratado de modo simples, apesar da grande diversidade de natureza de superfícies.

Considere um bloco em repouso sobre uma superfície horizontal, como mostra a Figura 15.1. Se você aplicar a ele uma força que aumenta gradativamente a partir de zero, verá que ele só começa a se mover para um dado valor dessa força. Podemos interpretar esse fato experimental dizendo-se que, ao aplicar uma força F ao bloco, ele tende a se mover, mas não o faz porque o atrito entre ele e a superfície sobre a qual ele repousa dá origem a uma força que atua sobre o bloco, igual e oposta a F. Essa força de atrito existente entre duas superfícies em repouso, uma relativamente à outra, é denominada **força de atrito estático** f_e.

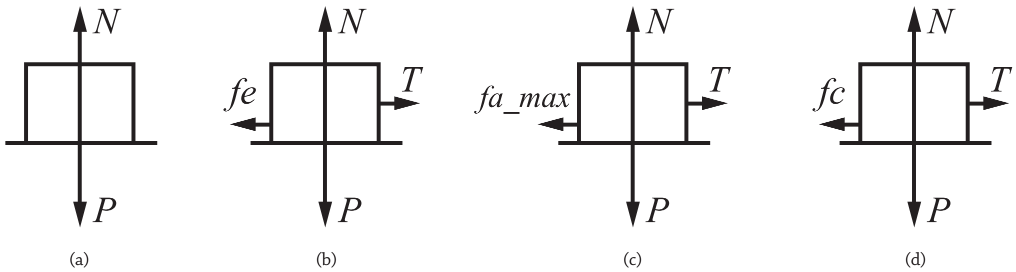


Figura 15.1 – (a) Nenhuma força aplicada, bloco em repouso, força de atrito fa = 0. (b) A força aplicada é insuficiente para colocar a caixa em movimento, pois a tensão ainda é menor que a força de atrito estático máxima $f_{e,\max}$. (c) $T = f_{e,\max}$ e o corpo se encontra na iminência do movimento. (d) Corpo desliza com velocidade constante. A força de atrito é cinética f_c é ligeiramente menor que $f_{e,\max}$.

Observe que, se nenhuma força é aplicada na direção horizontal, não há força de atrito atuando sobre o bloco. Mas há reação normal, que é devida ao peso do bloco. A maior força de atrito estático $f_{e,\max}$ é igual à maior força que deve ser aplicada ao corpo para que ele comece a se mover. Ou seja, a partir de um valor limite (ou máximo), o atrito não é mais capaz de produzir uma força contrária, intensa o suficiente, para impedir que o bloco se mova. A experiência mostra que $f_{e,\max}$ é proporcional à força de reação normal.

Quando o corpo começa a se movimentar, a experiência nos mostra que a força de atrito entre ele e a superfície decresce. Como o bloco não está mais em equilíbrio, para manter o corpo em movimento uniforme, temos que aplicar a ele uma força ligeiramente menor que $f_{e,\max}$. A força de atrito existente entre duas superfícies em movimento relativo é denominada **força de atrito cinético** f_c .

ATIVIDADE 15.1 – ENTENDENDO A FORÇA DE ATRITO ESTÁTICO

Prenda uma gominha, ou uma tira de elástico, a um pequeno bloco de madeira e comece a puxá-la bem lentamente. Observe que o bloco de madeira não começa a se mover imediatamente. A gominha (ou a tira de elástico) tem de ser esticada até certo tamanho antes de o movimento começar.

ATIVIDADE 15.2 – ENTENDENDO A FORÇA DE ATRITO CINÉTICO

Refaça com cuidado a experiência da atividade 15.1. Observe que, depois que o bloco de madeira começa a se mover, a tira de elástico está um pouco menos esticada do que quando o bloco estava na iminência do movimento.

De modo geral, podemos dizer que a força de atrito (estático e cinético) comporta-se da seguinte forma:

a) depende dos tipos de superfície que estão em contato;

b) é aproximadamente independente da área aparente de contato das superfícies;

c) é proporcional à força normal exercida por uma superfície sobre a outra.

A força de atrito cinético apresenta também outra característica: ela é razoavelmente independente da velocidade relativa das superfícies de contato.

Como a força de atrito é proporcional à força normal entre as superfícies, podemos escrever:

$$F_{at} = \mu N \,, \qquad (15.1)$$

em que F_{at} é a força de atrito (estático ou cinético), μ é o coeficiente de atrito (estático ou cinético), $\vec{N}$ é a reação normal, que nada mais é do que a força que mantém as superfícies em contato. **A equação 15.1 não é uma relação vetorial porque $\vec{F}_{at}$ e $\vec{N}$ são sempre perpendiculares entre si**. Ela é apenas uma relação escalar entre os módulos das duas forças.

O coeficiente de atrito é diferente para o caso estático e o de movimento. Por isso, quando o atrito for estático, ele é chamado de coeficiente de atrito estático μ_e; no caso do atrito ocorrer no movimento, ele é chamado de coeficiente de atrito cinético μ_c. Como a força de atrito estático é sempre maior que a de atrito cinético, o coeficiente de atrito estático é sempre maior que o cinético:

$$\mu_{estático} > \mu_{cinético}.$$

Na Figura 15.2 mostramos alguns coeficientes de atrito estático e cinético para diferentes superfícies em contato.

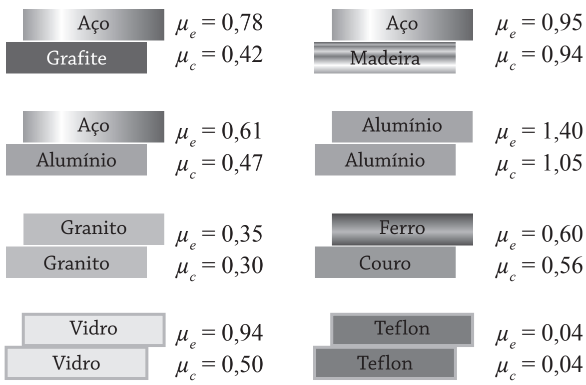


Figura 15.2 – Coeficientes de atrito estático e cinético para diferentes superfícies em contato.
Fonte: BLAV (1995).

É importante ressaltar novamente que **a força de atrito é sempre contrária ao movimento relativo das superfícies que estão em contato** (Figura 15.3).

Um exemplo é o ato de andar (Figura 15.4). Devido ao atrito, nosso pé empurra o chão com uma força para trás $-\vec{F}_a$, que está aplicada no chão. Pela terceira lei de Newton, o chão reage empurrando nosso pé com uma força de mesmo módulo, mas sentido contrário $\vec{F}_a$ (portanto, para frente).

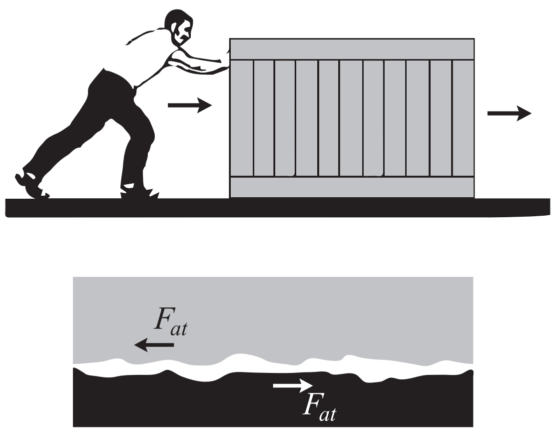


Figura 15.3 – Esquema mostrando a força de atrito entre a caixa e o solo.

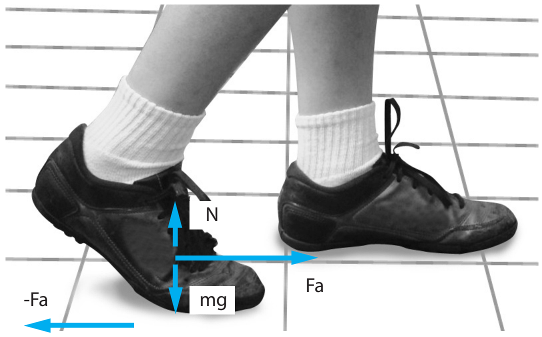


Figura 15.4 – Esquema mostrando como o atrito atua para que possamos andar.

Do ponto de vista microscópico, as forças que geram o atrito são interatômicas que atuam nas regiões das superfícies que estão em contato. Essas regiões são uma fração muito pequena da área aparente de contato. O atrito é o resultado da dificuldade de se vencer essas forças. Se polirmos as superfícies além de certo limite, passamos a aumentar a área de contato das superfícies e, assim, a força de atrito entre elas.

Exemplo 15.1

Determine a aceleração e o sentido para o qual o sistema da Figura 15.5 se moverá, sabendo que o plano é inclinado de um ângulo α, o atrito cinético entre o bloco de massa m_1 e o plano inclinado seja m_c e a relação entre as massas é $m_2 = 3m_1$.

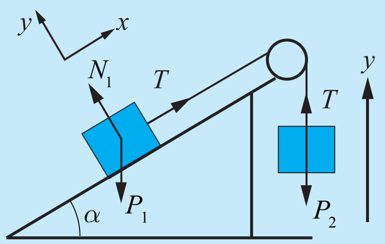


Figura 15.5 – Diagrama de corpo livre dos blocos no plano inclinado.

Solução

A introdução da força de atrito no exemplo causa um problema porque, como ela se opõe ao movimento do corpo em relação à superfície do plano inclinado, é preciso que saibamos *a priori* esse sentido para fazer o diagrama de corpo livre. No caso acima, como $m_2 = 3m_1$, isso é fácil, mas, pode acontecer que não o saibamos. Nesse caso, temos que resolver o problema com os dois sentidos de movimento para ver qual será o correto.

Na Figura 15.5, que mostra os blocos e os diagramas de corpo livre deles, suponha que o bloco m_1 suba o plano inclinado. Pela segunda lei de Newton, com os eixos escolhidos como mostrado e supondo que o bloco de massa m_2 caia verticalmente, temos:

Para o bloco m_2,

$$T - P_2 = -m_2\ a. \qquad (1)$$

Para o bloco m_1,

$$N_1 - P_1 cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$T - f - P_1 sen\alpha = -m_1\ a.$$

e, para a força de atrito,

$$f = \mu\, m_1\ g\ cos\alpha. \qquad (3)$$

Levando (1) e (3) em (2), vem

$$a = \frac{m_2 - m_1(\mu cos\alpha + sen\alpha)}{m_1 + m_2}\, g\,.$$

ATIVIDADE 15.3

Resolva o problema do exemplo 15.1 supondo agora que o corpo m_1 desça o plano inclinado. Discuta o resultado obtido.

Não existem superfícies perfeitamente lisas. Observada em microscópios potentes, a mais lisa das superfícies apresenta-se áspera (Figura 15.5). Essas irregularidades são, em última análise, consequência da estrutura da matéria.

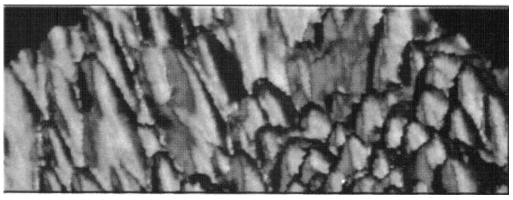


Figura 15.5 – Imagem de uma superfície vista com um microscópio de varredura, mostrando as imperfeições.

ATIVIDADE 15.4

Mostre que em um plano inclinado com atrito, para o corpo permanecer em equilíbrio, o coeficiente de atrito é igual à tangente do ângulo de inclinação do plano.

ATIVIDADE 15.5

Porque algumas vezes o giz faz aquele som estridente quando escrevemos no quadro?

ATIVIDADE 15.6

Para arrastar um objeto muito pesado é mais conveniente colocá-lo sobre um outro objeto que possa rolar. Faça uma pesquisa sobre o coeficiente de atrito de rolamento e explique porque um trem gasta menos combustível para andar sobre trilhos do que um caminhão andando no asfalto?

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 15.1 – Entendendo a força de atrito estático

Esse experimento mostra que a força de atrito estático varia, aumentando de forma a equilibrar a força do elástico até atingir um valor máximo. Acima desse valor o bloco entrará em movimento.

Atividade 15.2 – Entendendo a força de atrito cinético

Esse experimento mostra que a força necessária para iniciar um movimento é sempre maior do que a força necessária para mantê-lo com velocidade constante.

Atividade 15.3

Na Figura 15.4, que mostra os blocos e os diagramas de corpo livre deles, suponha que o bloco m_1 desça o plano inclinado e com os eixos escolhidos, como mostrado. Pela segunda lei de Newton, supondo que o bloco de massa m_2 caia verticalmente, temos, da segunda lei de Newton:

Para o bloco m_2,

$$T - P_2 = m_2\ a \tag{1}$$

Para o bloco m_1,

$$N_1 - P_1 cos\alpha = 0 \tag{2}$$

$$T - f - P_1 sen\alpha = - m_1\ a$$

e, para a força de atrito,

$$f = \mu\, m_1\, g\ cos\alpha \tag{3}$$

Levando (1) e (3) em (2), vem:

$$a = \frac{m_1(sen\alpha - \mu cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2}\, g.$$

Como $m_2 > m_1 \Rightarrow a < 0$ **e o bloco se move para baixo!**

Atividade 15.4

Como o corpo está em equilíbrio, temos:

$$N = P_y = Pcos\theta$$
$$F_{at} = P_x = Psen\theta$$
$$\mu N = Psen\theta$$
$$\mu = \frac{Psen\theta}{Pcos\theta}$$
$$\mu = tg\theta$$

Atividade 15.5

Esse fenômeno envolve tanto o atrito estático quanto o cinético. No caso o giz adere (μ_e estático) e desliza (μ_c), de forma alternada produzindo um som estridente. Quando o giz desliza sobre o quadro ele pode vibrar, o que gera o som. Isso explica também o “chiado” do limpador de para-brisas se movendo sobre o vidro seco e o “cantar” dos pneus numa freada ou arrancada brusca.

Atividade 15.6

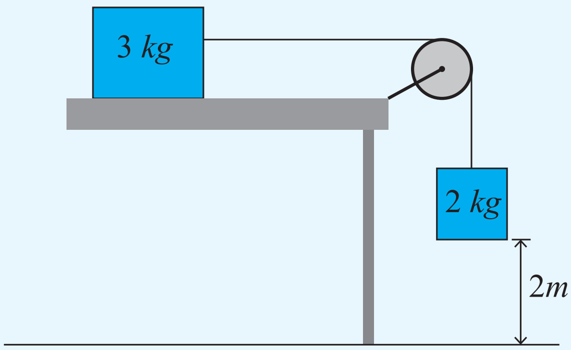
O coeficiente de atrito de rolamento μ_r é definido como a razão da força horizontal necessária para mover o objeto com velocidade constante pela força normal exercida pela superfície. Você encontrará valores para μ_r para o aço da ordem de 0,0025 e μ_r da ordem de 0,015 para a borracha.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um bloco de madeira é arrastado sobre uma superfície horizontal por uma corda mantida também na horizontal. A velocidade é constante e a força de tração é de 20 *N*. O coeficiente de atrito cinético entre as superfícies em contato é de 0,3. Calcule a força de atrito.

E2. Um corpo de 20 *N* encontra-se sobre uma superfície horizontal. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre a superfície e o corpo são 0,8 e 0,6, respectivamente. Uma corda horizontal e amarrada ao corpo é sujeita a uma tensão constante *T*. Qual é a força de atrito sobre o corpo quando (a) $T = 15\ N$ ou (b) $T = 20\ N$?

E3. Um trabalhador puxa um caixote de 100 *kg* sobre um tapete felpudo com uma força horizontal de 500 *N*. O coeficiente de atrito estático é 0,6 e o de atrito cinético é 0,4. Calcule a forca de atrito exercida pelo tapete.



E4. Uma caixa de 3 *kg* encontra-se num plano horizontal e ligada a uma outra caixa, de 2 *kg*, por um fio muito leve. (a) Qual é o coeficiente de atrito estático mínimo que garante a imobilidade das duas caixas? (b) Se o coeficiente de atrito estático for menor do que o calculado na parte (a), e se o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o plano horizontal for de 0,3, calcular o tempo que a caixa de 2 *kg* leva para chegar ao solo, 2 *m* abaixo, partindo do repouso.

E5. O coeficiente de atrito estático entre os pneus de um carro e o pavimento de uma estrada horizontal é $\mu_e = 0{,}6$. Se a força resultante sobre o carro for a força do atrito estático exercida pelo pavimento da estrada, qual é a aceleração máxima do carro?

E6. Um bloco de 5 *kg* é mantido em repouso, contra uma parede vertical, por uma força horizontal de 100 *N*.

a) Qual a força de atrito da parede sobre o bloco?

b) Qual é a força horizontal mínima necessária para impedir que o bloco caia, sendo $\mu_e = 0{,}40$ o coeficiente de atrito entre a parede e o bloco?

E7. A força de resistência em um fluido para baixas velocidades é dada por $F = -bv$, em que b é um fator de proporcionalidade. Mostre que a velocidade final (velocidade terminal) de uma pedra que é solta, verticalmente, próximo à superfície de um lago é dada por

$$v_t = \frac{mg}{b}.$$

E8. Um pingo de chuva está sujeito a uma força de arraste (força de resistência de um fluido) para altas velocidades dada por $F = -Cv^2$, em que C é o coeficiente de arraste do ar. Mostre que a velocidade terminal de um pingo de chuva é dada por

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{C}}.$$

AULA 16

Leis de Newton em referenciais acelerados

Objetivos

- Aplicar os conceitos das leis de Newton em problemas envolvendo referenciais acelerados;
- Resolver problemas envolvendo movimentos circulares com velocidade de módulo constante.

16.1 ELEVADORES EM MOVIMENTO

Você "sente" o seu peso devido à reação do corpo sobre o qual você se apoia. Uma balança funciona dessa maneira. A leitura dela é a reação normal à compressão provocada pelo seu peso em sua base.

Quando, porém, você está no interior de um elevador que acelera (ou desacelera), a sensação de peso que se tem é bem diferente. Isso acontece porque, nesses casos, a normal tem maior ou menor intensidade, dependendo do movimento do elevador. Se ele sobe em movimento acelerado, por exemplo, a resultante das forças que atuam sobre quem está em seu interior deve estar orientada para cima e, portanto, a intensidade da normal aplicada às pessoas é maior que seus respectivos pesos, o que dá a sensação de aumento de peso.

Se, por outro lado, o elevador desce em movimento acelerado, a intensidade do peso será maior que a da normal e as pessoas se sentirão "mais leves".

Se o elevador se movimenta com aceleração igual à da gravidade (subindo retardado ou descendo acelerado), a normal se anula, pois as pessoas deixam de comprimir o chão, o que lhes dá a sensação de ausência de peso.

Essa situação na qual o peso aparente é zero, pois o passageiro acompanha o elevador sem se apoiar sobre ele, é chamada de **imponderabilidade**. Esse estado de imponderabilidade pode ser provocado também no interior de um avião que sobe em movimento retardado ou desce em movimento acelerado.

Esse tipo de situação é usado para treinar os astronautas em situações nas quais o peso aparente é zero. Lembre-se de que um astronauta em órbita da Terra está em queda livre. É por causa desse fenômeno que ele flutua no interior das naves. O seu peso aparente vale zero, mas a Terra continua a atraí-lo, ou seja, ele possui um peso real, que só seria zero caso não houvesse nenhum planeta ou estrela na região onde ele se encontra.

Exemplo 16.1 – Peso aparente dentro de um elevador em aceleração

Uma pessoa de 80,0 *kg* está sobre uma balança dentro do elevador que desce freando com uma aceleração de 3 m/s^2. Qual é a leitura da balança?

Solução

Pela terceira lei de Newton, o módulo da força de cima para baixo exercida pela pessoa sobre a balança é igual ao módulo da força normal exercida pela balança sobre a pessoa. Logo, podemos resolver o problema calculando o módulo N da força normal.

Veja o diagrama do corpo livre para a pessoa na Figura 16.1. Com o eixo de coordenadas escolhido (eixo *y* para cima), as forças que atuam sobre ela são o peso $\vec{P}$, dado por:

$$P = m\,g = (80{,}0\ kg)(9{,}80\ m/s^2) = 784\ N$$

e pela força normal N exercida pela balança. Pela segunda lei de Newton, temos que:

$$\sum F = N - mg = ma$$

$$N = m(a+g) = 80(9.8+3) = 1024N\,.$$

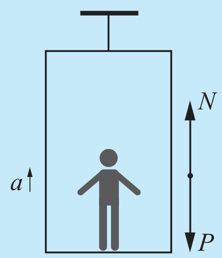


Figura 16.1 – Peso aparente em elevador.

Observe que a aceleração do elevador é a mesma da pessoa. Portanto, enquanto ele está freando, a balança empurra a pessoa para cima com uma força de 1.024 *N*. Pela terceira lei de Newton, a pessoa empurra a balança para baixo com a mesma força. Fica fácil perceber então que, se a leitura da balança é 1.024 *N*, ou seja, 240 *N* a mais do que o peso real da pessoa, a **leitura da balança só pode indicar o peso aparente**.

16.2 FORÇAS NO MOVIMENTO CIRCULAR

Quando um corpo descreve um movimento circular com velocidade escalar constante, existe uma força resultante atuando sobre ele, pois sua velocidade está mudando continuamente de direção (primeira e segunda leis de Newton).

A aceleração resultante dessa força é denominada **aceleração centrípeta** (aponta para o centro da trajetória) e seu módulo é dado por:

$$a_c = \frac{V^2}{R}, \tag{16.1}$$

em que V é o módulo da velocidade e R é o raio da trajetória.

É importante ressaltar que **a força centrípeta não é uma força específica, mas sim o nome da força resultante atuando sobre o corpo e que aponta para o centro da trajetória circular**.

Veja alguns exemplos:

1. Um carro fazendo uma curva é mantido na sua trajetória pela força de atrito, logo ela é a força centrípeta.
2. Um satélite é mantido em órbita em torno da Terra pela força de atração gravitacional, logo ela é a força centrípeta.
3. Uma pedra girando presa a um barbante e mantida na trajetória pela tensão na corda, logo ela é a força centrípeta neste caso.

ATIVIDADE 16.1 – FORÇA CENTRÍPETA NO GLOBO DA MORTE

O Globo da Morte é um espetáculo de circo no qual um motociclista executa várias voltas dentro de um globo.

Indique nas situações da Figura 16.2 quais forças compõem a força centrípeta.

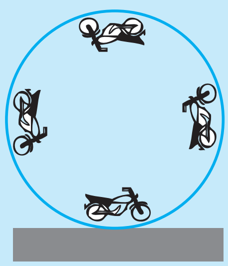


Figura 16.2 – Globo da Morte.

Para estudar a dinâmica do MCU (movimento circular uniforme) é preciso o conhecimento de algumas grandezas que definem o movimento circular uniforme, que é periódico.

RELEMBRANDO

1. **Período (T)**: é o tempo medido em segundos que se gasta para dar uma volta completa.
2. **Módulo da velocidade angular (ω)**: em uma volta completa é percorrido um ângulo de 2π radianos no intervalo de tempo de um período (T). Dessa forma, definimos a velocidade angular como sendo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{16.2}$$

Como $f = \frac{1}{T}$, podemos escrever a equação anterior sendo:

$$\omega = 2\pi f. \tag{16.3}$$

Dessa forma, o módulo da velocidade angular também é denominado **frequência angular (ω)**. Isto é, o número de voltas completas que são dadas em um segundo. A frequência angular também é medida em *rad/s*.

Relação entre velocidade angular e velocidade linear

Em uma volta completa, é percorrida uma distância linear igual $2\pi R$ (R é o raio da curva percorrida). O tempo gasto para percorrer essa distância é igual a um período. Usando a definição de velocidade, chegamos à relação:

$$V = \omega R. \tag{16.4}$$

Assim sendo:

$$a_c = \omega^2 R. \tag{16.5}$$

As demonstrações são deixadas aqui como exercício. Pratique!

Exemplo 16.2 – Estação espacial girando

Um problema para a vida humana no espaço exterior é o peso aparente igual a zero. Um modo de contornar o problema seria fazer a estação espacial girar em torno do centro com uma taxa constante. Isso criaria uma "gravidade artificial" devido ao efeito da inércia na borda externa da estação espacial.

Se o diâmetro da estação espacial for igual a 300 m, quantas revoluções por minuto seriam necessárias para que a aceleração da "gravidade artificial" fosse igual a 6 m/s^2 (aproximadamente 60% da aceleração da gravidade na Terra)?

Solução

Como a aceleração da gravidade será provocada pela força centrípeta, temos

$$a_c = \frac{V^2}{R}.$$

Usando 16.4 e sabendo que a frequência angular significa o número de rotações por segundo, basta multiplicar o valor encontrado por 60 para obter a frequência angular em *rad/min*. Logo, a estação deveria executar 11,9 *rad/min*. Dividindo por 2π *rad* resulta em 1,89 giros por minuto:

$$0,6 \times 9,8 m/s^2 = \frac{V^2}{300m}$$

$$V = \sqrt{1764} = 42 m/s$$

$$V = \omega R$$

$$\omega = \frac{29,7}{150} = 0,198 rad/s = 11,9 rad/\min.$$

É interessante comentar sobre a possível existência de uma **"força centrífuga" em referenciais não inerciais**. Por exemplo, você não deve usá-la para explicar a sensação de estar sendo jogado para fora numa curva. Isto porque você está em movimento circular, portanto não fica parado no mesmo lugar. Depois, porque se existisse uma força centrífuga para "equilibrar" a força centrípeta, a força resultante seria zero e você sairia pela tangente. Não se esqueça de que, num referencial acelerado, não vale nem a primeira nem a segunda lei de Newton. Assim, mesmo que você sinta uma "força centrífuga" te jogando para fora numa curva, a verdade é que você tende a manter seu movimento em linha reta, enquanto o carro se move para o lado de dentro da curva, empurrando seu corpo. **Ou seja, não existe força centrífuga**.

16.3 AS FORÇAS FUNDAMENTAIS

As interações físicas entre os corpos na natureza podem ser descritas em termos de quatro forças fundamentais: a de gravitação, a elétrica, a nuclear forte e a nuclear fraca.

A força gravitacional é atrativa e varia com o inverso do quadrado da distância entre os corpos sobre os quais atua. Ela é uma força de intensidade fraca, mas está sempre presente e possui longo alcance.

A força elétrica também varia com o inverso do quadrado da distância, sendo muito mais forte que a gravitacional (cerca de 10^{40} vezes maior). Ela pode ser uma força atrativa ou repulsiva; essa dualidade pode diminuir sua ação, devido ao efeito de blindagem causada pela presença de cargas elétricas de sinais opostos.

A força elétrica, quando se manifesta em cargas elétricas em movimento, aparece sob a forma conhecida como força magnética. Esse fato levou J. C. Maxwell (1831-1879) a construir uma teoria na qual os fenômenos elétricos e magnéticos foram unificados, isto é, considerados uma manifestação da mesma força elétrica, porém em situações diferentes.

A força nuclear forte é a responsável por manter coeso o núcleo dos átomos. Com efeito, o núcleo é formado por nêutrons (que não têm carga elétrica) e por prótons (com carga elétrica positiva), todos ocupando uma região de cerca de 10^{-15} m. Se não houvesse a força nuclear forte, haveria repulsão entre os prótons e o núcleo não existiria por muito tempo.

A força nuclear forte é de alcance muito pequeno, deixando de ter influência a distâncias maiores que as dimensões dos núcleos atômicos. Ela é, entretanto, muito forte para poder equilibrar a força elétrica.

A força nuclear fraca é responsável por algumas formas de decaimento radioativo, por exemplo, o decaimento de um nêutron em um próton, um elétron e um antineutrino, chamada decaimento beta. Por não ser suficientemente intensa, a força nuclear fraca não consegue manter coesas as partículas que formam o nêutron. Seu alcance é muito pequeno, cerca de cem vezes menor que o da força nuclear forte.

A variação das forças elétrica e gravitacional com o inverso do quadrado da distância levou Maxwell a tentar unificar essas duas forças, isto é demonstrar que elas eram manifestações do mesmo fenômeno, porém em situações diferentes. Maxwell falhou principalmente porque a força gravitacional é só atrativa, enquanto a elétrica pode também ser repulsiva. A tentativa de unificação de forças da natureza continuou com Einstein, que tentou unificar a força elétrica e a gravitacional através de uma teoria geométrica (deformação do espaço) que representasse os fenômenos gravitacionais e elétricos.

O trabalho de Einstein e Maxwell inspirou outros, que buscam a chamada "teoria do campo unificado", na qual todas as quatro forças possam ser reduzidas a aspectos de um mesmo fenômeno. No fim da década de 1960, Abdus Salam (1926-1966), Steven Weinberg (1933) e S. L. Glashow (1932) formularam uma teoria que unificava a força elétrica e a nuclear fraca. Hoje há muitos físicos tentando a chamada "teoria da grande unificação" (Grand Unified Theory, GUT), que seria a unificação das forças elétrica e nuclear forte e fraca. Há também tentativas de se fazer uma teoria chamada de "supergravidade", na qual todas as quatro forças seriam unificadas.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 16.1 – Força centrípeta no Globo da Morte

Para resolver este exercício você deve se lembrar que a força centrípeta é a resultante das forças que atuam no corpo e apontam para o centro da trajetória. Considere primeiro as situações em que a motocicleta está na parte mais alta e na parte mais baixa do globo.

1. Parte superior: na parte superior existe o peso para baixo e a força normal (a motocicleta está apoiada no globo) também para baixo; neste caso a força centrípeta será: $F_c = P + N$.

2. Parte inferior: na parte inferior existe o peso para baixo e normal para cima (sentidos opostos); nesse caso a força centrípeta será: $F_c = N - P$.

3. Nas duas laterais, o peso que é perpendicular para baixo não contribui para a força centrípeta, que será apenas a reação normal $F_c = N$.

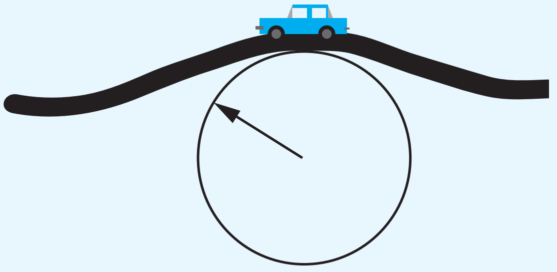
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Uma pequena caixa de plástico com massa de 0,300 *kg* se desloca com movimento circular uniforme em um plano horizontal sem atrito. A caixa está segura por uma corda de 0,140 m de comprimento presa a um pino fixado na superfície. Se a caixa completa duas revoluções por segundo, ache a força F exercida sobre ela pela corda.

E2. Um carro está fazendo uma curva plana com raio $R = 200\ m$. Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada for igual $\mu_s = 0.8$, qual é a velocidade máxima com a qual o carro pode completar a curva sem deslizar?

E3. Você está dirigindo um Opala antigo com uma amiga que está sentada do lado do passageiro no banco dianteiro. O Opala possui assentos muito largos. Você gostaria que sua amiga sentasse mais perto de você e decide usar a física para atingir seu objetivo romântico fazendo uma volta rápida. Para que lado (esquerdo ou direito) você deve fazer o carro girar para que a sua amiga se desloque para perto de você? Se o coeficiente de atrito estático entre o assento e sua amiga for igual a 0,35 e você mantiver uma velocidade constante de 20 *m/s*, qual deve ser o raio máximo da curva que você pode fazer para que sua amiga ainda deslize para o seu lado?

E4. Um piloto de testes dirige um carro sobre o topo de uma montanha, cuja seção reta pode ser aproximada para uma circunferência de raio 250 *m* (veja a figura). Qual é a maior velocidade que ele pode ter sem que o carro abandone a pista no topo da montanha?



E5. Durante a prova das olimpíadas de inverno a equipe brasileira de *bobsled* fez uma curva de 7,5 metros com uma velocidade de 90 *km/h* (1 *km/h* = 1/3,6 *m/s*). Qual é a aceleração sobre os participantes em termos da aceleração da gravidade (quantos g)?

E6. Um estudante de física, cujo peso é 550 *N*, está sobre uma balança portátil apoiada no piso de um elevador. Quando o elevador está parando, a leitura da balança indica 450 *N*.

a) Qual é a aceleração do elevador (módulo, direção e sentido)?

b) Determine a aceleração se a leitura da balança for 670 *N*.

c) Quando a balança indicar um peso zero, o estudante deve ficar preocupado? Explique.

PROBLEMAS DA UNIDADE 5

P1. Um carregador empurra uma caixa de 100 *kg* de modo que ela desliza com velocidade constante para baixo de uma rampa inclinada de 10° acima da horizontal. Despreze o atrito que atua sobre a caixa. Se a força aplicada pelo carregador for paralela ao plano inclinado, ache o módulo dessa força.

P2. Um estudante de 570 *N* está sobre uma balança portátil apoiada no piso de um elevador. Quando o elevador está parando, a leitura da balança indica 470 *N*.

a) Calcule o módulo, a direção e o sentido da aceleração do elevador.

b) Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração quando a leitura da balança indicar 670 *N*.

P3. Uma caixa de 20 *kg* está em repouso sobre uma rampa que faz um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético é de 0,26 e o coeficiente de atrito estático é de 0,36.

a) A medida que o ângulo θ aumenta, qual é o ângulo mínimo no qual a caixa começa a deslizar?

b) Para esse ângulo, ache a aceleração depois que a caixa começa a deslizar.

c) Para esse ângulo, ache a velocidade da caixa depois que ela percorreu 4,0 *m* ao longo do plano inclinado.

P4. Uma caixa é largada de um avião que se desloca de oeste para leste a uma altitude de 1.300 *m* com uma velocidade de 80,0 *m/s* em relação ao solo. O vento aplica uma força constante de 160 *N* sobre a caixa dirigida horizontalmente em sentido oposto ao do deslocamento do avião. Em que local e quando (em relação ao local e ao instante da queda) a caixa chega ao solo?

P5. Dois objetos com massas de 6,00 *kg* e 3,00 *kg* estão suspensos a 0,600 *m* acima do solo presos nas extremidades de uma corda de 5,00 m que passa sobre uma polia fixa sem atrito. Os dois objetos partem do repouso. Calcule a altura máxima atingida pelo objeto de 3,00 *kg*.

UNIDADE 6
Energia e trabalho

A segunda lei de Newton é fácil de ser aplicada em situações em que a força ou as forças que atuam na partícula são constantes. Assim, a aceleração adquirida pela partícula é sempre a mesma e fica fácil aplicar as fórmulas da cinemática.

Quando a partícula se move sob a ação de uma força variável, que depende da posição, sua aceleração também é variável com a posição da partícula. Assim os métodos discutidos anteriormente não são suficientes para descrever completamente o problema. Então devemos empregar outro tipo de solução ou de descrição do problema. Essa nova possibilidade de descrição dos problemas utiliza os conceitos de **trabalho** e **energia**.

AULA 17

Trabalho de uma força

Objetivo

- Aplicar o conceito de trabalho em problemas simples e relacioná-lo com situações cotidianas.

17.1 PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Em situações em que existe uma força variável os métodos anteriormente estudados não são suficientes para descrever completamente o movimento da partícula. Mas no caso de uma força variável com a posição $\vec{F}(\vec{r})$ podemos usar uma formulação alternativa utilizando os conceitos de **trabalho** e **energia**.

De acordo com o **Princípio da Conservação da Energia**, a grandeza **energia pode ser convertida de uma forma em outra, mas jamais pode ser criada ou destruída**.

Por exemplo, em um motor à combustão, parte da **energia química** do combustível é convertida em **energia térmica** e em **energia mecânica** (movimento). Já em um forno elétrico, a **energia elétrica** é convertida em **energia térmica**, que cozinha o alimento. Em uma mola que foi comprimida ou esticada há **energia potencial elástica** armazenada que pode ser usada para acelerar um corpo, transformando-se em **energia cinética**. Como o Princípio da Conservação da Energia jamais foi violado, acredita-se que, se forem somadas todas as formas de energia envolvidas em determinado processo, o resultado será sempre o mesmo em qualquer instante de tempo. Isso nos leva a crer que, de modo geral, **a energia total permanece constante**.

ATIVIDADE 17.1

Identifique situações de seu dia a dia nas quais se aplica o Princípio da Conservação da Energia. (Você não irá encontrar resposta comentada para esta atividade.)

17.2 TRABALHO

O conceito de trabalho é básico para as relações de energia. Toda vez que mencionamos a palavra trabalho você rapidamente associa a ideia de uma atividade qualquer, seja ela física ou mental. Quando você aplica uma força constante, dirigida horizontalmente, para empurrar um objeto pesado sobre o chão, ele se move na mesma direção e sentido da força aplicada. Podemos dizer, então, que foi realizado um **trabalho** sobre o objeto, **exercida uma força** que provocou seu **deslocamento**.

Para definirmos o trabalho em termos físicos, imagine um corpo (visto como uma partícula) que sofre um deslocamento $\vec{d}$ ao longo de uma linha reta sob a ação de uma força $\vec{F}$ constante. Define-se o **trabalho realizado** por essa força **sobre esse corpo** como sendo o **produto escalar da força** $\vec{F}$ **pelo deslocamento** $\vec{d}$.

Ou seja:

$$W = \vec{F} \bullet \vec{d} \qquad (17.1)$$

(**trabalho realizado por força constante sobre um corpo em um deslocamento retilíneo**).

Quanto maior for a força $\vec{F}$ aplicada sobre um corpo ou o deslocamento $\vec{d}$, maior será o trabalho realizado. A unidade de trabalho no SI é o Joule (J):

1 Joule = (1 Newton)(1 metro) ou 1 *J* = 1 *N*.*1* m.

O módulo do produto escalar $\vec{F} \bullet \vec{d}$ é dado por:

$$F\,d\,\cos\phi, \qquad (17.2)$$

sendo ϕ o ângulo entre $\vec{F}$ e o sentido do movimento do corpo. Dessa maneira, **somente a componente da força na direção do deslocamento realiza trabalho** (ou seja, contribui para o deslocamento em questão).

RELEMBRANDO – PRODUTO ESCALAR

Quando se fazemos o produto escalar de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, obtemos um escalar, ou seja, um número. Representamos o produto escalar desses vetores por $\vec{A} \bullet \vec{B}$ e esse produto é definido por $\vec{A} \bullet \vec{B} = ABcos\theta$, em que θ é o ângulo entre esses dois vetores.

Vamos determinar o produto escalar dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \cdot 1 \cdot cos0^{\circ} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 1 \cdot 1 \cdot cos90^{\circ} = 0.$$

Sendo $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ e $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$, temos:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.$$

IMPORTANTE

Por que somente a componente da força na direção do deslocamento realiza trabalho?

Porque uma força pode mudar o módulo, a direção e o sentido da velocidade de um corpo. Quando a força não muda o seu módulo (o movimento circular uniforme é um exemplo) e é perpendicular ao deslocamento,ela não realiza trabalho, por isso o trabalho é definido como sendo o produto escalar. Seu intuito é o de medir a ação de uma força no espaço, o que se traduz pela variação do módulo da velocidade.

Considere um objeto sendo empurrado com uma força $\vec{F}$ constante, durante todo o deslocamento, e que faz um ângulo ϕ com a direção do movimento, conforme ilustrado na Figura 17.1.

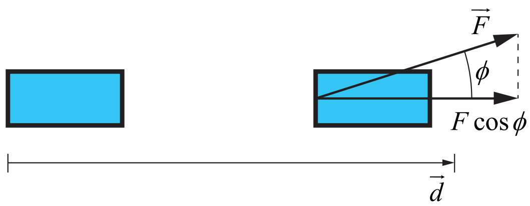


Figura 17.1 – Um objeto sendo empurrado.

Nesse caso, o módulo do trabalho é dado pela equação 17.3:

$$W = Fdcos\phi, \tag{17.3}$$

sendo que o produto $Fcos\phi$ é exatamente a componente da força $\vec{F}$ na direção do deslocamento $\vec{d}$.

O trabalho é uma grandeza escalar, pois é definido a partir do cálculo do produto escalar de dois vetores (a força e o deslocamento). Uma força constante atuando da esquerda para a direita, sobre um corpo que se move alguns centímetros da esquerda para a direita, **realizaria o mesmo trabalho** caso atuasse de cima para baixo provocando o mesmo deslocamento.

ATIVIDADE 17.2

Desenhe um diagrama representando a situação descrita e calcule o valor do trabalho. (Você não irá encontrar resposta comentada para esta atividade.)

Também é importante notar que o trabalho pode ser positivo, negativo ou nulo, conforme o ângulo entre a força $\vec{F}$ e o deslocamento $\vec{d}$:

- **Se ϕ estiver entre zero e 90°, $cos\phi$ será positivo, logo W também será positivo;**

- **Se ϕ estiver entre 90° e 180°, $cos\phi$ será negativo, logo W também será negativo;**
- **Se a força for perpendicular ao deslocamento, $\phi = 90^o$, o trabalho realizado pela força será nulo.**

O trabalho nulo merece um exame mais cuidadoso. Veja o exemplo a seguir em que uma **força atua**, mas **não realiza** nenhum **trabalho**.

Exemplo 17.1

De acordo com o senso comum, você pensa que faz um "trabalho árduo" ao segurar uma sacola cheia de compras enquanto espera o ônibus por alguns minutos. Você não realiza nenhum trabalho **sobre a sacola** porque não existe nenhum deslocamento, apesar de seu braço ter ficado esticado por algum tempo. O seu braço dói porque seus músculos se contraem e se dilatam continuamente para equilibrar o peso da sacola. Você consegue responder se existe algum trabalho nessa situação? Observe o que acontece com as tiras de uma sacola de plástico quando você coloca muita coisa dentro dela e faça uma analogia com sua musculatura.

Solução

Você não realizaria nenhum trabalho **sobre a sacola ao caminhar**, pois, apesar de a sacola sofrer um deslocamento, a força que você exerce para suportar a sacola está na vertical e não possui nenhuma componente na direção do deslocamento, que está na horizontal. Na equação do trabalho, $\cos\phi = 0$, pois $\phi = 90^o$. Lembre-se de que em qualquer situação na qual a força aplicada é perpendicular à direção do deslocamento o trabalho realizado sobre o corpo será sempre nulo.

17.2.1 Trabalho total

Quando mais de uma força atua sobre um corpo, na direção do seu deslocamento, o trabalho total pode ser obtido calculando o trabalho de cada força individualmente. A partir daí, como o trabalho é uma grandeza escalar, o trabalho total W_T realizado por todas as forças sobre o corpo é obtido com a soma algébrica de cada um dos trabalhos individuais:

$$W_T = \sum W \; = \; W_1 + W_2 + \ldots + W_n. \qquad (17.4)$$

Uma alternativa consiste em calcular a soma das forças que atuam sobre o corpo, na direção do seu deslocamento, e em seguida usar esse resultado como $\vec{F}$ para calcular o trabalho. **Certifique-se sempre de que você especificou com precisão a força que realiza o trabalho a ser calculado**. Acompanhe o exemplo 17.2.

Exemplo 17.2

Um trator puxa uma grande tora de madeira de 200 kg, conforme mostra a Figura 17.2. A tora é puxada durante certo tempo por 32 m e a força $\vec{F}$ que o trator faz sobre ela faz um ângulo de 23,2º com a horizontal. Sabendo-se que $F = 3.000\ N$ é constante e que existe uma força de atrito de $f = 1.400\ N$, determine o trabalho realizado por cada força que atua sobre a carga. Determine também o trabalho total W_T realizado por todas as forças.

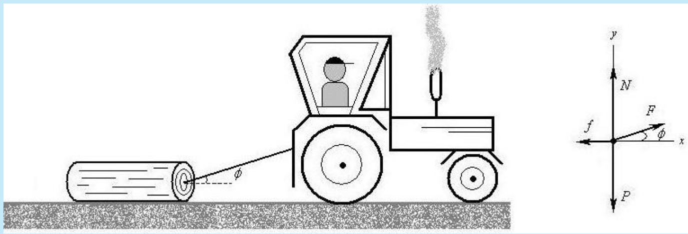


Figura 17.2 – Diagrama de corpo livre para a tora de madeira.

Solução

Primeiramente, calcule os trabalhos individuais. O ângulo entre o peso e o deslocamento é igual a 90°, portanto o trabalho realizado pelo peso $\vec{P}$ é igual a zero porque sua direção é perpendicular ao deslocamento, ou seja, $W_P = 0$.

Pela mesma razão, o trabalho realizado pela força normal $\vec{N}$ é igual a zero. Isto é, $W_N = 0$.

O trabalho W_F realizado pelo trator é:

$$W_F = (3.000\ N)cos(23,2^o)(32\ m) = 88.236,6\ N \times m \qquad 88,2\ kJ.$$

A força de atrito possui sentido contrário ao do movimento, de modo que $\phi = 180^o$. Como $\cos\phi = -1$, o trabalho W_f do atrito será:

$$W_f = (1.400\ N)(-1)(32\ m) = \text{-}44.800\ J \qquad 44{,}8\ kJ.$$

O trabalho total sobre a tora é a soma algébrica dos trabalhos calculados até aqui. Logo:

$$W_T = W_P + W_N + W_F + W_f = 0 + 0 + 88,2\ kJ + (-44,8\ J) = \ 43{,}4\ kJ.$$

Utilizando o método da soma das forças na direção do deslocamento, teríamos, de acordo com a Figura 17.2, uma soma diferente de zero somente na direção x (horizontal), uma vez que só há movimento nesta direção:

$$\sum F_x = Fcos\phi + (-f) = (3.000\ N)cos(23,2^o) + (-1.400\ N) = 1,36 \times 10^3\ N$$

Aplicando este valor na expressão para o cálculo do trabalho:

$$W_T = (1,36 \times 10^3\ \ N)(32\ m) = 4,34 \times 10^4\ J = \ 43{,}4\ kJ,$$

temos o mesmo resultado encontrado usando o método anterior.

ATIVIDADE 17.3 – CÁLCULO DO TRABALHO TOTAL

Um homem está puxando um trenó carregado por 19 m ao longo de um terreno horizontal, conforme mostra a Figura 17.3. O peso total do trenó carregado é igual a 400 N. O homem exerce uma força constante de 95 N formando um angulo de 20° acima da horizontal. A força de atrito tem módulo igual a 21 N. Calcule o trabalho que cada força realiza sobre o trenó e o trabalho total realizado por todas as forças.

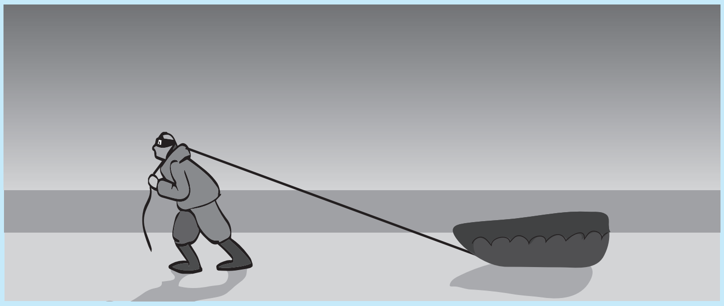


Figura 17.3 – Homem puxando um trenó.

Pense e responda: E quando o deslocamento sob a ação de uma (ou várias) força(s) se dá com velocidade constante? O que se pode dizer do trabalho realizado?

17.3 MASSA E ENERGIA

A lei de conservação da massa é uma das bases da mecânica newtoniana. Sua aceitação é consequência do fato de ela produzir resultados muito importantes, sobretudo em física e em química. Antoine Lavoisier (1753-1794), considerado o pai da química, usou-a como base nos cálculos quantitativos em reações químicas e outros estudos.

A conservação da massa foi contestada por Albert Einstein quando desenvolveu sua Teoria da Relatividade Restrita; ele mostrou que, para que certas leis físicas continuassem a ser válidas, era necessário abandonar a invariância da massa. Assim, a massa de uma partícula deveria ser uma função da sua velocidade, de acordo com a equação:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (17.5)$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso relativamente a um observador que a mede, m é a massa medida pelo mesmo observador quando a partícula se move em relação a ele, c é a velocidade da luz. A quantidade m_0 é conhecida como massa de repouso da partícula.

A equação acima mostra que a massa da partícula cresce com a sua velocidade e que ela se tornaria infinita quando $v = c$. Ela foi testada e sua previsão comprovada através de experiências com elétrons em altíssimas velocidades, produzidos por aceleradores de partículas ou por emissão de elétrons por núcleos de certos átomos.

Einstein mostrou também, na sua Teoria da Relatividade, que havia uma relação entre a energia de uma partícula e sua massa. Por exemplo, quando comprimimos uma mola, dando-lhe energia potencial U, sua massa também aumenta, passando a valer $\Delta m = m_0 + \frac{U}{c^2}$. Da mesma forma, quando cedemos uma quantidade de calor Q a um dado sistema físico, sua massa sofre um acréscimo de $\Delta m = \frac{Q}{c^2}$. Esses resultados são consequência do princípio de equivalência entre massa e energia: para cada unidade de energia E de qualquer tipo, cedida a um sistema, a massa desse sistema aumenta de uma quantidade:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}. \tag{17.6}$$

A equivalência entre massa e energia, expressa pela famosa expressão $E = \Delta m\, c^2$, é uma das grandes descobertas do século XX. Ela está na base da explicação de um grande número de fenômenos atômicos e nucleares, como, por exemplo, as bombas atômicas, a geração de energia pelas estrelas, a radioatividade etc.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 17.3 – Cálculo do trabalho total

O trabalho realizado pelo peso P é igual a zero porque sua direção é perpendicular ao deslocamento. O ângulo entre a força gravitacional e o deslocamento é igual a 90°, e $\cos(90°) = 0$.

Pela mesma razão, o trabalho realizado pela força normal N é igual a zero. Logo, $W_P = W_N = 0$.

O trabalho W_F realizado pelo homem é:

$$W_F = (95\ N)cos(20^o)(19\ m) = 1.696\ N \times m \quad 1,70\ kJ.$$

A força de atrito possui sentido contrário ao do deslocamento de modo $\cos\phi = -1$. O trabalho W_f do atrito será:

$$W_f = (21\ N)(-1)(19\ m) = -399\ J.$$

O trabalho total sobre o trenó é a soma algébrica dos trabalhos calculados até aqui:

$$W_T = W_P + W_N + W_F + W_f = 0 + 0 + 1,70\ kJ + (-399\ J) = 1.297\ J \quad 1,30\ kJ.$$

Utilizando o método vetorial, haveria força resultante somente na direção x, uma vez que só há movimento nesta direção:

$$\sum F_x = F\cos\phi + (-f) = (95\ N)\cos(20^o) + (-21\ N) = 68,3\ N.$$

Aplicando esse valor na equação 17.2, temos que:

$$W_T = (68,3\ N)(19\ m) = 1.297\ J = \ 1,30\ kJ,$$

mesmo resultado que foi encontrado utilizando-se o outro método.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Para empurrar um baú de 27 *kg* para cima, ao longo de um plano inclinado de 25°, um trabalhador exerce uma força de 120 *N*, paralela ao plano. Depois que o baú desliza 3,6 *m*, que trabalho foi realizado sobre o baú

a) pelo trabalhador?

b) pela força da gravidade?

c) pela força normal ao plano?

E2. Um cabo de aço é usado para baixar verticalmente um bloco de massa M através de uma distância d, com uma aceleração constante para baixo de $g/4$.

a) Encontre o trabalho realizado pelo cabo no bloco.

b) Encontre o trabalho realizado pela força da gravidade.

E3. Um esquiador aquático é puxado por um barco a motor por meio de um cabo de reboque. Ele esquia lateralmente, de modo que o cabo faz um ângulo de 13° com a direção do movimento, e em seguida continua em linha reta. A tensão no cabo é igual a 175 *N*. Qual é o trabalho realizado sobre o esquiador durante um deslocamento de 300 *m*?

AULA 18

Trabalho, energia cinética e trabalho de forças variáveis

Objetivos

- Relacionar o conceito de trabalho com o de energia cinética de um corpo;
- Aplicar o conceito de trabalho em situações em que a força é variável.

18.1 TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

Quando um corpo se move sob a ação de uma força resultante não perpendicular à direção de seu movimento, podem ser destacados dois fenômenos: sua velocidade varia (primeira e segunda leis de Newton) e é realizado um trabalho sobre esse corpo. Será possível concluir que existe uma relação entre o trabalho realizado por essa força resultante e a variação de velocidade do corpo?

Vamos fazer um pouco de álgebra com as equações básicas do movimento uniformemente acelerado. Em módulo podemos escrever que:

$F_r = ma$ força resultante;

$W_T = Fd$ trabalho total (considerando a soma das forças na direção do deslocamento);

$V_f^2 = V_i^2 + 2ad$ equação de Torricelli (considerando a soma das forças na direção do deslocamento).

Substituindo a equação da força e de Torricelli na equação do trabalho e após um pouco de álgebra, temos:

$$W_T = \frac{mV_f^2}{2} - \frac{mV_i^2}{2} \tag{18.1}$$

O termo $\frac{mV^2}{2}$ é denominado energia cinética do corpo. Ao longo deste livro usaremos os termos E_c ou K (do grego *kinetos*, que significa "em movimento") para a energia cinética.

A equação 18.1 mostra que o **trabalho total realizado sobre o corpo** W_T é dado por:

$$W_T = \Delta E_c = E_{cf} - Ec_i \, , \qquad (18.1)$$

sendo E_{ci} e E_{cf} as energias cinéticas inicial e final do corpo, respectivamente. A equação 18.2 é conhecida como **teorema do trabalho-energia**. Ela confirma as seguintes observações:

- quando W_T **é positivo, a velocidade do corpo aumenta**, ou seja, ele **ganha** energia cinética;
- quando W_T **é negativo, a velocidade do corpo diminui**, ou seja, ele **perde** energia cinética;
- finalmente, se W_T **é nulo**, a velocidade é constante e **não há ganho nem perda** de energia cinética pelo corpo.

ATIVIDADE 18.1 – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA

Substitua a equação da força e de Torricelli na equação do trabalho e demonstre o teorema do trabalho-energia. (Você não irá encontrar resposta comentada para esta atividade.)

18.2 TRABALHO E ENERGIA NO CASO DE FORÇAS VARIÁVEIS

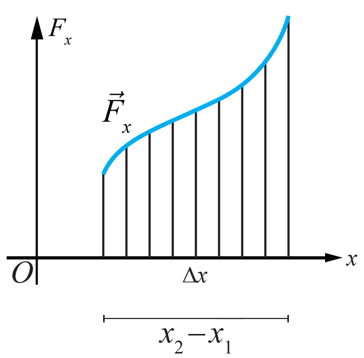


Figura 18.1 – Gráfico da componente F_x da força em função da coordenada x da partícula.

Quando uma força variável com a posição do corpo atua sobre ele, temos que generalizar a definição de trabalho dada pela equação 17.1.

Inicialmente, considere um movimento retilíneo sob a ação de uma força $\vec{F}$ variável em módulo, que possui uma componente de módulo F_x, que varia com x paralela ao deslocamento. Suponha uma partícula movendo-se ao longo do eixo Ox de um ponto x_1 a um ponto x_2. A Figura 18.1 mostra um gráfico do componente F_x da força em função da coordenada x da partícula.

Se o deslocamento total for dividido em pequenos intervalos, nos quais a força pode ser considerada constante, podemos aplicar a definição de trabalho. Assim, na Figura 18.1, o deslocamento total foi dividido em pequenos intervalos de tamanho Δx, de modo que o trabalho realizado pela força média no deslocamento Δ*x* seja aproximadamente o seu produto escalar pelo deslocamento Δ*x*.

Como o trabalho é uma grandeza escalar, basta somarmos o resultado desse produto para cada intervalo. Esse procedimento nada mais é do que a definição de integral.

O trabalho realizado pela força nesse deslocamento é dado então por:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \bullet d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx. \qquad (18.3)$$

ATIVIDADE 18.2

Mostre que a equação 18.3, na verdade, é outra forma do teorema do trabalho--energia cinética.

ATIVIDADE 18.3

Calcule o trabalho realizado sobre um corpo que repousa sobre uma superfície horizontal pela força, também horizontal, $F(x) = 5x^3 - 2x$. O corpo se desloca da posição $x = 0\ m$ até $x = 1\ m$.

18.2.1 Deformação de molas

Devemos aplicar uma força de módulo F em cada uma das extremidades de uma mola para esticá-la além de sua posição de equilíbrio x_0. Quando o alongamento x provocado na mola for pequeno, pela lei de Hooke, o módulo de F será proporcional ao deslocamento x, tal que:

$$F = kx.$$

Substituindo F na equação 18.3, temos que:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Esse resultado também pode ser obtido graficamente. Analisando a Figura 18.2, vemos que a área do triângulo sombreado é: $\frac{1}{2}(kx)(x)$, ou seja, $\frac{1}{2}kx^2$, que é o trabalho realizado pela força de *0* a *x*.

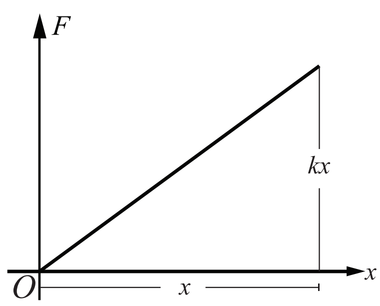


Figura 18.2 – Gráfico da força restauradora da mola em função da deformação.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 18.2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

$$W = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

que é a relação $W_T = \Delta E_c = \Delta E_{cf} - \Delta Ec_i$.

Atividade 18.3

$$W = \int_0^1 (5x^3 - 2x)dx = \left[\frac{5x^4}{4} - \frac{2x^2}{2}\right] = \frac{5}{4} - 1 = 0,25J$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um trenó com massa igual a 9,00 *kg* se move em linha reta sobre uma superfície horizontal sem atrito. Em um ponto de sua trajetória, sua velocidade possui módulo igual a 4,00 *m/s*; depois de percorrer mais 2,40 *m* além desse ponto, sua velocidade possui módulo igual a 6,00 *m/s*. Calcule a força que atua sobre o trenó, supondo que essa força seja constante e que ela atue no sentido do movimento do trenó.

E2. Uma bola de futebol de massa igual a 0,410 *kg* possui velocidade inicial de 2,00 *m/s*. Um jogador de futebol dá um chute na bola, exercendo uma força constante de módulo igual a 45,0 *N* na mesma direção e no mesmo sentido do movimento da bola. Até que distância seu pé deve penetrar na bola para que a velocidade da bola aumente para 6,00 *m/s*?

E3. Um jogador arremessa uma bola de beisebol de massa 250 *g* com velocidade inicial de 35,0 *m/s*. Exatamente antes de o jogador da base pegá-la no mesmo nível, a sua velocidade é reduzida para 33,5 *m/s*. Quanta energia foi perdida devido à resistência do ar?

E4. Um melão de 300 *g* é abandonado (sem velocidade inicial) da extremidade do telhado de um edifício a uma altura de 30 *m*.

a) Calcule o trabalho realizado pela gravidade sobre o melão durante seu deslocamento do telhado até o solo.

b) Qual é a energia cinética do melão imediatamente antes de ele colidir com o solo?

E5. Uma mola tem constante elástica de 16,0 *N/cm*.

a) Qual é o trabalho necessário para alongar a mola de 7,50 *mm* a partir de sua posição de repouso?

b) Qual o trabalho necessário para alongar a mola de 7,50 *mm* adicionais?

E6. Um bloco de gelo de 5,00 *kg* é colocado contra uma mola horizontal cuja constante da força é $k = 250$ *N/m*, sendo comprimida de 0,020 *m*. A mola é liberada e acelera o bloco em uma superfície horizontal. Despreze o atrito e a massa da mola.

a) Calcule o trabalho realizado pela mola sobre o bloco quando ele se desloca de sua posição inicial até o local em que a mola retorna ao seu comprimento sem deformação.

b) Qual é a velocidade do bloco no instante em que ele abandona a mola?

E7. Um pedreiro montou um dispositivo que dispara tijolos até a altura da parede na qual ele está trabalhando. Ele coloca o tijolo comprimindo uma mola vertical com massa desprezível e constante de mola $k = 470$ *N/m*. Quando a mola é liberada, o tijolo é disparado de baixo para cima. Sabendo que o tijolo possui massa de 1,90 *kg* e que ele deve atingir uma altura máxima de 3,8 *m* acima de sua posição inicial sobre a mola comprimida, qual é a distância que a mola deve ser inicialmente comprimida?

AULA 19

Potência

Objetivos

- Relacionar o conceito de trabalho com o tempo gasto para realizá-lo;
- Aplicar o conceito de potência em diversas situações.

19.1 POTÊNCIA MÉDIA E POTÊNCIA INSTANTÂNEA

O conceito de trabalho não leva em conta o tempo gasto para realizá-lo. Imagine que você queira fazer uma faxina em sua casa. Algumas pessoas conseguem realizar o trabalho da faxina mais rápido do que outras. Você, certamente, contratará alguém que gaste menos tempo para fazer o trabalho. Um estivador (pessoa que carrega cargas em um cais de porto) consegue realizar o trabalho de empilhar engradados "pesados" mais rápido do que você.

Para medir a rapidez com que o trabalho é realizado, em física, define-se uma grandeza: a **potência**. Ou seja, ela mede o trabalho realizado por unidade de tempo. A **potência média** é definida como:

$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{19.1}$$

Tomando o limite quando Δt tende para zero, obtemos a **potência instantânea**:

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{19.2}$$

No SI a potência é medida em watt (W), sendo que $1\,W = 1\,J/s$.

Em algumas situações a potência pode ser medida em quilowatt ($1\ kW = 1 \times 10^3\ W$) ou megawatt ($1\ MW = 1 \times 10^6\ W$). Se você observar sua conta de energia elétrica, verá que seu consumo é medido em kWh (quilowatt-hora). Essa unidade é, na verdade, uma unidade de energia e não de potência.

ATIVIDADE 19.1

Mostre que o kWh tem dimensões de energia. (Você não irá encontrar resposta comentada para esta atividade.)

A potência de motores é medida em **hp** (*horsepower* ou cavalo-vapor), 1 hp = 746 W.

ATIVIDADE 19.2

Pesquise e descubra a origem dessa unidade de medida da potência de um motor. (Você não irá encontrar resposta comentada para esta atividade.)

A potência também pode ser calculada pelo produto da força com a velocidade:

$$P = \vec{F} \bullet \vec{v}. \tag{19.3}$$

Se utilizarmos a velocidade média, obteremos a potência média.

ATIVIDADE 19.3

Mostre que $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, usando as definições de trabalho e potência. (Você não irá encontrar resposta comentada para esta atividade.)

Exemplo 19.1

Um elevador de obra deve elevar uma carga total de 800 kg até uma altura de 30 m (aproximadamente 10 andares) com velocidade constante. Qual é a potência do motor desse elevador se ele realiza essa tarefa em três minutos? Dê a resposta em *watts* e em hp.

Solução

Se o elevador sobe com velocidade constante, a força que o motor faz é igual ao peso do elevador:

$$F = mg = 7.840\ N.$$

Como a força está no mesmo sentido do deslocamento (o elevador sobe e a força é para cima):

$$W = Fd = 2{,}35 \times 10^5\ J.$$

A potência do motor será:

$$P = \frac{2{,}35 \times 10^5}{180} = 1{,}31 \times 10^3\ W.$$

Uma potência de 1,31 kW equivale a 1,75 hp.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. O braço de um guindaste eleva uma carga de 1.200 *kg* a 10 *m* em 35 *s* com velocidade constante. Determine a potência do motor do guindaste.

E2. Um carro esportivo tem massa igual a 990 *kg* e vai de 0 a 100 *km/h* em 4,2 *s*. Calcule a sua potência média. (Suponha que a sua aceleração seja constante.)

E3. Uma pessoa está retirando água de uma cisterna com uma corda e um balde de 5,0 ℓ. O balde sobe com velocidade constante de 0,62 *m/s*.

a) Quais são o trabalho e a potência da força resultante?

b) Qual é a potência desenvolvida pela pessoa que puxa o balde?

c) Determine os trabalhos desenvolvidos pelas forças que atuam sobre o balde.

E4. Um caixote é puxado sobre um piso áspero, com velocidade constante, por uma força constante $F = 2{,}5\ N$, que faz um ângulo de 31° com a direção horizontal. O trabalho da força F é igual a 10 *J*.

a) Determine a velocidade do caixote.

b) Qual é o trabalho efetuado pela força F em 5 *s*?

E5. Um corpo está em repouso quando uma força F constante ergue-o 10 *m* verticalmente. Sabendo que o corpo tem 58 *kg*, faça os gráficos de velocidade e de potência em função de tempo.

E6. As cataratas do Iguaçu possuem 275 quedas, vazão de 1.500 m^3/s e 80 *m* de altura. Se toda a energia potencial das águas fosse ser convertida em energia elétrica, qual seria a potência que se poderia obter das quedas das cataratas?

E7. Um empregado faz a entrega de engradados de refrigerantes para o quinto andar pelas escadas de um prédio onde haverá uma festa. Cada engradado possui 9,0 *kg* e o quinto andar está a 12 *m* do solo.

a) Quantos empregados seriam necessários para entregar 100 engradados em 30 minutos se a potência de cada um for de 5 *W*? E se a potência dos empregados for de 10 *W*? Considere que cada empregado leva apenas um engradado.

b) Você acha possível nessa função um empregado ter potência de 100 *W*?

PROBLEMAS DA UNIDADE 6

P1. Uma bola de borracha abandonada de uma altura de 1,90 *m* é rebatida várias vezes pelo chão, perdendo 10% de sua energia cinética de cada vez. Depois de quantas colisões a bola não conseguirá se elevar acima de 0,95 *m*?

P2. Uma mulher está em pé parada em um elevador que sobe com aceleração constante enquanto ele se desloca a uma distância vertical de 19,0 *m*. Durante esse deslocamento, a força normal exercida pelo piso do elevador realiza sobre ela um trabalho de 8,25 *kJ* e a gravidade realiza sobre ela um trabalho de -7,35 *kJ*.

a) Qual é a massa da mulher?

b) Qual é a força normal exercida pelo piso do elevador sobre ela?

c) Qual é a aceleração do elevador?

P3. Um objeto que pode se mover ao longo do eixo *Ox* é atraído pela origem com uma força de módulo $F = ax^3$, em que $a = 5{,}00\ N/m^3$. Qual é a força *F* quando o objeto está situado no ponto

a) $x = 2{,}00\ m$?

b) $x = 3{,}00\ m$?

c) Qual é o trabalho realizado pela força F quando o objeto se desloca de $x = 2{,}00\ m$ até $x = 3{,}00\ m$?

P4. Você foi designado para projetar para-choques com molas para paredes de uma garagem de estacionamento. Um carro de 1.300 *kg* se movendo a 0,60 *m/s* não pode comprimir as molas mais do que 0,075 *m* antes de parar. Qual deve ser a constante da mola? Despreze a massa da mola.

P5. Uma força horizontal atua sobre um carrinho de massa m, de modo que sua velocidade v aumenta com a distância *x* segundo a equação $v = Cx$, em que *C* é uma constante.

a) Determine a força atuante sobre o carrinho em função da posição.

b) Qual é o valor do trabalho realizado pela força ao mover o carrinho de $x = 0$ até $x = x_1$?

UNIDADE 7
Energia potencial e conservação da energia

Em duas ou três dimensões, em que a trajetória da partícula é sempre uma curva, nem sempre é possível ou viável calcular o trabalho realizado sobre uma partícula num dado deslocamento e, assim, o conceito de trabalho perde a utilidade. Então, porque introduzimos esse conceito na Física? A resposta é que, felizmente, as forças mais importantes existentes na Natureza possuem uma característica especial que torna o uso do teorema do trabalho-energia muito útil. Para conhecer essa característica estudaremos algumas situações em que se calcula o trabalho realizado por essas forças.

AULA 20

Forças conservativas e não conservativas

Objetivos

- Definir forças conservativas e dissipativas;
- Conhecer as propriedades dessas forças.

20.1 UTILIDADE DO TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA

O teorema do trabalho-energia,

$$W_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \, ,$$

discutido nas aulas anteriores, permite que calculemos a velocidade de uma partícula de massa m em um ponto B do espaço, quando conhecemos a sua velocidade em um outro ponto A e o trabalho realizado pelas forças que nela atuam durante o seu deslocamento de A até B. Esse trabalho é dado por:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} \, , \tag{20.1}$$

em que $\vec{F}$ representa a soma das forças que atuam na partícula. Os limites da integral representam a posição da partícula no início e no fim do seu deslocamento.

Quando uma partícula se move em uma dimensão, o vetor $d\vec{s}$ tem sempre a mesma direção, que é a da reta descrita pela partícula. Para calcular o trabalho realizado por uma força $\vec{F}$, basta então conhecer o ângulo θ entre $\vec{F}$ e $d\vec{s}$ em cada ponto da trajetória da partícula.

Em duas ou três dimensões, o problema fica mais difícil porque, em geral, o vetor $d\vec{s}$ tem direção e sentido variáveis. Além disso, a trajetória da partícula é uma curva, e como $d\vec{s}$ é sempre tangente à curva em cada ponto dela, temos também que conhecer a curva descrita pela partícula para calcular o trabalho.

Essas considerações sugerem que nem sempre é possível ou viável calcular o trabalho realizado sobre uma partícula num dado deslocamento, e, assim, o conceito de trabalho perde a utilidade. As forças mais importantes existentes na Natureza possuem uma característica especial que torna o uso do teorema do trabalho-energia muito útil.

20.2 FORÇAS CONSERVATIVAS

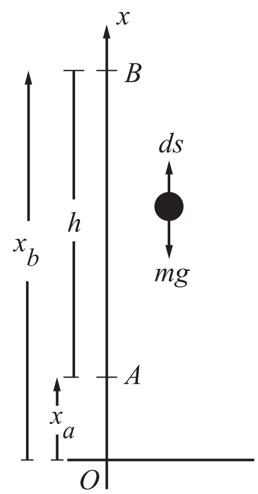


Figura 20.1 – Vetores $\vec{F} = m\vec{g}$ e $d\vec{s}$ de uma partícula em movimento vertical para cima.

Considere inicialmente um caso simples: uma partícula (por exemplo uma bola) de massa m é lançada verticalmente para cima. Calcule o trabalho realizado pela força da gravidade (peso da partícula) no deslocamento dela de um ponto A a outro B, situado a uma distância h de A (Figura 20.1).

Da figura temos que:

a) o peso da partícula é constante em módulo, tem direção vertical e está sempre com sentido para baixo;

b) a partícula se move de A para B verticalmente e no sentido de baixo para cima, o vetor $d\vec{s}$ em qualquer ponto da trajetória está dirigido de baixo para cima, então, o ângulo θ entre o vetor peso e o vetor deslocamento $d\vec{s}$ é constante e igual a π.

Escolhendo um sistema de coordenadas com origem O no solo e eixo $O\,x$ vertical e positivo para cima, as coordenadas de A e B são, respectivamente x_a e x_b. Então:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{x_a}^{x_b} F\cos\theta ds = \int_{x_a}^{x_b} mg\cos\pi dx =$$

$$W_{AB} = -mg\int_{x_a}^{x_b} dx = -mg(x_b - x_a) = -mgh.$$

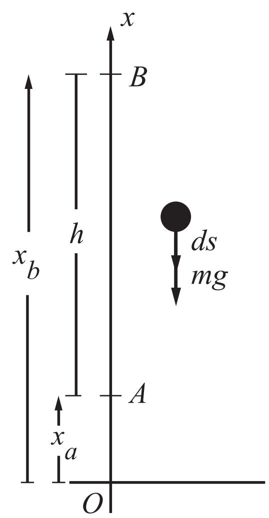


Figura 20.2 – Vetores $\vec{F} = m\vec{g}$ e $d\vec{s}$ de uma partícula em movimento vertical para baixo.

Calcule agora o trabalho da força peso da partícula que se move verticalmente para baixo, no deslocamento de um ponto B para outro A, situado a uma distância h de B. Nesse caso (Figura 20.2), será utilizado o mesmo sistema de coordenadas adotado acima.

Assim o vetor $d\vec{s}$ está sempre dirigido verticalmente para baixo, assim como o peso; o ângulo entre esses vetores agora é zero. Como $d\vec{s}$ aponta no sentido negativo de Ox, devemos levar isso em conta escrevendo $ds = -dx$. Temos, então:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{x_a}^{x_b} F\cos\theta ds = \int_{x_a}^{x_b} mg\cos\pi dx$$

Se compararmos os resultados, veremos que:

$$W_{AB} = -mg\int_{x_a}^{x_b} dx = -mg(x_b - x_a) = -mgh.$$

E, então:

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA} = 0.$$

A equação acima nos mostra que: **o trabalho realizado pela força da gravidade em um deslocamento de um ponto *A* para outro ponto *B* é igual e de sinal contrário ao trabalho que ela realiza no deslocamento do ponto *B* para o ponto *A***.

Outra maneira de dizermos isso é: **o trabalho realizado pela força da gravidade em uma trajetória fechada (aquela em que o ponto de partida é o mesmo que o de chegada) é nulo**. Uma força que tem essa característica é chamada de força conservativa.

Uma força conservativa tem outra propriedade que só fica evidente quando o movimento da partícula sobre o qual ela atua ocorre no plano ou no espaço. Para poder determiná-la, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 20.1

Calcule o trabalho realizado pela força da gravidade no deslocamento de uma partícula de um ponto A a outro B ao longo da trajetória retilínea AB no plano vertical mostrado na Figura 20.3. A distância entre A e B é L; a altura de B em relação a A é h.

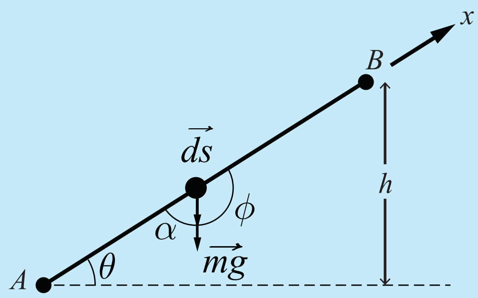


Figura 20.3 – Movimento de uma partícula ao longo de AB.

Nesse caso, a força da gravidade não é paralela ao deslocamento, fazendo um ângulo constante ϕ com ele. Como a trajetória é retilínea, podemos escolher a origem de coordenadas no ponto A e um eixo Ox ao longo da reta AB. Então $|\vec{ds}| = dx$ e:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet \vec{ds} = \int_0^L mg\cos\phi dx.$$

Mas $\cos\phi = \cos(\pi - \alpha) = -sen\theta = -h/L$. Levando esse resultado na integral, obtemos que:

$$W_{AB} = mg\frac{h}{L}\int_0^L dx = -mgh.$$

Novamente, comparando esse resultado com os obtidos na discussão acima, podemos ver que os dois são iguais.

Isso significa que o trabalho exercido pela força da gravidade no deslocamento da partícula de A até B é o mesmo nas duas trajetórias, isto é, independe da trajetória do corpo ao ir de A para B.

ATIVIDADE 20.1

Cálculo do trabalho da força peso da partícula que se move ao longo da trajetória formada pelas retas C_1 e C_2 da Figura 20.4.

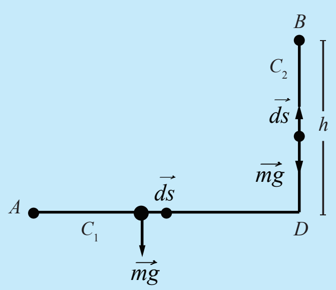


Figura 20.4 – Trabalho realizado no deslocamento ao longo de C_1 e C_2.

O exemplo 20.1 e a atividade 20.1 ilustram a propriedade fundamental de uma força conservativa: **se uma força é conservativa, o trabalho realizado por ela sobre uma partícula no deslocamento de um ponto *A* a um ponto *B* é independente da trajetória que a partícula descreve ao ir de *A* até *B*.**

20.3 FORÇAS NÃO CONSERVATIVAS OU DISSIPATIVAS

Quando o trabalho que a força realiza depende da trajetória da partícula, essa força é denominada **força não conservativa** ou **dissipativa**. Um exemplo dela é a força de atrito. Calculemos o trabalho da força de atrito no deslocamento de uma partícula sobre uma mesa horizontal ao longo das trajetórias *AD* e *ABD* da Figura 20.5. O módulo dessa força é constante e vale $f = \mu mg$, pois a mesa é horizontal. A sua direção é a do movimento da partícula e seu sentido, oposto a ele.

Para a trajetória *AD*, integrando sobre a reta *AD* (tal como foi feito no exemplo 20.1), temos que:

$$W_{AD} = \int_0^a f \cos\pi ds = -\mu mg \int_0^a ds = -\mu mga.$$

Ao longo de *ABD* podemos escrever:

$$W_{AD} = W_{AB} + W_{BD} = -\mu mg \int_0^b dx - \mu mg \int_0^c dy = -\mu mg(b+c).$$

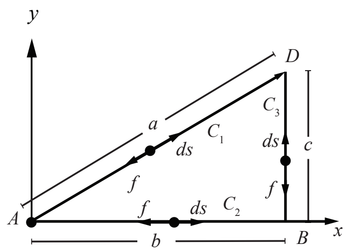


Figura 20.5 – Trabalho da força de atrito ao longo de *AD* e *ABD*.

Como $a < b + c$, o trabalho (W_{AD}) realizado pelo atrito no deslocamento da partícula de *A* até *D* depende da trajetória que a partícula tem ao se deslocar entre esses dois pontos.

Portanto, podemos dizer que **uma força é não conservativa quando o trabalho que ela realiza sobre uma partícula depende da trajetória que a partícula segue ao se deslocar entre um dado ponto *A* e um dado ponto *B*.**

A questão importante no conceito de forças conservativas e dissipativas é que, para as forças conservativas, o trabalho realizado por elas sobre uma partícula, no deslocamento de um ponto *A* para outro *B* do espaço, depende apenas da posição relativa de *A* e *B*; já o trabalho realizado pelas forças dissipativas, além de depender da posição relativa desses pontos, depende da trajetória percorrida pela partícula para ir de *A* até *B*.

A independência do trabalho com a trajetória é que dá substância e utilidade ao teorema do trabalho-energia cinética, pois, como o trabalho realizado no deslocamento entre dois pontos *A* e *B* depende apenas da posição relativa de *A* e *B* e como esse trabalho é igual à variação da energia cinética entre esses pontos, a energia cinética da partícula no ponto B é uma função **unívoca** da energia cinética da partícula no ponto A, e vice-versa. Isso significa que, para calcular o trabalho realizado por uma força conservativa, podemos utilizar qualquer trajetória entre A e B, mesmo que ela não seja a real. Obviamente, essa trajetória é escolhida de modo a facilitar os cálculos.

ATIVIDADE 20.2

Cálculo do trabalho da força peso da partícula que se move ao longo da linha reta que une os pontos A e B da Figura 20.3.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 20.1

Neste caso, podemos calcular o trabalho total com a soma dos trabalhos realizados ao longo de C_1 e C_2. Então, $W_{AB} = W(C_1) + W(C_2)$. Escolhendo a origem de um sistema de coordenadas Axy no ponto A, com eixo Ax positivo no sentido de AD, temos que as coordenadas do ponto A são $(0, 0)$; as do ponto D são $(x_d, 0)$ e as do ponto B são (h, x_d). Logo:

$$W(C_1) = W_{AD} = \int_0^{x_d} mgcos\left(\frac{\pi}{2}\right)dx = 0.$$

O cálculo do trabalho ao longo da trajetória C_2 já foi feito no exemplo 20.1 e o resultado é:

$$W(C_2) = W_{DB} = \int_0^{h} mgcos\pi dx = -mgh.$$

Assim, o trabalho total é:

$$W_{AD} + W_{DB} = W_{AB} = -mgh.$$

Atividade 20.2

Ao invés de calcular o trabalho diretamente ao longo da reta AB, você pode calculá-lo usando a trajetória da Figura 20.4, composta das retas C_1 e C_2, tal como foi feito na atividade 20.1, porque a força da gravidade é conservativa. A vantagem é que o cálculo fica mais fácil.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Uma pedra de 0,5 *kg* se move verticalmente para cima até uma distância de 15 *m*, retornando depois para sua posição inicial.

a) Qual é o trabalho realizado pela força gravitacional durante o movimento da pedra para cima?

b) Qual é o trabalho realizado pela força gravitacional durante o movimento da pedra para baixo?

c) Qual é o trabalho total realizado pela força gravitacional durante todo o movimento na subida e na descida?

d) A força gravitacional é conservativa ou não conservativa? Explique.

E2. Um caderno de 0,5 *kg* desliza sobre uma mesa horizontal. A força de atrito cinético sobre o caderno possui módulo igual a 1,4 *N*.

a) Qual é o trabalho realizado pela força de atrito durante um deslocamento de 2,00 *m* da direita para a esquerda?

b) O caderno se desloca agora 2,00 *m* da esquerda para a direita voltando ao ponto inicial. Durante o segundo deslocamento de 2,00 *m*, qual é o trabalho realizado pela força de atrito?

c) Qual é o trabalho total realizado pela força de atrito durante o deslocamento total de ida e volta ao ponto inicial?

d) A força de atrito é conservativa ou não conservativa? Explique.

AULA 21

Energia potencial

Objetivos

- Definir energia potencial;
- Calcular várias formas de energia potencial.

21.1 DEFINIÇÃO DE ENERGIA POTENCIAL

O trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula, em um deslocamento de um ponto A a outro B, não depende da trajetória da partícula entre esses dois pontos, depende apenas da posição relativa desses pontos. Nesse caso, pode-se definir uma função **matemática** que represente esse trabalho. Ela é uma função unívoca das coordenadas dos dois pontos A e B e **independente da trajetória da partícula**. Essa função é denominada **energia potencial**.

Por definição, ao trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula em um deslocamento de um ponto A a outro B associa-se uma **função energia potencial** U, tal que:

$$W_{AB} = -\Delta U; \tag{21.1}$$

ou:

$$\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = -(U_B - U_A). \tag{21.2}$$

Assim, por definição, a **variação** da energia potencial associada a uma força $\vec{F}$ entre um ponto B e outro ponto A do espaço é:

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s}. \tag{21.3}$$

Esta última equação envolve algumas considerações importantes que temos que ter sempre em mente:

a) **Não** definimos energia potencial em um ponto do espaço; definimos **a variação** da energia potencial associada à força $\vec{F}$ entre dois pontos; a cada força conservativa que atua sobre a partícula, associamos uma variação de energia potencial dada pela equação 21.3;

b) Essa variação de energia potencial é medida pelo negativo do trabalho da força a ela associada no delocamento da partícula entre os dois pontos;

c) Como definimos variação da energia potencial, não tem significado físico falar de energia potencial em termos absolutos. Entretanto, considerando a equação 21.3, vemos que, se **arbitrariamente** tomarmos $U_A = 0$, a diferença $U(B) - U(A)$ passa a ser **numericamente** igual a U_B:

$$U(B) = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} \qquad (21.4)$$

Assim, podemos falar de energia potencial no ponto *B* **em relação ao ponto *A***, em que **arbitrariamente** fizemos $U(A) = 0$. Esse ponto *A* é denominado **nível de energia potencial**.

A equação 21.4 nos diz que a energia potencial no ponto *B*, associada à força $\vec{F}$, **em relação ao ponto *A*** (nível de energia potencial), é o negativo do trabalho realizado pela força $\vec{F}$ no deslocamento da partícula do nível de energia potencial *A* até o ponto *B*.

Como:

$$U(B) = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_B^A \vec{F} \bullet d\vec{s} \ ,$$

alguns autores definem a energia potencial no ponto *B* em relação ao ponto *A* como o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ no deslocamento da partícula do ponto *B* até o nível de energia potencial *A*.

De modo geral, o nível de energia (em que $U = 0$) é escolhido como sendo o ponto em que a força se anula; isso simplifica os cálculos.

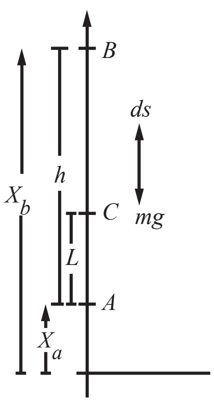


Figura 21.1 – Diferença de energia potencial entre dois pontos *B* e *A*.

Exemplo 21.1

Calcule a diferença de energia potencial gravitacional entre dois pontos *A* e *B* separados por uma altura *h* (Figura 21.1):

De acordo com a equação 21.3, temos que:

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int_{x_a}^{x_b} F\cos\theta ds =$$

$$U(B) - U(A) = -\int_{x_a}^{x_b} mg\cos\pi dx = mg(x_b - x_a) = mgh.$$

ATIVIDADE 21.1

Calcule a energia potencial gravitacional do ponto B ao ponto A.

Exemplo 21.2

Calcule a energia potencial em um ponto A em relação a outro C, situado a uma altura L acima de A, com a origem de coordenadas em A (Figura 21.1).

Se o nível de energia potencial é o ponto C, temos que $U(C) = 0$; com a origem de coordenadas em A, temos que $x_a = 0$. Então:

$$U(A) \equiv U(A) - U(C) = -\int_{x_c}^{x_a} \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int_{L}^{0} mg cos0(-dx) = mg\int_{L}^{0} dx = -mgL.$$

Exemplo 21.3

Calcule agora a diferença de energia potencial $U(B) - U(A)$ entre dois pontos A e B no trajeto de um corpo preso a uma mola (Figura 21.2). Como foi visto nas aulas anteriores, a força de restauração da mola contra qualquer deformação a que fique sujeita é proporcional a essa deformação e tem sentido oposto a ela. A deformação da mola consiste no aumento ou na diminuição de seu comprimento. Se $\vec{x}$ é essa deformação, a força é $\vec{F} = -k\vec{x}$.

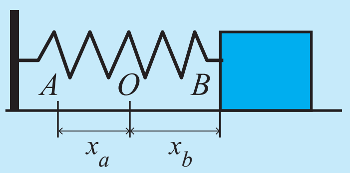


Figura 21.2 – Diferença de energia potencial entre dois pontos B e A.

Tomando como origem de um sistema de coordenadas o ponto O em que o corpo se localiza quando a mola não está deformada, as coordenadas dos pontos A e B são, respectivamente, x_a e x_b. Então:

$$U(B) - U(A) = -\int_{x_a}^{x_b} \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int_{x_a}^{x_b} kx(\cos\pi)dx = \frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x_a}^{x_b} = \frac{1}{2}k(x_b^2 - x_a^2).$$

ATIVIDADE 21.2

Calcule a energia potencial da mola no ponto B em relação ao ponto A.

ATIVIDADE 21.3

Calcule a energia potencial da mola no ponto A em relação ao ponto B.

O nível de energia potencial não tem nenhuma relação com o sistema de coordenadas que especifica a posição do corpo. Ele pode ser tomado em qualquer ponto do espaço, coincidente ou não com a origem de coordenadas. Em geral, para simplificar os cálculos, o nível zero de energia potencial é tomado no ponto em que a força associada à energia potencial é nula. Esse ponto pode ou não ser a origem do sistema de coordenadas que especifica as posições de todos os pontos do espaço.

Na atividade 21.1, por exemplo, a energia potencial no ponto B, em relação ao ponto O (onde a força restauradora da mola é nula), é:

$$U(B) = U(B) - U(O) = -\int_O^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int_0^{x_b} -kx\,dx = \frac{1}{2}kx_b^2.$$

Quando uma partícula está sujeita a várias forças conservativas, pode-se definir uma energia potencial associada a cada uma delas. A energia potencial total é a soma das energias potencias associadas a cada força. Os níveis zero de energia potencial podem ser escolhidos arbitrariamente, mas, em geral, é melhor escolher um único para todas elas.

Exemplo 21.4

Seja uma massa m presa a um suporte por uma mola de massa desprezível (Figura 21.3). Sobre o corpo atuam duas forças: a força de atração gravitacional da Terra (o peso da massa) e a força restauradora da mola, pois o peso desloca a massa para baixo fazendo aparecer imediatamente a força da mola.

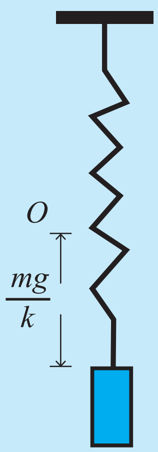


Figura 21.3 – Energia potencial de um sistema vertical massa-mola.

O peso da massa é constante, mas a força restauradora da mola não; ela aumenta à medida que a massa cai, pois o deslocamento da mola de sua posição de equlíbrio aumenta. Em um certo ponto O, a força restauradora se iguala ao peso. Essa posição torna-se, então, a nova posição de equilíbrio do sistema massa-mola.

Em relação à posição de equilíbrio da mola, a deformação x_0 da mola é dada pela condição:

$$kx_0 = mg, \qquad \text{que resulta:} \qquad x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Podemos escolher o ponto O não somente como origem de um sistema de coordenadas Ox (dirigido para baixo na figura), como também como nível zero de energia potencial elástica e energia potencial gravitacional. A energia potencial total em um ponto situado a uma distância x da origem de coordenadas é a soma da energia potencial elástica e da gravitacional:

$$U = U_e + U_g \ .$$

Tomando como nível zero de energia potencial o ponto O, temos:

$$U = -\int_0^x -kx\,dx - \int_0^x mg\,dx = \frac{1}{2}kx^2 - mgx.$$

ATIVIDADE 21.4

Calcule a energia potencial do sistema bloco-mola em um plano inclinado (Figura 21.4) em relação à posição de equilíbrio da mola.

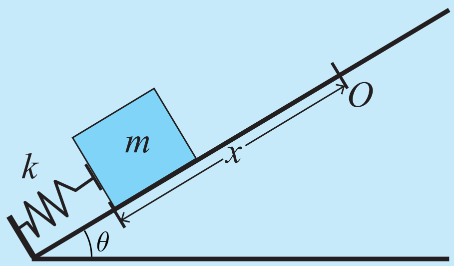


Figura 21.4 – Energia potencial de um sistema massa-mola em um plano inclinado.

Exemplo 21.5 – Energia potencial gravitacional

Considere duas partículas, respectivamente de massas m_1 e m_2. A força de atração gravitacional que m_1 exerce sobre m_2 é, de acordo com a Lei de Gravitação Universal:

$$F_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad G = 6.67 \times 10^{-12}\ N.m^2 / Kg^2,$$

em que r é a distância entre as massas. Ela está dirigida na linha que une as partículas (Figura 21.5), no sentido de m_2 para m_1 (portanto no sentido contrário ao do vetor-posição $\vec{r}$ da massa m_2 relativamente a m_1; daí o sinal negativo na fórmula).

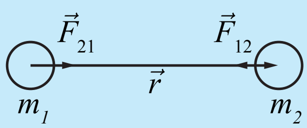


Figura 21.5 – Força de atração gravitacional entre duas partículas.

A massa m_2 também exerce a mesma força $\vec{F}_{21}$ sobre m_1. A equação anterior também se aplica a esse caso, mas, agora, o vetor $\vec{r}$ tem o sentido de m_2 para m_1.

A força de atração gravitacional entre duas partículas se anula no infinito. Se tomarmos o nível zero de energia potencial no infinito, a energia potencial gravitacional da massa m_2, sob ação da força gravitacional da massa m_1, à distância r de m_1 é:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = Gm_1 m_2 \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2}dr = Gm_1 m_2 \left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{Gm_1 m_2}{r}.$$

21.2 RELAÇÃO ENTRE FORÇA E ENERGIA POTENCIAL

A variação da energia potencial associada a uma força $\vec{F}$ entre um ponto B e outro ponto A do espaço é:

$$U_B - U_A = \int_A^B dU = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s}.$$

Mas:

$$\vec{F} \bullet d\vec{s} = (F\cos\theta)ds = F_s\,ds,$$

em que F_s é a componente de $\vec{F}$ na direção de $d\vec{s}$. Então, diferenciando essa expressão vem:

$$F_s = -\frac{dU}{ds}, \qquad (21.5)$$

isto é, **a força é igual à derivada da energia potencial a ela associada, na direção do deslocamento**.

21.3 MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL E FORÇAS CONSERVATIVAS

A conservação da energia mecânica,

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E, \qquad (21.6)$$

nos dá a posição e a velocidade de uma partícula sob ação de uma força conservativa.

Podemos ver que tanto a força quanto a aceleração não aparecem nela explicitamente, mas ela pode ser utilizada para determinar a posição da partícula. Para isso, resolvemos primeiro a equação 21.6 para a velocidade:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}, \qquad (21.7)$$

em que o sinal positivo ou negativo deve ser escolhido de acordo com o sentido da velocidade relativamente ao eixo de coordenadas. Da equação 21.7 vem:

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{[E - U(x)]}} = \sqrt{\frac{2}{m}}dt.$$

Se tomarmos $x = x_0$ em $t = t_0$, a integral desta equação fica:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{[E - U(x)]}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\int_{t_0}^{t} dt, \qquad (21.8)$$

que dá x em função de t.

Exemplo 21.6

Considere um corpo de massa m preso a uma mola de constante k. Seja a origem de um eixo orientado Ox coincidente com a posição de equilíbrio da mola, que é também o nível zero de energia potencial. A energia potencial da mola em qualquer ponto x, relativamente à posição de equilíbrio do sistema, é:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Suponhamos agora que, em $t = 0$, o corpo esteja em repouso ($v_0 = 0$), no ponto de coordenada $x = x_m$. Então, a energia total do sistema é:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_m^2 \equiv \frac{1}{2}kx_m^2;$$

e a equação 21.8 fica:

$$\int_{x_m}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{k}{2}[x_m^2 - x^2]}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\int_{t_0}^{t} dt;$$

ou, ainda:

$$\int_{x_m}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{x_m^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\int_{t_0}^{t} dt.$$

Tomando o sinal positivo e integrando, obtemos:

$$arcsen\left[\frac{x}{x_m}\right]_{x_m}^{x} = \sqrt{\frac{k}{m}}t;$$

ou:

$$arcsen\left[\frac{x}{x_m}\right] - arcsen(1) = \sqrt{\frac{k}{m}}t;$$

ou, ainda:

$$arcsen\left[\frac{x}{x_m}\right] - \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{k}{m}}t;$$

que dá:

$$x = x_m sen\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right] = x_m cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t\right].$$

No exemplo acima, verificamos que pudemos resolver a equação 21.8 porque conhecíamos E e $U(x)$; além disso, a integração dessa equação era fácil de ser feita. Entretanto, isso nem sempre é possível, e, quando isso não ocorre, podemos ainda ter noção do tipo de movimento da partícula. Por exemplo, seja uma partícula se movendo sob ação de uma força conservativa, cuja energia potencial é dada no gráfico da Figura 21.6, bem como quatro valores possíveis para a energia total E da partícula.

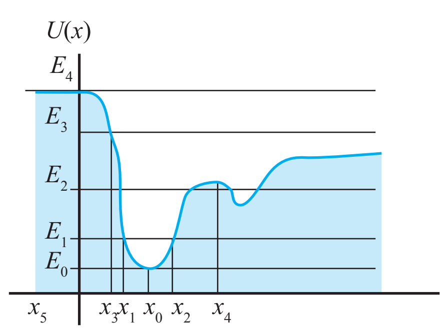


Figura 21.6 – Energia potencial em função da posição da partícula.

Sabemos que, da equação 21.7, v é o módulo da velocidade da partícula e, portanto, é um número positivo e real (o sinal da raiz indica apenas o sentido da velocidade). Assim, a equação 21.7 somente admite solução se $E \geq U(x)$ ao longo da trajetória da partícula; caso contrário, v é um número imaginário e a energia cinética seria então negativa. Olhando a figura, observamos que o menor valor possível para a energia total da partícula é $E = U(x_0)$. Então, no ponto x_0, a velocidade da partícula deve ser nula. Se dermos à partícula uma energia total E_1, ela só poderá se mover entre os pontos de coordenadas x_1 e x_2. Como nos pontos x_1 e x_2 temos $E_1 = U$, a partícula terá neles velocidade nula, estando, portanto, em repouso. Entre esses pontos, a velocidade não é nula. Observamos que, quando a partícula se desloca de x_1 para x_2, a diferença $E_1 - U$ vai aumentando até o ponto x_0 (onde ela é máxima), o que implica o aumento da velocidade da partícula; a partir de x_0, essa diferença começa a diminuir, e no intervalo entre x_0 e x_2 a velocidade da partícula diminui até chegar em x_2, em que fica em repouso.

Para energias totais maiores que E_1, a região accessível à partícula aumenta; para E_3, essa região vai do ponto x_3 a $+\infty$; para E_4, de $-\infty$ a $+\infty$.

Note também que, de acordo com a equação 21.5, a relação entre a força que atua na partícula e a energia potencial a ela associada é:

$$F = -\frac{dU}{dx}\cdot$$

Mas a derivada da função U em relação a x, em um ponto dado, é a inclinação da curva de energia potencial nesse ponto. Assim, determinando a derivada da função em um ponto da curva, podemos calcular o valor da força que atua na partícula. Com esse raciocínio, vemos que, no ponto x_1 a velocidade é zero, a inclinação da curva é negativa; mas, como a força é o negativo da derivada da energia potencial, no ponto x_1, a partícula está sujeita a uma força dirigida para o sentido positivo do eixo, que a faz se mover nesse sentido. No ponto x_2, a inclinação da curva é positiva, a força tem sentido negativo do eixo e faz a partícula se mover nesse sentido. Os pontos x_1 e x_2 são chamados **pontos de retorno do movimento**.

No ponto x_0, a inclinação da curva é nula e a curva da energia potencial passa por um mínimo. A força é nula e a partícula é dita estar em equilíbrio estável, pois qualquer tentativa de movê-la para a direita ou para a esquerda (dando, é claro, energia $E > E_0$) resulta na partícula tender a voltar ao ponto x_0 por causa da ação da força que começa a atuar nela.

No ponto x_5, se a partícula tiver energia $E_5 = U_5$, temos que $v = 0$ e a força atuando na partícula é nula. Entretanto, esse caso difere do anterior porque, como x_5 não é um ponto de mínimo de energia potencial, a partícula pode ser deslocada sem sofrer influência de força que a obrigue a voltar a x_5 ou a se afastar dele. Nesse caso, a partícula é dita estar em **equilíbrio neutro ou indiferente**.

No ponto x_4, a partícula está situada em um máximo da curva de energia potencial. A inclinação da curva aí é nula e a partícula não sofre ação da força associada à energia potencial. Entretanto, para $x > x_4$, a inclinação da curva passa a ser negativa e sobre a partícula passa a atuar uma força dirigida para o sentido positivo do eixo Ox, que afasta a partícula desse ponto. Da mesma forma, para $x < x_4$, a inclinação passa a ser positiva e sobre a partícula passa a atuar uma força dirigida para o sentido negativo do eixo *Ox*, afastando a partícula desse ponto. Dizemos, então, que nesse ponto, a partícula está em **equilíbrio instável**.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 21.1

De acordo com a equação 21.4, temos que:

$$U(B) = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int_{x_a}^{x_b} F cos\theta ds = mg(x_b - x_a) = mgh;$$

é importante notar que o nível de energia potencial não tem nenhuma relação com a origem do sistema de coordenadas usado para medir a posição desse ponto ou de qualquer outro ponto do espaço.

Atividade 21.2

De acordo com a equação 21.4 e com o cálculo do exemplo 21.3, $U(B)$ em relação ao ponto *A* é igual a $U(B) - U(A)$, quando tomamos o nível de energia potencial em *A* – $U(A) = 0$. Assim:

$$U(B) = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int_{x_a}^{x_b} -kxdx = \frac{1}{2}kx^2 \,\Big|_{x_a}^{x_b} = \frac{1}{2}k(x_b^2 - x_a^2).$$

Atividade 21.3

De acordo com a equação 21.4 e com o cálculo do exemplo 21.3, $U(A)$ em relação ao ponto *B* é igual a $U(B) - U(A)$, quando tomamos o nível de energia potencial em *A* – $U(A) = 0$. Assim:

$$U(A) = -\int_B^A \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int_{x_b}^{x_a} -kxdx = \frac{1}{2}kx^2 \,\Big|_{x_b}^{x_a} = \frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2).$$

Atividade 21.4

Seja x a compressão da mola pelo bloco, medido sobre o plano inclinado do ângulo θ. Então, como no exemplo 21.4, temos:

$$U = U_e + Ug = \frac{1}{2}kx^2 - mgh = \frac{1}{2}kx^2 - mgxsen\theta,$$

porque a distância x no plano inclinado corresponde a uma altura $h = xsen\theta$ abaixo do ponto *O*.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um pacote de arroz de 5,00 *kg* é elevado verticalmente com uma velocidade constante de 4,0 m/s até uma altura de 10,0 *m*.

a) Qual é o módulo da força necessária?

b) Qual é o trabalho realizado por essa força sobre o pacote?

E2. Uma esfera de massa 0,15 *kg* está presa a um fio de massa desprezível de comprimento igual a 0,90 *m*, formando assim um pêndulo. O pêndulo oscila até um ângulo de 45º com a vertical. Despreze a resistência do ar.

a) Qual é a velocidade da esfera quando ela passa pela posição vertical?

b) Qual é a tensão no fio quando ele faz um ângulo de 45º com a vertical?

c) Qual é a tensão no fio quando ele passa pela posição vertical?

E3. Uma força de 700 *N* estica uma certa mola até uma distância de 0,10 *m*. Qual é a energia potencial da mola quando uma massa de 50,00 *kg* está pendurada verticalmente nessa mola?

E4. Uma força paralela ao eixo *Ox* atua sobre uma partícula que se desloca ao longo desse eixo. Essa força produz uma energia potencial dada por $U(x) = \alpha x^3$, em que $\alpha = 1{,}30\ J/m^4$. Qual é a força (módulo, direção e sentido) quando a partícula se encontra em $x = -0{,}90\ m$?

E5. Considere uma força de $F_x = 5\ N$ constante.

a) Determine a função energia potencial $U(x)$ associada a essa força para uma posição de referência arbitrária x_0 para a qual $U = 0$.

b) Determine $U(x)$, de modo que $U = 0$ em $x = 4\ m$.

c) Determine $U(x)$, de modo que $U = 14\ J$ em $x = 6\ m$.

AULA 22

Conservação da energia

Objetivos

- Definir energia mecânica total;
- Estudar a sua conservação;
- Aplicar a conservação da energia na solução de problemas mecânicos.

22.1 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

O teorema do trabalho-energia estabelece que o trabalho realizado por uma força sobre uma partícula, no deslocamento de um ponto A para outro B, é igual à variação da energia cinética dessa partícula entre os pontos A e B:

$$W_{AB} = E_c(B) - E_c(A).$$

Se a força que atua na partícula for uma força conservativa, podemos definir também uma função energia potencial (U) associada a essa força, de modo que a diferença dos seus valores em A e B seja igual ao negativo do trabalho realizado pela força sobre a partícula no deslocamento de A até B:

$$W_{AB} = -[U(B) - U(A)].$$

Dessas duas equações podemos eliminar W_{AB} e obter:

$$E_c(B) - E_c(A) = -[U(B) - U(A)],$$

que pode ser escrita:

$$E_c(B) + U(B) = E_c(A) + U(A).$$

Essa equação mostra que, para uma força conservativa, a soma da energia cinética e da energia potencial da partícula é constante em qualquer ponto do espaço.

Denomina-se **energia mecânica total** ou simplesmente **energia mecânica** da partícula a **função matemática** E, que é a soma da energia cinética e potencial da partícula:

$$E = E_c + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x). \tag{22.1}$$

O resultado acima, conhecido como **princípio de conservação da energia**, mostra que, **quando uma partícula se move sob ação de uma força conservativa, a sua energia mecânica se conserva**.

Quando, sobre a partícula, atuam várias forças conservativas $\vec{F}_1, \vec{F}_1, \cdots \vec{F}_n$, a energia potencial total é a soma das energias potenciais associadas a cada uma das forças; a equação da conservação da energia fica, então:

$$E = E_c + \sum_{i=1}^{n} U_i \,.$$

É importante notar que quando atuam várias forças sobre a partícula, a energia potencial associada a cada uma delas é medida em relação a um nível de energia potencial que pode ser arbitrariamente estabelecido para cada uma delas; entretanto, os cálculos ficam mais simples se escolhermos um único nível para todas elas.

Exemplo 22.1

Seja um bloco de massa $m = 6{,}0\ kg$ colocado sobre um plano inclinado de um ângulo $\theta = 30^\circ$ sem atrito. O bloco é solto a partir do repouso no topo do plano e choca-se com uma mola de constante $k = 1.12 \times 10^3\ N/m$ no ponto mais baixo do plano inclinado (Figura 22.1). A mola, então, é comprimida de uma distância $d = 5{,}5\ cm$. Deseja-se calcular qual a distância que o bloco percorre sobre o plano inclinado.

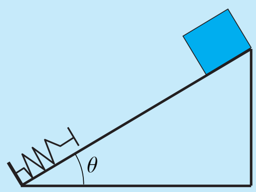


Figura 22.1 – Bloco no plano inclinado e mola.

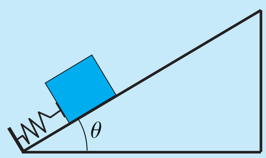


Figura 22.2 – Bloco comprimindo a mola.

Solução

Quando o bloco comprime a mola, temos a situação da Figura 22.2. Nela, O é o ponto em que a força da mola é nula; H é a altura do topo do plano em relação a O; h é a distância vertical do ponto de máxima compressão da mola em relação a O; x_0 é a deformação da mola.

Há duas forças conservativas atuando no bloco a partir do instante em que ele toca a mola: a da gravidade e a restauradora da mola. Escolhendo o mesmo nível zero para as energias potenciais como o ponto O, temos, para o topo do plano inclinado, lembrando que a mola está livre:

$$E_{c1} = 0 \qquad U_1(mola) = 0 \qquad U_1(corpo) = mgH,$$

o que dá, para a energia mecânica no topo do plano:

$$E_1 = E_{c1} + U_1(mola) + U_1(corpo) = 0 + 0 + mgH = mgH.$$

Para o ponto em que a mola tem sua máxima compressão, temos:

$$E_{c2} = 0 \qquad U_1(mola) = \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad U_1(corpo) = -mgh;$$

e a energia mecânica total se escreve para este ponto:

$$E_2 = E_{c2} + U_2(mola) + U_2(corpo) = 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 - mgh = \frac{1}{2}kx_0^2 - mgh;$$

A conservação da energia dá, então:

$$mgH = \frac{1}{2}kx_0^2 - mgh. \tag{22.2}$$

Note que a energia potencial da mola é dada em função da **distância sobre o plano** de que a mola é comprimida, enquanto que a energia potencial gravitacional é expressa em função da altura sobre a base do plano. Então, se D é a distância percorrida pelo bloco sobre o plano, temos que:

$$h = x_0 sen\theta \quad \text{e} \quad H = (D - x_0)sen\theta.$$

Levando esses valores de h e H na equação (22.2), obtemos:

$$mg(D - x_0)sen\theta = \frac{1}{2}kx_0^2 - mgx_0 sen\theta;$$

de onde tiramos:

$$D = \frac{kx_0^2}{2mg sen\theta},$$

que, com os valores numéricos, dá: $D = 0.06\ m$

ATIVIDADE 22.1

Resolver o exemplo 21.1 colocando o nível de energia no ponto onde a mola está com compressão máxima.

A conservação da energia é uma ferramenta muito importante quando tratamos de problemas em que a determinação da direção e sentido da força são difíceis ou quando o ângulo entre a força e o deslocamento varia com a posição do corpo. O fato de que a conservação da energia se aplica ao início e ao fim do intervalo de distâncias considerado ou do deslocamento torna dispensável conhecer como essas variáveis se comportam no intervalo.

Exemplo 22.2

Um bloco de massa m é solto do alto de um trilho curvo sem atrito mostrado na Figura 22.3. Determine a força resultante que atua sobre o bloco no ponto Q, sabendo que $h = 5R$.

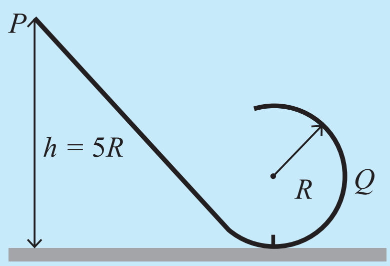


Figura 22.3 – Bloco deslizando sobre um trilho curvo.

Solução

No ponto Q há duas forças atuando sobre o bloco: o seu peso, com direção vertical e para baixo, e a força normal que o trilho exerce sobre o bloco.

Essa força é a força centrípeta que faz o bloco ter movimento circular. Então:

$$N = \frac{mv^2}{r}.$$

Para determinar a velocidade em Q, aplicamos a conservação da energia ao bloco. Ao longo de toda a sua trajetória, o bloco está sujeito a duas forças: o seu peso, que é uma força conservativa, e a reação normal do trilho sobre o bloco, que não realiza trabalho porque ela é sempre perpendicular ao deslocamento do bloco.

No alto do trilho (ponto inicial P), a velocidade do bloco é nula e sua altura em relação ao solo é $H = 5R$. A energia cinética do bloco – $E_c(P)$ – é, então, nula. Tomando o nível zero de energia potencial no solo, a energia potencial do bloco relativa a esse nível é:

$$U(P) = mg(5R).$$

No ponto Q, a energia cinética do bloco é:

$$E_c(Q) = \frac{1}{2}mv^2,$$

e a energia potencial relativa ao solo é:

$$U(Q) = mgR.$$

A conservação da energia dá:

$$0 + 5mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR;$$

de onde tiramos que:

$$N = \frac{mv^2}{R} = 8\,mg.$$

As forças são, portanto, a normal N e o peso mg. A força resultante tem módulo:

$$R = mg\sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}\,mg.$$

A direção é dada por:

$$\theta = arctg\left(\frac{mg}{N}\right) = arctg\left(\frac{1}{8}\right) = 7{,}^\circ 13,$$

com a horizontal, contado no sentido horário a partir do sentido de $\vec{N}$.

ATIVIDADE 22.2

De que altura acima do solo o bloco deve ser solto para que, no ponto mais alto da parte circular do trilho, a força que o corpo exerce sobre o trilho seja igual a seu peso?

22.2 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA E FORÇAS DISSIPATIVAS

Quando sobre uma partícula atuam forças conservativas e dissipativas, o teorema do trabalho-energia pode ser aplicado, separando as forças conservativas das dissipativas. Para as primeiras, podemos associar a elas um ou vários tipos de energia potencial (elástica, gravitacional etc); para as forças dissipativas, não podemos fazer isso. Com o teorema do trabalho-energia aplicado ao deslocamento da partícula entre dois pontos *A* e *B*, podemos escrever que:

$$W_{AB}(cons) + W_{AB}(dis) = E_c(B) - E_c(A).$$

Associando ao trabalho das forças conservativas uma variação de energia potencial, temmos que:

$$-[U(B) - U(A)] + W_{AB}(dis) = E_c(B) - E_c(A);$$

ou:

$$W_{AB}(dis) = E_c(B) - E_c(A) + U(B) - U(A) = [E_c(B) + U(B)] - [E_c(A) + U(A)];$$

ou ainda:

$$W_{AB}(dis) = E(B) - E(A), \qquad (22.3)$$

sendo E a energia mecânica da partícula.

Essa equação nos diz que, **quando atuam forças conservativas e dissipativas sobre uma partícula, o trabalho realizado pelas forças dissipativas no deslocamento da partícula de um ponto *A* para outro *B* é igual à variação da energia mecânica da partícula**.

Exemplo 22.3

Suponha que, no exemplo 22.1, o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano seja $\mu = 0,20$. Calculemos o valor da distância D' que o bloco deve percorrer para comprimir a mola da mesma quantidade $x_0 = 5,5\,cm$ do exemplo 22.1.

Solução

Agora, além da força de restauração da mola (que começa a atuar quando ela começa a ser comprimida) e da força da gravidade (que atua ao longo de todo o percurso do corpo), atua também uma força de atrito (ao longo de todo o percurso do corpo) que, como sabemos, se opõe ao movimento do corpo e tem módulo constante $f_a = \mu mg cos\theta$.

O trabalho da força de atrito ao longo da distância D é:

$$W = -\mu mg cos\theta D'.$$

A energia total inicial, no alto do plano inclinado, é:

$$E_i = K + U(grav) + U(mola) = 0 + mgH + 0 = mgH,$$

em que os níveis zero de energia potencial são tomados no ponto O. A energia total final, no ponto onde a mola tem compressão máxima, é:

$$E_f = K + U(grav) + U(mola) = 0 - mgh + \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Aplicando a equação 22.3, obtemos:

$$-\mu mgcos\theta D' = -mgh + \frac{1}{2}kx_0^2 - mgH,$$

ou:

$$-\mu mgcos\theta D' = -mg(h+H) + \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Como $h + H = D'sen\theta$ vem:

$$-\mu mgcos\theta D' = -mgD'sen\theta + \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Resolvendo para D', temos que:

$$mg(sen\theta - \mu cos\theta)D' = \frac{1}{2}kx_0^2,$$

ou:

$$D' = \frac{kx_0^2}{2mgsen\theta(1-\mu tg\theta)}.$$

Então, com $x_0 = 0{,}055\ m$, $m = 6{,}0\ kg$, $k = 1.12\times10^3$, $\theta = 30^\circ$, $\mu = 0{,}20$, o resultado é:

$$D' = 0.09\ cm.$$

Observe que, se compararmos essa equação com a que dá D, no exemplo 22.1, veremos que:

$$D' = \frac{D}{(1-\mu tg\theta)}.$$

Portanto, para comprimir a mola de 5,5 *cm*, o corpo deve percorrer uma distância maior, pois parte de sua energia total inicial (que é energia potencial gravitacional) é consumida para vencer a força de atrito.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 22.1

Nesse caso, com o mesmo sistema de coordenadas do exemplo 22.1, a energia potencial gravitacional do corpo no alto do plano é:

$$U_1(corpo) = mg(H+h) = mgD\text{sen}\theta.$$

A energia potencial da mola quando o corpo está no alto do plano é $U_1(mola) = 0$. A energia potencial gravitacional do corpo na posição de compressão máxima é $U_2(corpo) = 0$, pois o nível zero das energias agora está nesse ponto. A energia potencial da mola, na posição de compressão máxima pode ser calculada com:

$$U_2(mola) = -\int_{x_0}^{0} \vec{F} \cdot \vec{ds} = -\int_{x_0}^{0} kxdx = -\frac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_0}^{0} = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

A conservação da energia dá, então:

$$mgD\text{sen}\theta = \frac{1}{2}kx_0^2,$$

de onde tiramos:

$$D = \frac{kx_0^2}{2mg\,sen\theta},$$

mesmo resultado do exemplo 22.1.

Atividade 22.2

No ponto mais alto da parte circular do trilho, a força resultante que atua no corpo é $\vec{N} + m\vec{g}$. Então, escolhendo o sentido positivo do eixo Ox com origem nesse ponto e sentido para baixo, tem-se que:

$$N + mg = \frac{mv^2}{R},$$

sendo v a velocidade do blco nesse ponto.

Como a força que o corpo exerce sobre o trilho é a reação da força normal do trilho sobre ele, de acordo com a condição do problema, $N = mg$ e a equação acima ficam:

$$2mg = \frac{mv^2}{R},$$

de onde tiramos que:

$$mv^2 = 2mgR.$$

Para determinar v, usamos a conservação da energia. No ponto mais alto da seção circular do trilho:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R).$$

No ponto P, a energia total é:

$$E = 0 + mgh,$$

em que h é a altura de que deve ser solto o corpo. Então, a conservação da energia nos dá:

$$mgh = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2.$$

Levando o valor de mv^2 obtido acima nessa equação, obtemos que:

$$mgh = 3mgR.$$

Logo:

$$h = 3R.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um pêndulo simples de massa m e comprimento l é solto de uma posição, tal que sua corda faz um ângulo θ com a vertical.

a) Qual é a sua energia potencial em relação ao ponto mais baixo de sua trajetória?

b) Qual é a sua energia potencial relativa ao ponto de que foi solto?

c) Qual é a sua energia cinética ao chegar ao ponto mais baixo da trajetória?

E2. A massa do Sol é 329.390 vezes maior que a massa da Terra $M_t = 5,983 \times 10^{24}\ kg$. A distância média da Terra ao Sol é de $r = 1,49598 \times 10^{8}\ km$. Qual é a energia potencial gravitacional da Terra associada à força de atração do Sol sobre ela?

E3. Um bloco de massa m é empurrado por uma força F para cima sobre um plano inclinado de um ângulo θ com uma velocidade constante. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é μ. Após haver se deslocado de uma distância d sobre o plano, qual foi o trabalho realizado:

a) pela força peso do bloco?

b) pela força normal do plano sobre o bloco?

c) pela força de atrito?

d) pela força F ?

E4. Uma força com direção do eixo dos x de um sistema de coordenadas atua sobre uma partícula de massa m. A força varia com a posição segundo a equação $F = a + B\,x$.

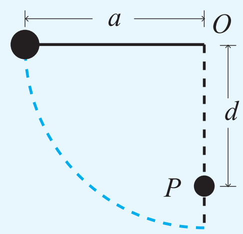
a) Calcule a energia potencial no ponto x relativamente ao ponto $x = 0$.

b) Calcule a velocidade da partícula neste ponto sabendo que em $x = 0$ e $v = v_0$.

E5. Um bloco de massa m é solto de uma altura h sobre uma mola, comprimindo-a de uma distância d. Qual é a constante (k) de restauração da mola?

PROBLEMAS DA UNIDADE 7

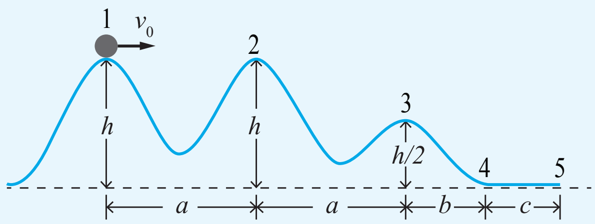
P1. O pêndulo da figura abaixo tem comprimento de 1,20 m. Quando a massa m é solta, ela descreve a trajetória pontilhada da figura.



a) Qual é a sua velocidade no ponto mais baixo da trajetória?

b) Um pino está situado à distância d abaixo do suporte do pêndulo. Qual deve ser o valor de d para que a massa m consiga chegar ao alto da trajetória?

P2. Um bloco de massa m desce uma montanha-russa sem atrito com velocidade inicial v_0 no ponto 1 da figura abaixo.

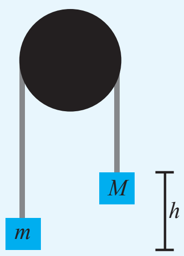


a) Qual é a velocidade do bloco nos pontos 2 e 3?

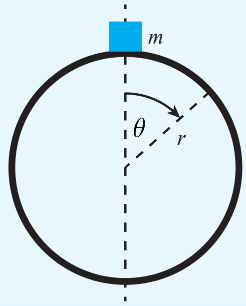
b) Que desaceleração constante deve ter o bloco entre os pontos 4 e 5 para que ele pare em 5?

c) Se $v_0 = 0$, quanto tempo o bloco leva para chegar ao ponto 2?

P3. Os dois blocos da figura estão inicialmente em repouso e começam a se mover. Com que velocidade o bloco de massa M chega ao solo?



P4. Uma partícula de massa m parte do repouso do alto de uma esfera sólida e sem atrito, de raio R, deslizando sobre ela. Medindo os ângulos a partir da vertical e tomando o zero de energia potencial no topo da esfera, calcule:



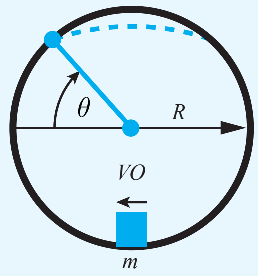
a) a energia potencial da partícula em função do ângulo θ;

b) a energia cinética em função do ângulo θ;

c) as acelerações radial e tangencial do ângulo θ;

d) o ângulo θ em que a partícula perde contato com a esfera.

P5. A partícula de massa m da figura abaixo se move dentro do trilho circular vertical de raio R. Não há atrito. Quando m está na posição mais baixa do trilho, sua velocidade é v_0.

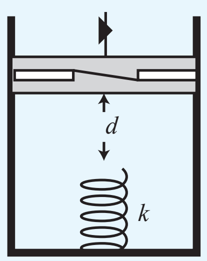


a) Qual é o valor mínimo (v_m) de v_0 para o qual a massa m dá uma volta completa no trilho sem perder contato com ele?

b) Suponha que $v_0 = 0{,}775\ v_m$. A partícula se move, então, sobre o trilho até certo ponto P , onde perde contato com o trilho e descreve a trajetória aproximada mostrada na figura pela linha pontilhada. Ache a posição angular do ponto P.

P6. Um bloco de massa de 1,0 kg move-se sobre uma superfície horizontal com atrito. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu_c = 0{,}25$. O bloco choca-se com uma mola de constante $k = 2\ N/m$, que é comprimida de uma distância de 4,0 m. O sistema bloco + mola fica então em repouso. Qual era a velocidade do bloco quando colidiu com a mola?

P7. O cabo de um elevador de massa $m = 2.000\ kg$ arrebenta quando o elevador está em repouso no primeiro andar do edifício e a uma distância de 4,0 m de uma mola amortecedora de constante $k = 6{,}82 \times 103\ N/m$. Um fio de segurança produz atrito nos trilhos-guias do elevador cuja força vale $F = 2{,}25 \times 10^3\ N$, que freia o elevador.



a) Ache a velocidade do elevador logo antes de ele se chocar com a mola;

b) Ache a distância s de compressão da mola;

c) Ache a distância total que o elevador percorre até parar definitivamente.

P8. Um garoto observou que toda vez que soltava uma bola de uma altura h, ela caía verticalmente até o chão e, após colidir com ele, voltava a uma altura 18% menor que a altura h.

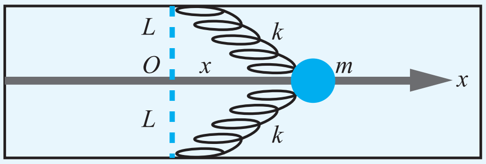
a) Por que a bola não volta à mesma altura?

b) Calcule a velocidade inicial com a qual a bola deve ser jogada verticalmente para baixo de uma altura de 5,0 m, para que ela volte à mesma altura.

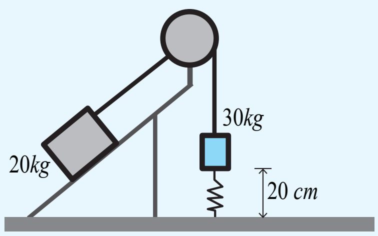
P9. Uma partícula de massa m sobre uma mesa horizontal sem atrito é ligada a duas molas idênticas sem estarem deformadas. Se a partícula é puxada até um ponto A, situado a uma distância x perpendicularmente à posição inicial das molas (figura), calcule:

a) a força exercida pelas molas sobre a partícula;

b) a energia potencial do sistema de molas relativamente à posição não deformada.



P10. Um bloco A de massa 20,0 kg está sobre um plano inclinado de um ângulo de 30º, sem atrito. O bloco é ligado a outro com um fio de massa desprezível que passa por uma roldana sem atrito. O bloco B está, por sua vez, preso a uma mola de massa desprezível e de constante k = 250 N/m e comprimento de 20,0 cm. Quando o sistema está na posição mostrada na figura, com os blocos à mesma altura relativamente à base do plano, o bloco A é puxado de 20,0 cm para baixo ao longo do plano inclinado, de modo que o bloco B fique a 40,0 cm acima da base do plano. Ele é então solto a partir do repouso. Ache a velocidade dos blocos quando o bloco B volta para sua posição original, a 20,0 cm da base do plano.



UNIDADE 8
Sistemas de partículas

Nas unidades anteriores o movimento de translação dos corpos foi estudado considerando-os como partículas, isto é, tendo massa, mas não tendo dimensão. A experiência mostra que, quando aplicamos uma força sobre um corpo (que possui dimensão), ele pode adquirir movimento de rotação ou de vibração, além do de translação. As leis de Newton, quando aplicadas a esses casos, não descrevem corretamente o movimento do corpo e, portanto, têm que ser modificadas.

AULA 23

Centro de massa

Objetivos

- Definir centro de massa de sistemas de partículas;
- Calcular o centro de massa de corpos rígidos.

23.1 APLICAÇÃO DO CONCEITO DE CENTRO DE MASSA

Quando o corpo possui apenas movimento de translação, todas as suas partes têm o mesmo deslocamento e o movimento de uma parte representa o movimento de todo o corpo; quando ele possui movimento de rotação ou vibra – enquanto se move –, isso não mais acontece. Mas, mesmo nesses casos, existe um ponto no corpo, chamado **centro de massa**, que se move da mesma forma que uma partícula se moveria se estivesse sujeita às mesmas forças externas que atuam no corpo.

O conceito de centro de massa se aplica a qualquer conjunto de partículas, tais como o Sol e os planetas, um planeta e seus satélites, as moléculas de um gás etc. Através dele, podemos descrever o movimento de translação desse sistema como um todo de um modo relativamente simples, mesmo que as partículas que o constituem se desloquem de forma complicada umas em relação às outras à medida que o conjunto se move no espaço.

23.2 DEFINIÇÃO DO CENTRO DE MASSA

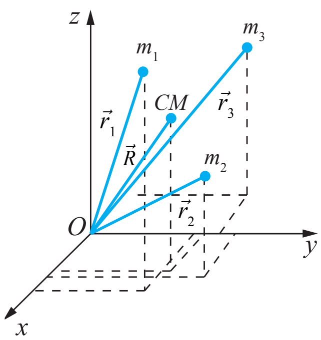


Figura 23.1 – O centro de massa de um sistema de três partículas.

A Figura 23.1 mostra um sistema de N partículas, cada uma de massa m_i e vetor posição $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ em relação à um sistema de coordenadas $S(Ox,y,z)$:

Por definição, o centro de massa do sistema é o ponto cujo vetor-posição $\vec{R}(X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM})$, relativo a S é:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{23.1}$$

ou, em termos de componentes:

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad Y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad Z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i .$$

Essa definição mostra que o centro de massa do sistema é o ponto cujo vetor-posição é a média ponderada dos vetores-posição das partículas do sistema, tendo como peso as massas dessas partículas. Fisicamente, ele é equivalente a uma partícula com massa igual a do sistema, *cujo movimento de translação* é o mesmo que o do sistema como um todo.

Exemplo 23.1

Calcule a posição do centro de massa de um sistema de duas massas M e $3M$, separadas por uma distância $D = 2\ m$, conforme mostra a Figura 23.2.

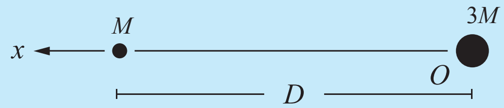


Figura 23.2 – Cálculo do centro de massa de um sistema de partículas.

Solução

As duas massas definem uma reta. Imagine, sobre essa reta, um eixo Ox com origem na massa $3M$, dirigido no sentido da massa M. A posição das massas, no sistema de coordenadas definido acima, é dada por:

$$X_{3M} = 0 \qquad X_M = -D,$$

pois a coordenada da massa M é $-D = -2\ m$ e a da massa $3M$ é zero por ela estar sobre a origem do sistema de coordenadas.

De acordo com a definição de centro de massa, a posição desse ponto é especificada pela sua coordenada X_{CM}, no sistema de coordenadas definido acima, por:

$$X_{CM} = \frac{3\,M \times 0 + M \times (-D)}{3\,M + M} = \frac{M \times (-2m)}{4\,M} = -\frac{2\,M}{4\,M}m = -\frac{1}{2}m.$$

Portanto, $X_{CM} = -0{,}50\ m$, ou seja, o centro de massa do sistema está situado a $0{,}50\ m$ à esquerda da massa $3M$.

ATIVIDADE 23.1 – CENTRO DE MASSA DO SISTEMA TERRA-LUA

A massa da Terra é $M_T = 5{,}972 \times 10^{24}\ kg$ e a da Lua, 81,300 vezes menor. O raio equatorial da Terra é $R_T = 6{,}378 \times 10^3\ km$. A distância entre os centros da Terra e da Lua varia de um valor mínimo $d = 3{,}564 \times 10^5\ km$ até um valor máximo de $D = 4{,}067 \times 10^5\ km$. Com esses dados você pode dizer se o centro de massa do sistema Terra-Lua situa-se dentro ou fora da Terra?

Exemplo 23.2

Na Figura 23.3 está representada esquematicamente a molécula de água, que é constituída por dois átomos de Hidrogênio (indicados aqui por H e H') e o átomo de Oxigênio (O). A separação entre o átomo de Oxigênio e os de Hidrogênio é $a = 96 \times 10^{-12}\ m =\ 96\ pm$; o ângulo entre o Oxigênio e os Hidrogênios é $\alpha = 104,°5$. Determinar a posição do centro de massa da molécula relativamente ao átomo de Hidrogênio, origem do sistema de coordenadas mostrado na Figura 23.3.

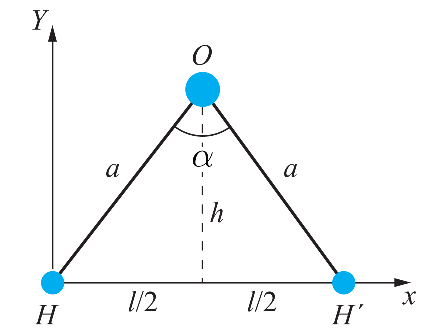


Figura 23.3 – Cálculo do centro de massa.

Solução

A molécula tem a forma de um triângulo isósceles, com a base ligando os átomos de H. Usando a massa do hidrogênio $m_H = 1$ u.m.a. (1 u.m.a. = 1 unidade de massa atômica =1,660 × 10^{27} *kg*), a massa do oxigênio é $m_O = 16m_H$ = 16 u.m.a. e a massa da molécula é M = 18 u.m.a. Sejam ℓ a distância entre os átomos de H e h a distância do átomo de oxigênio ao eixo Ox. Da definição do centro de massa, temos, para as coordenadas dos átomos no sistema de coordenadas da figura:

$$X_H = 0 \quad Y_H = 0 \qquad X_{H'} = \ell \quad Y_{H'} = 0 \qquad X_O = \ell / 2 \quad Y_O = h.$$

Então:

$$X_{CM} = \frac{1 \times 0 + 1 \times \ell + 16 \times (\ell / 2)}{18} = \frac{\ell}{2},$$

$$Y_{CM} = \frac{1 \times 0 + 1 \times 0 + 16 \times h}{18} = \frac{16}{18}h = \frac{8}{9}h.$$

Como o triângulo OHH' é isósceles, a perpendicular ao lado HH', traçada do vértice O, divide o ângulo α e o lado HH' ao meio; ela é a mediana desse lado e a bissetriz do ângulo α. Então, com $104,° 5 = 1{,}824\, rad$:

$$(\ell / 2) = a sen(\alpha / 2) = 96\ pm \times sen(0,912 rad) = 76\ pm$$

$$h = a cos(\alpha / 2) = 96\ pm \times cos(0,912 rad) = 59\ pm$$

Logo: $X_{CM} = 76\, pm$ e $Y_{CM} = 52\, pm$.

ATIVIDADE 23.2 – A POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA DEPENDE DO SISTEMA DE COORDENADAS?

Considere agora o sistema de coordenadas com origem no átomo de oxigênio e eixos Ox e Oy paralelos aos anteriores. Calcule a posição do centro de massa relativamente ao átomo de oxigênio. Há alguma mudança em relação à calculada no exemplo 23.2? Explique.

23.3 CENTRO DE MASSA DE CORPOS RÍGIDOS OU MEIOS CONTÍNUOS

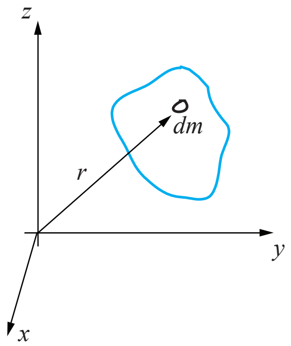


Figura 23.4 – O elemento de massa de um corpo rígido.

Um corpo rígido é, por definição, um corpo em que a distância entre as partículas que o constituem permanece sempre constante. O número de partículas de um corpo rígido é muito grande, de modo que a separação entre elas torna-se muito pequena; por isso, é possível considerar um corpo rígido como se fosse uma distribuição contínua de massa.

O elemento de massa *dm*, contido em um elemento de volume dV, de vetor posição $\vec{r}$ relativo à origem de um sistema de coordenadas $Oxyz$ é $dm = \rho(\vec{r})dV$. De acordo com a equação 23.1, o vetor-posição do centro de massa do corpo $\vec{R}$ é então:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,dm \qquad M = \int_V dm = \int_V \rho dV, \qquad (23.1)$$

sendo $\rho(x,y,z)$ a densidade do elemento de volume $dV(x,y,z)$ do corpo. Em termos de componentes:

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\int_V xdm \qquad Y_{CM} = \frac{1}{M}\int_V ydm \qquad Z_{CM} = \frac{1}{M}\int_V zdm.$$

Quando o corpo possuir uma dimensão muito menor que as outras duas (como, por exemplo, uma placa), a densidade volumétrica de massa pode ser substituída pela densidade superficial $\sigma(x,y)$. Da mesma forma, quando ele tiver duas dimensões desprezíveis em relação à terceira (como um fio fino), pode se usar a densidade linear $\lambda(x)$. Veja como isso funciona através do exemplo 23.3.

Exemplo 23.3

Calcule a posição do centro de massa de uma barra homogênea de massa *M* e comprimento L, relativamente a uma de suas extremidades (Figura 23.5).

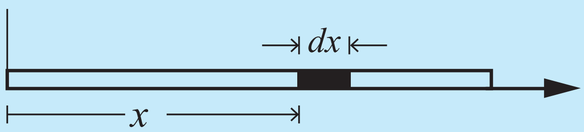


Figura 23.5 – Cálculo do centro de massa de uma barra de densidade constante.

Solução

Podemos escrever que $M = \lambda L$, em que λ é a densidade linear da barra. Seja um elemento de massa *dm* situado à distância *x* da origem. Então:

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\int_L xdm = \frac{\lambda}{M}\int_0^L xdx = \frac{1}{M}\frac{M}{L}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}.$$

ATIVIDADE 23.3

Calcule a posição do centro de massa de um arame (fino) semicircular de raio R (Figura 23.6).

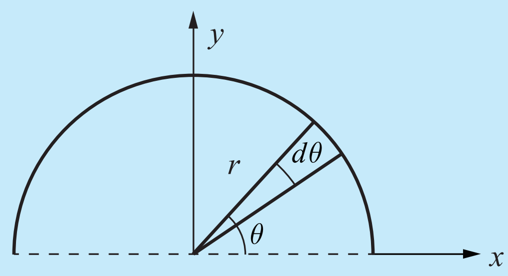


Figura 23.6 – Cálculo do centro de massa de um arame semicircular.

ATIVIDADE 23.4 – CÁLCULO DA POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Calcule o centro de massa de um hemisfério homogêneo da massa M e raio a (Figura 23.7) relativamente a uma origem de coordenadas coincidente com o centro da esfera.

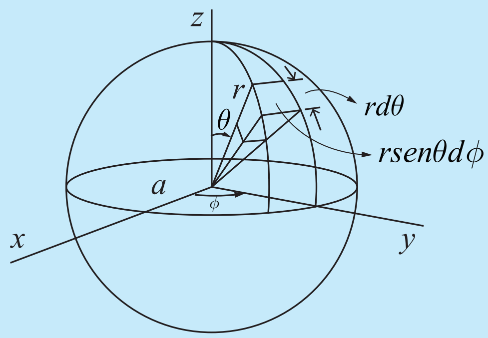


Figura 23.7 – Cálculo do centro de massa de um hemisfério.

23.4 PROPRIEDADES DO CENTRO DE MASSA

Propriedade 1: Muitas vezes os corpos podem ser considerados homogêneos, possuindo um ponto, uma linha ou um plano de simetria geométricos. Quando isso acontece, o centro de massa estará sobre esse ponto, linha ou plano. Por exemplo, o centro de uma esfera é o centro de simetria dela. Um corpo esférico homogêneo terá seu centro de massa no seu centro geométrico. O centro de massa de um cone, que possui um eixo de simetria geométrico, tem seu centro de massa sobre esse eixo. Quando o corpo possuir dois ou mais eixos ou planos de simetria (por exemplo, o paralelepípedo), o centro de massa estará situado na interseção desses eixos ou planos.

ATIVIDADE 23.5 – APLICAÇÃO DA PROPRIEDADE 1

Use a Propriedade 1 para determinar a posição do centro de massa dos corpos do exemplo 23.3 e das atividades 23.3 e 23.4.

Propriedade 2: Quando um corpo for composto de várias partes, o centro de massa do corpo é o centro de massa das partes, consideradas cada uma delas como partículas situadas nos respectivos centros de massa.

Exemplo 23.4

Calcule o centro de massa do hemisfério homogêneo do exemplo anterior, considerando-o composto de discos perpendiculares ao eixo Oz (Figura 23.8).

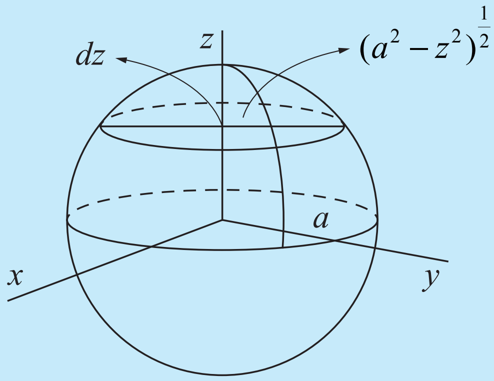


Figura 23.8 – Cálculo do centro de massa de um hemisfério homogêneo.

Solução

Cada disco tem um raio $r = (a^2 - z^2)^{1/2}$ e espessura dz, tal que $dm = \rho\pi(a^2 - z^2)dz$. Como, por simetria, o centro de massa deve estar sobre o eixo Oz, vem que:

$$Z = \frac{\rho}{M}\int_{z=0}^{a} z\pi(a^2 - z^2)dz = \frac{3}{\pi a^3 \rho}\frac{\pi a^4 \rho}{4} = \frac{3}{8}a.$$

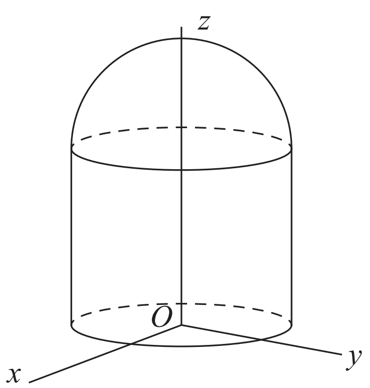


Figura 23.9 – Centro de massa do corpo do exemplo 23.5.

Exemplo 23.5

Considere um sólido homogêneo composto de um cilindro de massa $M_c = 3{,}0$ kg, raio $R = 24{,}0$ cm e altura $H = 30{,}0$ cm, encimado por uma semiesfera de mesmo raio e massa $M_e = 1{,}0$ kg. Determine a coordenada do centro de massa relativa ao sistema mostrado na Figura 23.9.

O centro de massa do cilindro está situado sobre o eixo Oz da figura por causa da simetria que ele possui relativamente a esse eixo. Em relação à origem O, sua coordenada é $Z_c = H/2 = 15{,}0 cm$.

A coordenada z do centro de massa da semiesfera, relativamente a seu centro, foi calculada na atividade 23.4 e no exemplo 23.4 e vale $z = 3{,}0 \times 24{,}0/8 = 9{,}0$ cm. A coordenada relativa a O é $Z_e = H + z_0 = 30{,}0 + 9{,}0 = 39{,}0$ cm.

A coordenada do centro de massa do corpo é então:

$$Z_{CM} = \frac{M_e \times Z_e + M_c \times Z_c}{M_e + M_c} = \frac{1,0 \times 39,0 + 3,0 \times 15,0}{3,0 + 1,0} = 21,0\ cm.$$

Obviamente, devido à simetria do corpo relativamente ao eixo Oz, $X_{CM} = 0$ e $Y_{CM} = 0$.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Essa propriedade permite também que se calcule o centro de massa de um corpo considerando-o como composto de uma figura geométrica completa menos uma parte.

Exemplo 23.6

Considere uma chapa fina circular homogênea de raio R = 30,0 cm e espessura 0,50 cm e massa M, na qual foi feito um buraco circular de raio r = 5,0 cm com centro a 15 cm do centro da chapa. Calcule a posição do centro de massa da chapa furada, relativamente ao seu centro (Figura 23.10).

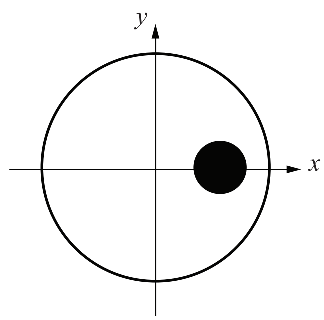


Figura 23.10 – Cálculo do centro de massa de uma chapa com buraco.

Solução

Por simetria, o centro de massa deve estar sobre o eixo Ox. Como a espessura é pequena, a chapa será considerada como uma figura bidimensional. Ela pode ser vista como um corpo constituído por um disco cheio, de densidade σ, e um buraco com a mesma densidade da chapa, porém com massa negativa. O centro de massa do disco cheio está em $X_d = 0$; o do disco vazio, em X_b = 15 cm. A massa do disco cheio é $M = \pi R^2 \sigma$ e a do buraco, se fosse cheio, é $m = \pi r^2 \sigma$. Então:

$$X_{CM} = \frac{\pi R^2 \sigma \times 0 - \pi r^2 \sigma \times 15}{\pi R^2 \sigma - \pi r^2 \sigma} = -\frac{15 r^2}{R^2 - r^2} = -\frac{15 \times 25}{900 - 25} = -0,42\ cm.$$

O resultado seria o mesmo se a espessura da chapa fosse levada em conta?

ATIVIDADE 23.6 – CÁLCULO DO CENTRO DE MASSA DA CHAPA COMPOSTA

Calcule a posição do centro de massa da chapa do exemplo 23.6, mas com um material de densidade duas vezes maior no lugar do buraco.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 23.1 – Centro de massa do sistema Terra-Lua

Se M_L é a massa da Lua, temos que $M_T = 81{,}300\, M_L$. Então, com origem no centro da Terra e eixo Ox positivo no sentido Terra-Lua, a posição do centro de massa do sistema é:

$$X_{CM} = \frac{M_T \times 0 + M_L \times (Z)}{M_T + M_L} = \frac{Z}{\dfrac{M_T}{M_L} + 1} = \frac{Z}{82{,}300},$$

em que Z é a distância Terra-Lua.

Para $Z = d = 3{,}564 \times 10^5$, temos que $X_{CM} = 4{,}330 \times 10^3\, km$.

Para $Z = D = 4{,}067 \times 10^5$, temos que $X_{CM} = 4{,}942 \times 10^3\, km$.

Como essas distâncias são menores que o raio equatorial da Terra, podemos concluir que o centro de massa do sistema Terra-Lua está sempre dentro da Terra.

Atividade 23.2 – A posição do centro de massa depende do sistema de coordenadas?

Nesse caso, as coordenadas dos átomos, relativamente ao novo sistema de coordenadas, são:

$X_H = -\ell/2 \quad Y_H = -h \qquad X_H = \ell/2 \quad Y_H = -h \qquad X_O = 0 \quad Y_O = 0.$

Então:

$$X_{CM} = \frac{1 \times -\ell/2 + 1 \times \ell/2 + 16 \times 0}{18} = 0,$$

$$Y_{CM} = \frac{1 \times (-h) + 1 \times (-h) + 16 \times 0}{18} = -\frac{1}{9}h;$$

ou, com o valor de h, vem: $X_{CM} = 0\ pm$ e $Y_{CM} = -7\ pm$.

Podemos verificar que, embora as coordenadas do centro de massa tenham variado porque as origens dos sistemas são diferentes, sua posição relativamente aos átomos que formam a molécula é a mesma. Com efeito, no exemplo 23.2, foi obtido que o centro de massa está sobre a mediana do triângulo, traçada por O, a uma distância de $(8/9)h$ da base ou $(1/9)h$ de O, o que coincide com a posição calculada no exemplo 23.2.

Atividade 23.3

Dividamos o fio em elementos de arco infinitesimais de comprimento $dL = R d\theta$, cuja posição é medida pelas coordenadas polares (R, θ). Então, se a densidade linear de massa do fio é $\lambda = M/(\pi R)$,temos que:

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\int_L xdL = \frac{\lambda}{\lambda\pi R}\int_0^{\pi} Rcos\theta(Rd\theta) = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi} cos\theta d\theta = \frac{R}{\pi}[sen\theta]_0^{\pi} = 0,$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int LydL = \frac{\lambda}{\lambda\pi R}\int_0^{\pi} Rsen\theta(Rd\theta) = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi} sen\theta d\theta = \frac{R}{\pi}[-cos\theta]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}R.$$

Atividade 23.4 – Cálculo da posição do centro de massa em coordenadas esféricas

Podemos utilizar as coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) para determinar a posição de um elemento de massa $dm(r,\theta,\phi)$. Temos:

$$dm(r,\theta,\phi) = \rho dV = \rho r^2 sen\theta dr d\theta d\phi,$$

$$x = r sen\theta cos\phi,$$

$$y = r sen\theta sen\phi,$$

$$z = r cos\theta,$$

$$M = \frac{2}{3}\rho\pi a^3.$$

Então:

$$X_{CM} = \frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(r sen\theta cos\phi)r^2 sen\theta dr d\theta d\phi = \frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^{\pi/2} r^3 sen^2\theta dr d\theta\int_0^{2\pi} cos\phi d\phi;$$

ou:

$$X_{CM} = \left[\frac{\rho}{M}\int_0^a r^3 dr\int_0^{\pi/2} sen^2\theta d\theta\right][sen\phi]_0^{2\pi} = 0.$$

Analogamente:

$$Y_{CM} = \frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(r sen\theta sen\phi)r^2 sen\theta dr d\theta d\phi = \frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^{\pi/2} r^3 sen^2\theta dr d\theta\int_0^{\pi/2} sen\phi d\phi;$$

ou:

$$Y_{CM} = \left[\frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^{\pi/2} r^3 dr\int_0^{\pi/2} sen^2\theta d\theta\right][-cos\phi]_0^{\pi/2} = 0.$$

Finalmente:

$$Z_{CM} = \frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(r cos\theta)r^2 sen\theta dr d\theta d\phi = \frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^{\pi/2} r^3 sen\theta cos\theta d\theta dr\int_0^{2\pi} d\phi.$$

Fazendo a integral para Z_{CM}, obtemos:

$$Z_{CM} = \frac{2\pi\rho}{M}\left[\frac{sen^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi\rho}{M}\frac{1}{2}\frac{a^4}{4} = \frac{\pi\rho}{\rho(2/3)\pi a^3}\frac{a^4}{4} = \frac{3}{8}a.$$

O centro de massa do hemisfério homogêneo é, então, o ponto de coordenadas (0,0,(3a)/8).

Atividade 23.5 – Aplicação da Propriedade 1

a) No exemplo 23.3, o fio tem simetria em relação a qualquer eixo que passe pelo seu ponto médio. Por isso seu centro de massa deve estar sobre esse ponto.

b) Na atividade 23.3, o fio é encurvado na forma de uma semicircunferência. Ele tem simetria em relação ao eixo Oy. Então, o centro de massa deve estar sobre esse eixo e basta calcularmos a integral relativa à coordenada Y para determinar essa coordenada do centro de massa.

c) Na atividade 23.4, as coordenadas X e Y do centro de massa da semiesfera são nulas por causa da simetria dela relativamente ao eixo Oz e basta calcularmos a integral relativa à coordenada Z para determinar essa coordenada do centro de massa.

Atividade 23.6 – Cálculo do centro de massa da chapa composta

O centro de massa da chapa é o centro de massa dos centros de massa da chapa furada e o do material que substitui o buraco. Sejam:

- ρ_c a densidade da chapa furada;
- $\rho_m = 2\times\rho_c$ a densidade do material que substitui o furo (já escrita em termos da densidade da chapa);
- $M_m = \pi r^2(2\rho_c)$ a massa do material;
- $M_c = \pi(R^2 - r^2)\rho_c$ a massa da placa;
- $x_c = -0,42$ cm a coordenada do centro de massa da chapa furada (obtida no exemplo 23.6);
- $x_m = 15,0$ cm a coordenada do centro de massa do material que substitui o furo, ambas referidas a um sistema de coordenadas da Figura 23.10.

Por simetria, o centro de massa se encontra sobre o eixo Ox. Então:

$$X_{CM} = \frac{M_c x_c + M_m x_m}{M_c + M_m} = \frac{\rho_c \pi (R^2 - r^2) x_c + 2\rho_c \pi r^2 x_m}{\pi \rho_c [(R^2 - r^2) + 2r^2]}.$$

Com $R = 30,0$ cm e $r = 5,0$ cm, tem-se que :

$$X_{CM} = \frac{(R^2 - r^2)x_c + 2r^2 x_m}{R^2 + r^2} = \frac{(9,00\times10^2 - 25,0)\times(-0,42) + 2\times 25,0\times 15,0}{9,00\times10^2 + 25,0} = \frac{3,825\times10^2}{9,25\times10^2};$$

ou:

$$X_{CM} = +0,41 cm.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. As massas e as coordenadas dos centros de massa de três blocos de madeira são dadas por:

a) 0,40 *kg*, (0,30 *m*, 0,20 *m*);

b) 0,30 *kg*, (-0,30 *m*, 0,10 *m*);

c) 0,20 *kg*, (-0,20 *m*, 0,50 *m*).

Calcule as coordenadas do centro de massa do sistema constituído por esses três blocos de madeira.

E2. Determine a posição do centro de massa do sistema constituído pelo Sol e pela Terra. A posição desse centro de massa está dentro ou fora do Sol?

E3. Três massas puntiformes estão de 3 *kg* cada são localizadas sobre o eixo y na origem, em y = 0,30 *m* e em y = 0,70 *m*. Determine o centro de massa do sistema.

E4. Um recipiente cilíndrico simétrico tendo massa M e altura H está cheio de água. A massa inicial da água é M, a mesma do recipiente. Faz-se um buraco na parte inferior do recipiente e a água começa a vazar.

a) Se a altura do nível da água no interior do recipiente é x, qual será a altura do centro de massa do sistema recipiente + água?

b) Qual é a altura mínima do centro de massa quando a água vaza completamente?

AULA 24

O movimento do centro de massa

Objetivo

- Calcular o movimento do centro de massa de corpos rígidos.

24.1 AVALIANDO O MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA

Considere um sistema de N partículas, de massa m_i , em movimento. A posição do centro de massa do sistema, em um instante t, é dado pela equação:

$$M\vec{R}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i. \tag{24.1}$$

Derivando essa equação em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{R}_{CM}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt};$$

ou:

$$M\vec{V}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i, \tag{24.2}$$

em que $\vec{V}_{CM}$ é a velocidade do centro de massa e $\vec{v}_i$ é a velocidade da i-ésima partícula do sistema.

Derivando novamente, obtemos:

$$M\vec{A}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i, \tag{24.3}$$

em que $\vec{A}_{CM}$ é a aceleração do centro de massa e $\vec{a}_i$ é a aceleração de cada partícula i do sistema.

O segundo membro das equação 24.3 é a soma das forças que atuam sobre todas as partículas do sistema. Então, o produto da massa total do sistema pela aceleração do centro de massa é igual à soma das forças que atuam sobre todas as partículas do sistema:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = M\vec{A}_{CM}. \tag{24.4}$$

As forças que atuam sobre uma partícula do sistema são de dois tipos: as chamadas **internas**, devidas à ação das outras partículas do sistema sobre ela, e as chamadas **externas**, devidas a agentes fora dele. De acordo com a terceira lei de Newton, a força que a partícula i exerce sobre a $j(\vec{F}_{ij})$ está aplicada em j; reciprocamente, a força que a partícula j exerce sobre a i $(\vec{F}_{ji})$ está aplicada em i, as duas forças sendo iguais e opostas, isto é: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

Entretanto, quando consideramos o conjunto de partículas que formam o sistema, essas forças, embora aplicadas a partículas diferentes, estão aplicadas sobre o sistema. Assim, o efeito delas sobre o sistema é nulo. Dessa forma, cada termo do segundo membro da equação 24.4 representa a soma das forças externas que atuam sobre uma determinada partícula. O segundo membro, então, representa a soma de todas as forças externas que atuam sobre o sistema. A equação 24.4 pode ser escrita como:

$$\vec{F}_E = M\vec{A}_{CM}, \tag{24.5}$$

em que $\vec{F}_E$ é a soma das forças externas aplicadas ao sistema. Essa equação estabelece que o centro de massa de um sistema de partículas se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nele e todas as forças externas ao sistema fossem aplicadas nele. **Ela é o equivalente à segunda lei de Newton para um sistema de partículas**.

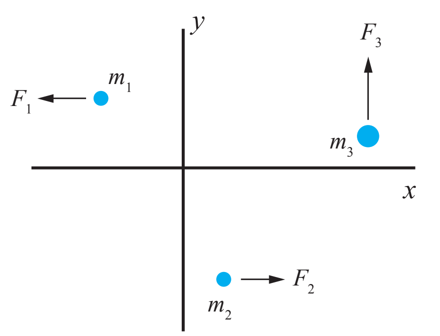


Figura 24.1 – Sistema de partículas.

Exemplo 24.1

Consideremos três partículas de massas $m_1 = 3{,}0\ kg$, $m_2 = 4{,}0\ kg$ e $m_3 = 8{,}0\ kg$, sujeitas, respectivamente, às forças constantes $F_1 = -6{,}0\ N\,\hat{i}$, $F_2 = 12{,}0\ N\,\hat{i}$, $F_3 = 16{,}0\ N\,\hat{j}$. As massas estão sobre um plano xy, e em um dado instante a massa m_1 tem coordenadas [(–2,0),(2,0)], a massa m_2, coordenadas [(1,0),(–3,0)], e a massa m_3, coordenadas[(4,0),(1,0)]. Veja a Figura 24.1. Qual é a aceleração A_{cm} do centro de massa do sistema?

Solução

As coordenadas X_{cm} e Y_{cm} do centro de massa do sistema de partículas são:

$$X_{cm} = \frac{3,0\ kg \times (-2,0\ m) + 4,0\ kg \times 1,0\ m + 8,0\ kg \times 4,0\ m}{(3,0+4,0+8,0)\ kg} = 2,0\ m,$$

$$Y_{cm} = \frac{3,0\ kg \times (2,0\ m) + 4,0\ kg \times (-3,0)\,m + 8,0\ kg \times 1,0\ m}{(3,0+4,0+8,0)\ kg} = 0,13\ m.$$

A resultante de forças que atuam no sistema, aplicada ao centro de massa, é obtida com:

$$F_x = 12,0\ N - 6,0\ N = 6,0\ N$$
$$F_y = 16,0\ N,$$

e:

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = 17,1\ N \qquad tg\theta = \frac{F_y}{F_x} = 2,667 \qquad \theta = 69^o.44,$$

em que θ é o ângulo que a resultante $\vec{F}$ faz com o sentido positivo do eixo Ox. A aceleração do centro de massa A_{cm} é, então:

$$\vec{A}_{cm} = \frac{\vec{F}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{6,0\,N}{15,0\ kg}\hat{i} + \frac{16,0\,N}{15,0\ kg}\hat{j} = 0,40\hat{i} + 1,1\hat{j}\ m/s^2,$$

cujo módulo é:

$$A_{cm} = \sqrt{A_{cm,x}{}^2 + A_{cm,y}{}^2} = \sqrt{(0,4)^2 + (1,1)^2} = 1,2\ m/s^2.$$

Observe que a equação 24.5 tem uma implicação conceitual importante: quando ela é utilizada, substituimos o sistema de partículas por uma só – o centro de massa – e, portanto, as partículas perdem sua individualidade. Isso significa que, com a equação 24.5, descrevemos o movimento de translação do sistema como um todo; com ela, não podemos prever o comportamento individual de uma partícula do sistema.

A equação 24.5 mostra também que **se a resultante das forças externas que atuam no sistema for nula, o centro de massa permanece em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme**.

Exemplo 24.2

Seja um barco de comprimento L = 4,0 m e massa M = 140 kg, inicialmente em repouso e sem amarras sobre a superfície de um lago sem ondas (Figura 24.1). Um homem de massa m = 60 kg está sentado na proa do barco. Em um dado instante, o homem muda de posição, passando para a popa. O que acontece com o barco?

Solução

Para descobrir o que acontece com o barco, aplique a equação 24.5 ao sistema homem + barco. As forças externas que atuam sobre o sistema são os pesos do barco e do homem e as reações normais a elas; a soma das forças externas sobre o sistema é, então, nula e a aceleração do centro de massa é $\vec{A}_{CM} = 0$.

O centro de massa do sistema homem + barco C_S é o centro de massa dos centros de massa do homem C_H e do barco C_B. Como o sistema está inicialmente em repouso, ele permanece sempre na mesma posição quando o homem se move. Escolhendo um sistema de coordenadas com origem na popa do barco e o eixo dos x com sentido da popa para a proa, a posição inicial do centro de massa do sistema (antes do homem mudar de posição) é:

$$X_i = \frac{M \times (L/2) + m \times L}{M + m} = \frac{140\,kg \times 2,0\ m + 60\,kg \times 4,0\ m}{140\ kg + 60\ kg} = 2,60\ m.$$

Supondo que o barco fique parado durante o deslocamento do homem da proa para a popa, a posição final do centro de massa do sistema homem + barco seria:

$$X_f = \frac{M \times (L/2) + m \times 0}{M + m} = \frac{140\ kg \times 2,0\ m + 60\ kg \times 0,0\ m}{140\ kg + 60\ kg} = 1,40\ m.$$

A mudança de posição do homem acarretaria então uma mudança de posição do centro de massa do sistema, dada por:

$$\Delta X = X_f - X_i = 1,40\ m - 2,60\ m = -1,20\ m.$$

Como, o centro de massa do sistema homem + barco não pode se mover, o barco deve então se deslocar de uma distância:

$$\Delta x = -\Delta X = 1,20\ m,$$

ou, seja, à medida que o homem se desloca da proa para a popa, o barco se desloca no sentido contrário, mantendo o centro de massa na mesma posição. A força que faz o barco se deslocar é a força de atrito entre os pés do homem e o barco. Sendo uma força interna ao sistema, ela desloca o barco (que é parte do sistema) e também o homem (também parte do sistema), mas não o centro de massa do sistema. Para deslocá-lo, é necessária uma força externa ao sistema.

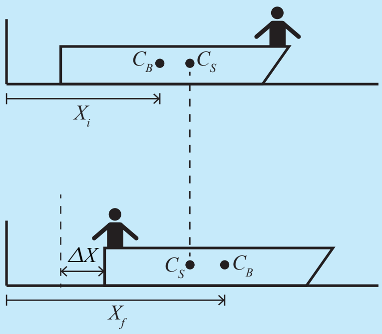


Figura 24.2 – O deslocamento do barco e o do homem. C_H e C_S se referem aos centros de massa do barco e do sistema homem + barco, respectivamente. O C_H é indicado pela própria posição do homem na figura.

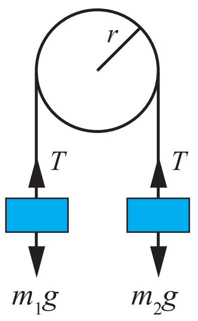


Figura 24.3 – Dois corpos ligados por uma corda passando por uma polia.

Exemplo 24.3

Dois corpos, de massas m_1 e m_2, estão ligados a uma corda de massa desprezível que passa por uma roldana fixa de diâmetro de 5,0 *cm*. Os dois corpos possuem inicialmente a mesma massa de 500 *g* e estão nivelados. Ache o centro de massa do sistema formado pelos corpos.

Vinte gramas do corpo m_2 são transferidos para o corpo m_1, mas os corpos são impedidos de se moverem. Ache o centro de massa deles.

Os dois corpos são então soltos. Descreva o movimento do centro de massa e calcule sua aceleração.

Solução

Obviamente o centro de massa dos dois corpos está na linha que os une, a meia distância deles, porque suas massas são iguais.

Quando a massa é transferida de m_2 para m_1, o centro de massa se desloca aproximando-se do corpo de maior massa. Como os corpos ainda estão nivelados, esse deslocamento do centro de massa é feito na horizontal. Seja X_{CM} a distância do centro de massa ao corpo, agora com $m_1 = 520\ g$ e tomando esse corpo como origem de coordenadas, $x_1 = 0$ e $x_2 = 5\ cm$, a distância do corpo $m_2 = 480\,g$ ao corpo m_1.

Da definição de centro de massa, segue que:

$$m_1 \times 0 + m_2 \times x_2 = (m_1 + m_2) X_{CM},$$

em que X_{CM} é a distância do centro de massa à massa m_1. Mas $x_2 = 5{,}0\ cm$. Então:

$$X_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2 = \frac{480}{520 + 480} \times 5\ cm = \frac{2400}{1000}\ cm = 2{,}4\ cm.$$

O centro de massa se deslocou então de $2{,}5 - 2{,}4\ cm = 0{,}1\ cm$ para mais perto da massa m_1.

Sabemos que $(m_1 + m_2) A_{CM} = F_E$. As forças externas, mostradas na Figura 24.3, são os pesos das massas m_1 e m_2 e a força $F = 2T$ atuando no sistema de massas. Então:

$$(m_1 + m_2) A_{CM} = (m_1 g + m_2 g) - 2\,T.$$

Para determinarmos a tensão T, temos que aplicar a segunda lei de Newton às duas massas. Assim:

$$-m_1 g + T = -m_1 a,$$

$$-m_2 g + T = m_2 a,$$

em que a é a aceleração dos dois corpos (**diferente da do centro de massa!**).

Resolvendo esse sistema para a e T, obtemos:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Levando o valor de $2T$ na expressão de A_{CM}, obtemos:

$$A_{CM} = \left[1 - \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] g.$$

Substituindo os valore numéricos, obtemos:

$$A_{CM} = 1{,}6 \times 10^{-3} \times 9{,}80 \times 10^2\, cm/s^2 = 1{,}6 cm/s^2$$

ATIVIDADE 24.1 – O MOVIMENTO DO SISTEMA DE MASSAS E O MOVIMENTO DAS MASSAS SEPARADAMENTE

No exemplo 24.3, compare numericamente a aceleração das massas entre si e depois compare-as com a aceleração do centro de massa. Explique o porquê da diferença.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 24.1 – O movimento do sistema de massas e o movimento das massas separadamente

A aceleração da massa m_1 é a mesma que a da massa m_2 e, como vimos no exemplo, ela vale:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = 0,04 \times 9,8 \times 10^2 cm/s^2.$$

A aceleração a é a aceleração com que os blocos se movem relativamente a um referencial fora deles. Ela descreve, portanto, o movimento de translação de um elemento do sistema (um dos blocos). A aceleração A_{CM}, que é 25 vezes menor que a, descreve o movimento de translação **do sistema formado pelos dois blocos** relativamente ao mesmo referencial. Aqui, dá para notarmos a diferença entre o movimento do sistema e de partes dele. No movimento de translação do sistema, as partes que o compõem não são levadas em conta; apenas o efeito total da resultante das forças externas atuando sobre o sistema é que interessa. A lei segunda de Newton é obedecida. Com efeito, *sobre o sistema* atuam as seguintes forças externas: os pesos das massas (direção vertical e sentido para baixo) e as tensões atuando nas massas (direção vertical e sentido para cima). A força externa resultante é:

$$F_E = (m_1 g + m_2 g) - 2\,T$$

$$(m_1 + m_2) A_{CM} = (m_1 g + m_2 g) - 2\,T$$

$$F = (m_1 + m_2) g - \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g,$$

de direção vertical e sentido para baixo. A aceleração do centro de massa é:

$$A_{CM} = \frac{F}{(m_1 + m_2)} = \left[1 - \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\right] g = 0,0016\, g,$$

resultado já obtido antes.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Duas partículas de 2 *kg* possuem velocidades $\vec{v}_1 = (3{,}0\ m/s)\hat{i} + (2{,}0\ m/s)\hat{j}$ e $\vec{v}_2 = (5{,}0\ m/s)\hat{i} + (-3{,}0\ m/s)\hat{j}$. Determine a velocidade do centro de massa do sistema.

E2. Um automóvel de 1.600 *kg* se move na direção leste com uma velocidade de 25 *m/s*, e um ônibus de 3.500 *kg* se move para o oeste com uma velocidade de 17 *m/s*. Determine a velocidade do centro de massa do sistema formado pelos dois veículos.

E3. Em um dado instante, o centro de massa de um sistema de duas partículas está localizado sobre o eixo *Ox* no ponto $x = 2{,}0\ m$ e possui velocidade igual a $(5{,}0\ m/s)\hat{i}$. Uma das partículas está sobre a origem. A outra possui massa de 0,10 *kg* e está em repouso sobre *Ox* no ponto $x = 8{,}0\ m$. Qual é a massa da partícula que está sobre a origem?

E4. Duas patinadoras, uma com 60 *kg* e a outra com 45 *kg*, estão em pé numa pista de gelo segurando um bastão de 8 *m* de comprimento e massa desprezível. Partindo das extremidades do bastão, as patinadoras puxam-se até que se encontrem. De quanto se moveu a patinadora de 45 *kg*?

E5. Uma pedra é solta no instante $t = 0\ s$. Uma segunda pedra, de massa igual ao dobro da primeira, é solta do mesmo ponto, no instante $t = 0{,}1\ s$.

a) Onde está o centro de massa das duas pedras no instante $t = 0{,}2\ s$? Nenhuma das duas pedras chegou ainda ao solo.

b) Nesse mesmo instante, qual é a velocidade do centro de massa das duas pedras?

AULA 25

Momentum linear de um sistema de partículas

Objetivos

- Definir o momentum linear de sistemas de partículas;
- Determinar as condições em que ele se conserva;
- Aplicar a conservação do momentum linear para resolver problemas com sistemas de partículas;
- Resolver problemas com massa variável.

25.1 MOMENTUM LINEAR

Da mesma forma como foi feito para uma partícula, podemos definir o momentum linear do sistema como a soma dos momenta lineares das partículas do sistema:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i . \tag{25.1}$$

Dessa expressão e da equação 24.2, pode ser escrito que:

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM} , \tag{25.2}$$

isto é, o momentum linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa do sistema pela velocidade do seu centro de massa.

Derivando essa equação em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{A}_{CM} ; \tag{25.3}$$

e lembrando que $\vec{F}_E = M \vec{A}_{CM}$, temos que:

$$\vec{F}_E = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{A}_{CM} , \tag{25.4}$$

isto é, a taxa de variação com o tempo do momentum linear de um sistema de partículas é igual à força externa resultante que atua sobre o centro de massa do sistema.

Exemplo 25.1

Um projétil de massa $m = 100\ g$ é lançado de modo que sua velocidade inicial vale $v_0 = 4{,}0\ m/s$, fazendo um ângulo $\theta = 30^o$ com a vertical. Calcule o seu momentum linear nos instantes $t_1 = 0{,}3\,s$ e $t_2 = 2{,}0\,s$ após o lançamento, bem como a variação do momentum linear no intervalo de tempo $t_2 - t_1$.

Solução

A velocidade do projétil em um instante qualquer é dada em função da velocidade inicial e do ângulo de lançamento por:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = v_0 sen\theta\,\hat{i} + (v_0 cos\theta - gt)\,\hat{j}.$$

(Note que o ângulo θ é o ângulo que a velocidade inicial faz com a vertical.) Logo:

$$p_x = mv_x = mv_0\,sen\theta,$$

$$p_y = mv_y = mv_0\,cos\theta - gt.$$

Para $t = t_1 = 0{,}3\,s$, temos:

$$p_x = 0{,}100\ kg \times 4{,}0\ m/s \times sen30^o = 0{,}20\ kg.m/s,$$

$$p_y = 0{,}100\ kg \times (4{,}0\ m/s \times cos30° - 9{,}8\ m/s^2 \times 0{,}3s = 0{,}05\ kg.m/s.$$

Então: $\vec{p}_1 = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} = 0{,}20\,\hat{i} + 0{,}05\,\hat{j}\ kg.m/s$. A direção do momentum é dada pelo ângulo α:

$$\alpha = arctg\left[\frac{p_y}{p_x}\right] = arctg(\frac{0{,}05}{0{,}20}) = arctg(0{,}250) = 14°04\,\cdot$$

Para $t = t_2 = 2{,}0$ s, temos:

$$p_x = 0{,}100\ kg \times 4{,}0\ m/s \times sen30^o = 0{,}20\ kg.m/s,$$

$$p_y = 0{,}100\ kg \times (4{,}0\,m/s \times cos30° - 9{,}8\ m/s^2 \times 2{,}0\,s = -1{,}61\ kg.m/s.$$

Então: $\vec{p}_2 = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} = 0{,}20\,\hat{i} - 1{,}61\,\hat{j}\ kg.m/s.$

A direção do momentum é dada pelo ângulo β:

$$\beta = arctg\left[\frac{p_y}{p_x}\right] = arctg(-\frac{1{,}61}{0{,}20}) = arctg(8{,}05) = 277^\circ 07.$$

A variação do momentum no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (0{,}20 - 0{,}20)\,\hat{i} + (0{,}05 - 1{,}61)\,\hat{j} = 0\,\hat{i} - 1{,}56\,\hat{j}\ kg.m/s.$$

25.2 CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM LINEAR

A equação 25.3 mostra que se a soma das forças externas que atuam no sistema for nula, o momentum linear do sistema se conserva:

$$\vec{F}_E = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{P} = constante.$$

De acordo com a equação 23.2, a velocidade do centro de massa do sistema permanece constante: se o sistema está em repouso, ele permanece assim; se está em movimento, ele passa a ter movimento retilíneo e uniforme.

Exemplo 25.2

Um núcleo radioativo decai emitindo um elétron e um neutrino que se movem, um relativamente ao outro, em ângulo reto (Figura 25.1). O momentum do elétron é $1,2 \times 10^{-22}$ *kg.m/s* e o do neutrino é 6×10^{-23} *kg.m/s*. (a) Ache o momentum do núcleo logo após o decaimento; (b) se a massa do núcleo residual é 5×10^{-26} *kg*, qual é a sua energia cinética?

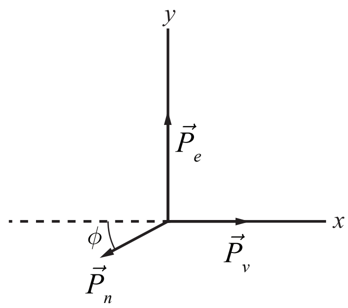


Figura 25.1 – Decaimento de um núcleo em elétron e neutrino.

Solução

A força que produz o decaimento do núcleo é uma força interna a ele, de origem nuclear. Portanto, podemos aplicar a conservação do momentum linear para o processo e dizer que o momentum linear logo antes do decaimento é igual ao logo depois dele:

$$\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{depois}.$$

Como o momentum linear é um vetor, a equação acima tem de ser escrita em termos das componentes em relação a um sistema de coordenadas adequadamente escolhido. A origem de coordenadas O é coincidente com o núcleo antes de decair. De acordo com o enunciado, o elétron (e) e o neutrino (v) se movem em trajetórias perpendiculares, seja Ox com direção e sentido de movimento do neutrino e Oy na direção e sentido de movimento do elétron. Antes de decair o núcleo estava em repouso, de modo que seu momentum linear é zero.

a) A conservação do momentum linear nos dá:

$$\vec{p}_e + \vec{p}_v + \vec{p}_n = 0.$$

Decompondo os vetores em componentes (Figura 25.1):

$$p_v - p_n cos\phi = 0,$$

$$p_e - p_n sen\phi = 0;$$

de onde tiramos:

$$p_n = \sqrt{p_v^2 + p_e^2} = \sqrt{(1.2\times10^{-22})^2 + (6.4\times10^{-23})^2}\ \ kg.m/s = 1{,}36\times10^{-22}\ \ kg.m/s,$$

$$\phi = arctg\left[\frac{p_e}{p_v}\right] = arctg(1{,}898) = 242^\circ.$$

b) Como $p = mv$ e $K = mv^2/2 = m^2v^2/(2\ m) = p^2/(2\ m)$. Então:

$$K = \frac{(1{,}36\times10^{-22})^2\ (kg.m/s)^2}{2\times5{,}8\times10^{-26}\ kg} = 1{,}59\times10^{-19}\ \ J.$$

Exemplo 25.3

Uma metralhadora atira balas cuja massa é $m = 50\ g$ com uma velocidade $v = 1.000$ m/s. O atirador, ao segurar a metralhadora, pode exercer sobre ela uma força média $F = 180\ \ N$ para compensar o coice da metralhadora. Qual é o número máximo de balas que a arma pode atirar por minuto de modo que o atirador possa segurá-la?

Solução

Considere o sistema constituído pelas balas e pela metralhadora. Ao ser expelida, a bala sai da metralhadora com um momentum linear $\vec{p}_b = m\vec{v}$. A força que a explosão exerce na bala também é exercida na metralhadora e ela recua com um momentum linear $\vec{p}_m = M\vec{V}$; portanto, a força pode ser considerada como sendo interna ao sistema, e o momentum linear dele se conserva. Escolhendo o sentido positivo de movimento coincidindo com o da bala e supondo que o sistema esteja inicialmente em repouso, podemos escrever que:

$$p_b + p_m = mv + MV = 0 \qquad \rightarrow \qquad V = -\frac{m}{M}v.$$

O valor negativo para V indica que a metralhadora se move no sentido oposto ao da bala.

Seja n o número de balas por segundo que a metralhadora deve atirar e F a força média que o homem tem que exercer sobre a metralhadora para impedir seu movimento. Então, da equação 25.3:

$$F = nmv,$$

ou $n = 3{,}6\ s^{-1}$. Então, o número de balas que deve ser atirado por minuto é $N = 3{,}6\times60 = 220$ balas/min.

Exemplo 25.4

Um vagão aberto de estrada de ferro de massa M se move com velocidade constante v_0 sobre trilhos sem atrito. Um homem de massa v inicialmente em repouso sobre o vagão começa a correr no sentido contrário ao do movimento do vagão e salta dele para o chão. Se a velocidade do homem em relacão ao vagão no instante em que ele salta é v_{rel}, qual é a variação de velocidade que o vagão sofre?

Solução

Considerando o homem e o vagão como um sistema de duas partículas, as forças exercidas entre o vagão e o homem são internas ao sistema. Portanto, o momentum linear do sistema se conserva. Se a velocidade do vagão depois do homem saltar é v em relação ao solo, a do homem é $v - v_{rel}$. A velocidade do centro de massa do sistema não é afetada e, assim:

$$v_{cm} = v_0 = \frac{Mv + m(v - v_{rel})}{M + m}.$$

A variação da velocidade do vagão é, então:

$$\Delta v = v - v_0 = \frac{mv_{rel}}{M + m}.$$

Exemplo 25.5

Um bloco de massa m é mantido em repouso no alto de uma cunha de ângulo de inclinação α e massa M (Figura 25.2). A cunha também está em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito. Não há também atrito entre o bloco e a cunha. Solta-se o bloco, que passa a deslizar sobre a cunha. Se a altura inicial do bloco em relação à superfície horizontal é h, qual é a velocidade da cunha no instante que o bloco chegar à mesa?

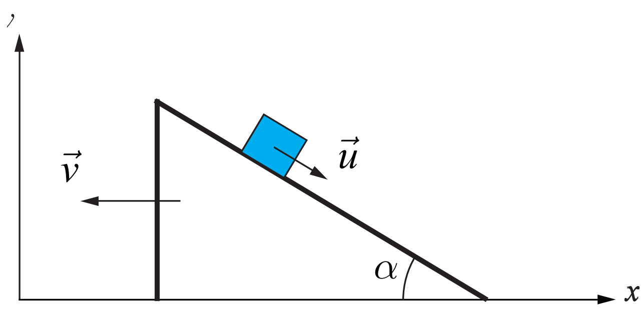


Figura 25.2 – Bloco e cunha sem atrito.

Solução

Sejam $\vec{u}$ a velocidade do bloco em relação à cunha; $\vec{V}$ a da cunha em relação à mesa; e $\vec{v}$ a velocidade do bloco em relação à mesa. De acordo com a lei de composição de velocidades:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}.$$

Como o bloco está sempre em contato com a cunha, vem que:

$$\vec{v} = (u cos\alpha - V)\hat{i} - (u sen\alpha)\hat{j}.$$

A componente horizontal do momentum do sistema bloco + cunha se conserva, assim:

$$-MV + m(u\cos\alpha - V) = 0;$$

pois, inicialmente, o sistema estava em repouso relativamente à mesa. Dessa equação, obtemos que:

$$V = \frac{m\cos\alpha}{m+M}u.$$

No instante em que o bloco atinge a mesa, temos, da conservação da energia:

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

O módulo de $\vec{v}$ é dado pela regra de soma de vetores aplicada à lei de composição de velocidades:

$$v^2 = V^2 + u^2 - 2\,uV\cos\alpha;$$

A velocidade da cunha quando o bloco toca na mesa pode ser determinada substituindo na equação acima u por seu valor em função de V e v também em função de V. O resultado é:

$$V^2 = \frac{2\,ghm^2\cos\alpha}{(m+m)[(m+M) - m\cos^2\alpha]}.$$

25.3 SISTEMAS COM MASSA VARIÁVEL

Até agora foi feita a hipótese de que a massa do sistema de partículas permanece constante. Veja agora como tratar um sistema cuja massa varia com o tempo, numa taxa determinada.

Considere um sistema de massa m cujo centro de massa se move com uma velocidade $\vec{v}$ e está sujeito a uma força externa. Suponhamos que no intervalo de tempo dt, um elemento de massa dm seja ejetado do sistema e que o centro de massa do elemento ejetado se mova com velocidade $\vec{u}$, relativa a um observador em repouso em O. A massa do sistema passa a ser $m - dm$ e a velocidade do centro de massa, $\vec{v} + d\vec{v}$. Essa situação é a que ocorre, por exemplo, com foguetes: a massa ejetada é o gás produzido pela queima do combustível; as forças externas são a gravidade e a resistência do ar.

O problema pode ser tratado de dois modos diferentes: no primeiro, considere o sistema com massa constante tendo partes que trocam massa entre si; nesse caso, o que ocorre é a mudança de posição de uma parte do sistema relativamente à outra. O segundo modo de tratar o problema consiste em supor o sistema com massa variável no tempo.

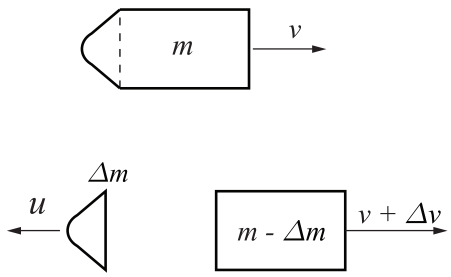


Figura 25.3 – Um sistema com massa variável.

Veja então como tratar o problema de acordo com o primeiro ponto de vista (Figura 25.3): no instante t, o centro de massa do sistema possui a massa m e se move com velocidade $\vec{v}$; no instante $t+\Delta t$, o sistema é constituído de duas partes, uma cujo centro de massa tem massa $m-\Delta m$ e velocidade $\vec{v}+\Delta\vec{v}$, e outra cujo centro de massa tem massa Δm e velocidade $\vec{u}$. De acordo com a segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_E = \frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(m-\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})+\Delta m\,\vec{u}\,]-m\vec{v}}{\Delta t};$$

ou, desenvolvendo:

$$F_E = \frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m\vec{v}+m\Delta\vec{v}-\Delta m\,\vec{v}-\Delta m\,\Delta\vec{v}+\Delta m\,\vec{u}-m\vec{v}}{\Delta t}.$$

Tomando o limite e desprezando o produto $\Delta m\Delta\vec{v}$, que é muito menor que Δm ou $\Delta\vec{v}$, obtemos:

$$\vec{F}_E = m\frac{d\vec{v}}{dt} + [\vec{u}-\vec{v}\,]\frac{dm}{dt}. \qquad (25.4)$$

Nessa equação, $\frac{dm}{dt}$ é a taxa de transferência de massa de uma parte do sistema para outra. Por exemplo, considere o caso de um foguete. O sistema, nesse caso, é o foguete + combustível. O combustível é ejetado do foguete com uma taxa contínua igual a $\frac{dm}{dt}$. Na equação 25.4, essa taxa é positiva, mas é usual considerar que o foguete **perde** massa; por isso, ela é suposta sempre negativa. Isso significa que, na equação 25.4, o segundo termo do segundo membro passa a ter o sinal trocado. Então, **com** $\frac{dm}{dt}$ **negativo**, a equação 25.4 passa a ser escrita:

$$\vec{F}_E = m\frac{d\vec{v}}{dt} - [\vec{u}-\vec{v}\,]\frac{dm}{dt}. \qquad (25.5)$$

O termo $[\vec{u}-\vec{v}\,]$ é a diferença entre as velocidades relativas ao referencial inercial, da massa Δm e da massa $m-\Delta m$; portanto ele é igual à velocidade da massa Δm **relativa à massa** $m-\Delta m$. Escrevendo-a como $\vec{v}_{rel} = [\vec{u}-\vec{v}\,]$, a equação acima fica:

$$\vec{F}_E = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_{REL}\frac{dm}{dt}. \qquad (25.6)$$

Exemplo 25.6 – O funcionamento de uma turbina de avião

Um jato voa com uma velocidade de 183 *m/s*. A cada segundo, os motores recebem 68 m^3 de ar tendo uma massa de 70 *kg*. O ar é usado para queimar 2,9 *kg* de combustível por segundo. A energia gerada é usada para comprimir os produtos da combustão e ejetá-los para trás do avião com uma velocidade de 488 *m/s*. Ache a força efetiva que atua no avião e a potência (em *HP*) liberada a ele.

Solução

Ao absorver o ar, a turbina sofre uma força F_1 de módulo igual a:

$$F_1 = v_{REL}\frac{dm}{dt} = 183\ m/s \times 70\ kg/s = 1,28\times 10^4\ kg.ms/s^2 = 1,28\times 10^4\ N.$$

A massa ejetada em cada segundo consiste em 70 *kg* de ar mais 2,9 *kg* de combustível. Então, a força que a mistura combustível + ar exerce sobre o avião é:

$$F_2 = v_{REL}\frac{dm}{dt} = 488\ m/s \times 72,9\ kg/s = 3,56\times 10^4\ N.$$

A diferença entre a força que o ar exerce sobre a turbina do avião e a força que a mistura ar + combustível exerce sobre o avião produz a força efetiva que faz o avião se deslocar. Seu valor é:

$$F = F_2 - F_1 = (3,56 - 128)\times 10^4 = 2,28\times 10^4\, N.$$

A potência liberada ao avião é:

$$P = \vec{F}\bullet\vec{v} = 2,28\times 10^4\, N \times 183\ m/s = 4,17\times 10^6\ W = 4,17\ MW.$$

Como 1 $HP = 745{,}5\ W1$, a potência em *HP* é:

$$P = \frac{4,17\times 10^6\ W}{745,5\, W\ /\ HP} = 5,60\times 10^3\, HP.$$

No segundo modo de tratar o problema, suponha que o sistema é apenas o foguete com massa variável no tempo. Nesse caso, aplique a segunda lei de Newton, escrevendo a equação 25.5 como:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_E - \vec{v}_{REL}\frac{dm}{dt}, \qquad (25.7)$$

e interpretando a quantidade $\vec{v}_{REL} = [\vec{u} - \vec{v}]$ como sendo a velocidade relativa da massa ejetada **em relação ao foguete**. O segundo termo do segundo membro é a taxa de transferência de momentum (para ou do) sistema pela massa (coletada ou ejetada), isto é, a força exercida no sistema pela massa ejetada ou acrescida por ele.

Exemplo 25.7

Um foguete tem uma massa de 30.000 *kg* quando completamente abastecido de combustível e pronto para ser lançado. O combustível produz ejeção de gases numa taxa de 146 *kg/s* com uma velocidade relativa ao foguete de 5.500 *km/h*. Quando o combustível acaba, a massa do foguete é de 10.000 *kg*. Desprezando todas as forças externas ao sistema, qual é a velocidade final do foguete?

Solução

De acordo com 25.7, se as forças externas são desprezíveis, temos que:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{REL}\frac{dm}{dt},$$

ou

$$d\vec{v} = \vec{v}_{REL}\frac{dM}{M}.$$

Integrando essa expressão, supondo $\vec{v}_{rel}$ constante durante todo o movimento do foguete, temos que:

$$\int_{v_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{v}_{REL}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M},$$

em que M_0 é a massa do foguete quando sua velocidade é $\vec{v}_0$. Efetuando a integração:

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = -\vec{v}_{REL}\ln\left(\frac{M_0}{M}\right).$$

No nosso caso, $\vec{v}_0 = 0$ e $\frac{M_0}{M} = 30.000/10.000 = 3,0$, de modo que a velocidade do foguete, ao terminar o combustível, é:

$$v = 5.500\ km/h \times \ln(3,0) = 6402\ km/h.$$

Exemplo 25.8

A Figura 25.4 mostra uma esteira rolante carregando areia, que cai verticalmente sobre ela numa taxa constante. Qual deve ser a força F aplicada à esteira para que ela permaneça se movendo com velocidade constante?

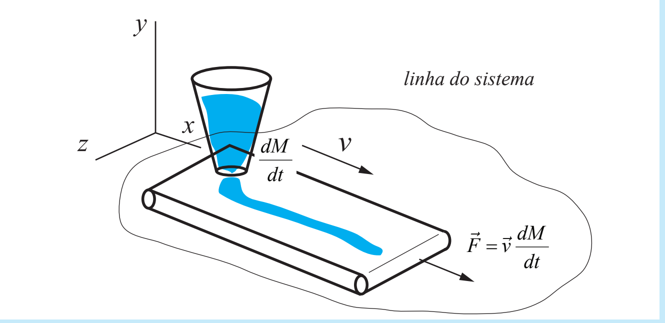


Figura 25.4 – A esteira rolante.

Solução

Considere o sistema de massa variável como sendo a esteira. Então, a equação 25.7 se aplica. Como ela se move com velocidade constante, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$. Além disso, para um observador em repouso na esteira, a areia cai sobre ela parecendo ter uma componente horizontal de movimento com velocidade $\vec{v}$ no sentido oposto ao do movimento da esteira quando visto por um observador fora dela. Assim $\vec{v}_{rel} = -\vec{v}$, e a equação 25.7 fica:

$$0 = \vec{F} - \vec{v}\frac{dM}{dt},$$

ou:

$$\vec{F} = \vec{v}\frac{dM}{dt}.$$

Nesse exemplo, como o sistema está ganhando massa, $\frac{dM}{dt}$ é positiva. O resultado mostra então que a força necessária para manter a esteira com velocidade constante tem o mesmo sentido que o do movimento da esteira.

ATIVIDADE 25.1

Uma corrente é composta por elos iguais e de mesma massa, formando um comprimento L. Segurando-a, de modo que ela fique na vertical, deixe-a cair sobre uma mesa. Enquanto ela cai, qual é a força que a mesa exerce sobre a corrente?

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 25.1

Seja N a força que a mesa exerce sobre a corrente. Essa força é igual ao peso da corrente que está sobre a mesa mais a força exercida por um elo que acaba de cair sobre ela. Suponha que um elo esteja a uma altura x da mesa. Ao chegar à mesa, o comprimento x já está sobre ela. Então:

$$N = \frac{M}{L}xg + \frac{dp}{dt}.$$

Se *dM* é o elemento de massa contido em *dx*, temos que:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(dM)v}{dt} = \frac{M}{L}\frac{dx}{dt}v = \frac{M}{L}v^2 = \frac{M}{L}2gx.$$

Logo, a força N fica:

$$N = \frac{M}{L}xg + 2\frac{M}{L}gx = 3\frac{M}{L}xg.$$

Isto é, enquanto a corrente cai, a mesa exerce sobre a parte que já está sobre ela uma força três vezes maior que o seu peso.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Mostre que a razão das distâncias de duas partículas ao centro de massa comum é igual à razão inversa de suas massas.

E2. A massa da Lua é cerca de 0,013 vezes menor que a da Terra e a distância entre os centros dos dois astros é aproximadamente 60 vezes o raio da Terra. Localize o centro de massa do sistema Terra-Lua relativamente ao centro da Terra.

E3. Na molécula de amônia (NH_3) os três átomos de H formam um triângulo equilátero de lado igual a $1{,}628\times10^{-10}m$, de modo que o centro do triângulo está a $9{,}39\times10^{-11}$ m de cada átomo de H. O átomo de N está no ápice da pirâmide, com os três átomos de H formando a base dela. Ache o centro de massa da molécula relativamente ao átomo de N.

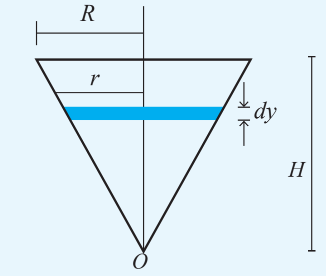
E4. Duas partículas, P, de massa 100 g, e Q, de massa 300 g, estão inicialmente em repouso a uma distância de 1,0 m uma da outra. Elas se atraem com uma força de $1{,}0 \times 10^{-2}$ N. Não há forças externas atuando nelas. Descreva o movimento do centro de massa. Em que distância da posição original de P elas colidem?

E5. Um homem pesando 70 kg está em repouso sobre um lago gelado. Ele chuta uma bola de 0,50 kg, que adquire uma velocidade de 2,0 m/s. Que velocidade adquire o homem logo após chutar a bola?

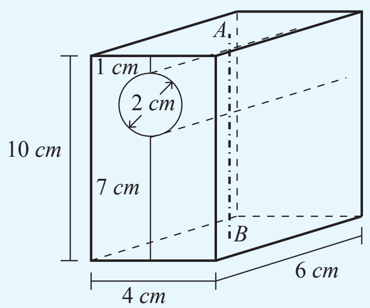
PROBLEMAS DA UNIDADE 8

P1. Calcule o centro de massa de uma placa semicircular homogênea de raio R.

P2. Calcule o centro de massa de um cone homogêneo reto de altura H e de base circular de raio R (Figura 25.3) usando coordenadas cilíndricas. Repita o cálculo considerando o cone composto de discos de raio r e altura dz.



P3. Um paralelepípedo homogêneo de densidade ρ e de lados 10,0 cm × 6,0 cm × 4,0 cm é perfurado de modo a se obter um buraco cilíndrico de diâmetro 2,0 cm, cujo eixo está situado a 3,0 cm de uma de suas faces, como mostra a figura a seguir. Determine a posição do centro de massa relativamente ao ponto A do paralelepípedo.



P4. Um projétil é lançado com uma velocidade de 50 m/s em um ângulo de 45° com a horizontal. No ponto mais alto de sua trajetória, ele explode em dois fragmentos de mesma massa. Um dos fragmentos, cuja velocidade inicial é nula, cai verticalmente. Calcule a distância do ponto de lançamento em que o outro fragmento choca-se com o solo, supondo o terreno plano e horizontal. Que hipótese você tem que fazer para que sua resposta esteja correta?

P5. Um foguete ejeta gás a uma taxa de 10,0 kg/s e velocidade relativa de 3.000 m/s. (a) Qual é o empuxo do foguete? (b) Se ele for lançado verticalmente a partir do repouso e massa inicial de 5.000 kg, qual será a sua aceleração inicial? Qual será sua velocidade 60 s após o lançamento? Despreze a força da gravidade.

P6. Um foguete com seu combustível tem massa de 10.000 kg. Se ele pode ejetar gases à velocidade de 2.000 m/s, a que taxa esses gases devem ser ejetados para que o foguete arranque verticalmente com aceleração de 3 g?

UNIDADE 9
Forças impulsivas e colisões

Quando você chuta uma bola, seu pé fica em contato com ela durante um intervalo de tempo muito pequeno, mas ainda assim você pode determinar o início e o fim da colisão. Durante este intervalo de tempo, seu pé exerce sobre a bola uma força impulsiva. Uma colisão é uma interação entre dois ou mais corpos que tem uma duração limitada, por exemplo, a colisão de um carro de corrida contra a barreira de pneus.

AULA 26

Impulso e momentum linear

Objetivos

- Definir impulso de uma força;
- Aplicar a conservação de momentum linear no estudo de colisões.

26.1 RELACIONANDO IMPULSO E MOMENTUM LINEAR

Forças impulsivas são forças que atuam durante intervalos de tempo muito curtos. Um caso importante de atuação de forças impulsivas é o das que atuam em uma colisão. Uma colisão é a interação entre dois ou mais corpos que tem duração limitada. Um tipo de colisão importante é aquela em que pelo menos uma das partículas muda abruptamente o seu estado de movimento, de tal forma que podemos separar claramente os intervalos de tempo de antes e de depois da colisão. Quando chutamos uma bola, por exemplo, nosso pé está em contato com ela durante um intervalo de tempo muito pequeno, mas você ainda pode determinar o início e o fim da colisão. Durante esse intervalo de tempo, seu pé exerce uma **força impulsiva** sobre a bola.

Suponha que uma força impulsiva atue sobre uma partícula durante um intervalo de tempo dt. A variação instantânea do momentum linear da partícula, de acordo com a segunda lei de Newton, é dada por:

$$d\vec{p} = \int \vec{F} dt.$$

Se a força atua durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i$, a variação total do momentum linear é:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt. \qquad (26.1)$$

Chama-se de **impulso de uma força** ($\vec{I}$) à integral dessa força sobre um dado intervalo de tempo:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt. \qquad (26.2)$$

O impulso mede o efeito da força no tempo, isto é, com o impulso, podemos comparar o efeito de forças que atuam durante o mesmo intervalo de tempo.

Das equações 26.1 e 26.2, temos que:

$$\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p},$$

isto é, **a variação do momentum linear da partícula é igual ao impulso da força que causa esta variação**.

ATIVIDADE 26.1 – CÁLCULO DO IMPULSO A PARTIR DA VARIAÇÃO DO MOMENTUM LINEAR

Um nadador de massa de 70 *kg* aproxima-se da borda da piscina com uma velocidade de 3,0 *m/s*, quando, então, toca nela e vira, voltando com a mesma velocidade com que chegou. Se ele ficou em contato com a parede da piscina durante 0,01 *s*, determine a força média que ele teve que aplicar sobre ela para efetuar a virada.

26.2 COLISÕES

Considere agora duas partículas que colidem. Durante a colisão, eles exercem mutuamente forças que são muito intensas e que duram um intervalo de tempo muito pequeno. A variação do momentum linear de cada uma das partículas, devida à ação dessas forças, é dada pela equação 26.1. Os impulsos exercidos por cada partícula, uma sobre a outra, estarão aplicados sobre partículas diferentes, mas, considerando as duas partículas como um sistema, elas estarão aplicadas sobre este. De acordo com a terceira lei de Newton, sua soma sobre o sistema se anula, assim como seus impulsos. Então, **para o sistema das partículas que colidem, o momentum linear se conserva.**

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Em uma colisão, a conservação do momentum linear do sistema pode ainda ser aplicada, mesmo que a soma das forças externas sobre o sistema de partículas que colidem não seja nula. Basta que as forças impulsivas que atuam durante a colisão sejam muito maiores que as forças externas ao sistema.

Nesta aula, você estará interessado no movimento de translação de corpos que colidem; portanto, eles serão substituídos por partículas que representam os seus respectivos centros de massa.

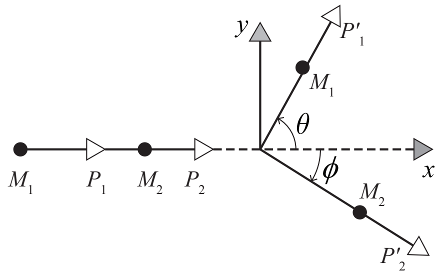


Figura 26.1 – A colisão bidimensional de duas partículas.

No caso de duas partículas, o movimento se faz em um plano. A Figura 26.1 mostra duas partículas que se movem sobre a mesma reta antes da colisão. Depois da colisão, elas se movem em outras direções, especificadas pelos ângulos θ e ϕ que essas direções fazem com a direção de antes da colisão. A conservação do momentum linear fica:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'. \tag{26.3}$$

Escolhendo a origem de coordenadas no ponto de colisão e o eixo Ox coincidente com a direção e o sentido de movimento da partícula 1 antes da colisão, a equação 26.3 se escreve, projetando os vetores sobre os eixos de coordenadas:

$$p_1 + p_2 = p_1' cos\theta + p_2' cos\phi, \tag{26.4}$$

$$0 = p_1' sen\theta - p_2' sen\phi. \tag{26.5}$$

O sistema de equações acima pode ser resolvido se forem conhecidas quatro das seis quantidades: $\vec{p}_1$, $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_2'$, θ, ϕ. Em geral, isso não acontece, e somos, então, obrigados a procurar uma outra equação para completar o sistema. Fisicamente isso significa que a conservação do momentum linear sozinha não é suficiente para determinar as características de uma colisão. Para resolver o problema completamente, lançamos mão da conservação (ou não) da energia mecânica total do sistema.

Em uma colisão, os corpos reais se deformam e parte da energia do sistema se transforma em energia elástica ou se perde na deformação dos corpos. No caso de partículas, por não possuírem dimensão, elas não se deformam e a variação de energia mecânica é apenas de energia cinética. A conservação da energia fica, então:

$$E_{c1} + E_{c2} = E_{c1}' + E_{c2}' + Q, \tag{26.6}$$

em que $E_{ci} = \dfrac{p_i^2}{2m_i}$ é a energia cinética da partícula i, e Q é a quantidade de energia perdida ou ganha pelo sistema na colisão.

As equações 26.4, 26.5 e 26.6 podem então ser resolvidas quando conhecemos três das quantidades: p_1'/p_1, p_2/p_1, p_2'/p_1, θ, ϕ, m_2/m_1 e Q.

Quando $Q = 0$, a energia cinética se conserva e a colisão é chamada de *completamente elástica*; quando $Q \neq 0$, a colisão é dita *inelástica*; quando $Q \neq 0$ e as velocidades das partículas depois da colisão são iguais, a colisão é chamada *completamente inelástica*.

26.3 COLISÕES ELÁSTICAS

Sejam duas partículas, de massas m_1 e m_2 e velocidades $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ que colidem em um dado ponto do espaço. Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são as velocidades das partículas após a colisão, a conservação do momentum linear fica, então:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Seja a Figura 26.1 que representa a colisão de duas partículas. As equações 26.4, 26.5 e 26.6, para $Q = 0$, ficam:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 cos\theta + m_2 v_2 cos\phi, \tag{26.7}$$

$$0 = m_1 v_1 sen\theta - m_2 v_2 sen\phi, \tag{26.8}$$

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2. \tag{26.9}$$

Exemplo 26.1

Uma molécula de um gás com uma velocidade de 300 *m/s* colide elasticamente com outra molécula de mesma massa, inicialmente em repouso. Depois da colisão, a primeira molécula se move numa direção que faz um ângulo de 30° com a direção inicial de seu movimento. Ache a velocidade de cada uma das moléculas depois da colisão e o ângulo que a direção de movimento da segunda molécula faz com a direção de incidência da primeira.

Solução

Nesse caso, $u_2 = 0$ e as equações acima se escrevem com $\theta = 30^\circ$, u_1 = 300 *m/s* e $m_1 = m_2$:

$$u_1 = v_1 cos\theta + v_2 cos\phi, \tag{26.10}$$

$$0 = v_1 sen\theta - v_2 sen\phi, \tag{26.11}$$

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2. \tag{26.12}$$

As incógnitas são v_1, v_2 e ϕ. Escrevendo a primeira equação como $u_1 - v_1 cos\theta = v_2 cos\phi$, tomando o seu quadrado e somando-o com o quadrado da segunda equação, obtém-se:

$$u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 cos\theta = v_2^2.$$

Combinando essa e a terceira equação do sistema, aparece:

$$2v_1^2 = 2u_1 v_1 cos\theta,$$

que dá:

$$v_1 = u_1 cos\theta = 260\ m/s.$$

Da terceira equação:

$$v_2 = \sqrt{u_1^2 - v_1^2} = u_1\sqrt{1-cos^2\theta} = u_1 sen\theta = 150\, m/s.$$

Finalmente, ainda da terceira equação:

$$sen\phi = \frac{v_1}{v2} sen\theta = 0.866 \qquad\qquad \phi = 60^\circ.$$

ATIVIDADE 26.2 – COLISÃO ENTRE CORPOS DE MESMA MASSA

Mostre que, numa colisão completamente elástica, se as partículas que colidem possuem a mesma massa, o ângulo entre as suas direções de movimento após a colisão é sempre um ângulo reto.

Quando a colisão se faz entre corpos de dimensão finita, podemos determinar, *a priori*, se a colisão será unidimensional ou bidimensional. No primeiro caso, os corpos se movem, após a colisão, ao longo da reta que contém a trajetória do corpo incidente; para isso, é preciso que os centros de massa dos dois corpos estejam alinhados com a reta percorrida pelo centro de massa do corpo incidente.

26.4 COLISÕES ELÁSTICAS UNIDIMENSIONAIS

A colisão unidimensional é um caso particular do bidimensional, na qual as partículas, antes e depois da colisão, movem-se sobre a mesma reta. Sejam $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ as velocidades das partículas de massas m_1 e m_2 antes da colisão, e $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ as velocidades depois da colisão (Figura 26.2). As equações 26.6 e 26.7 ficam:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \tag{26.13}$$

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2. \tag{26.14}$$

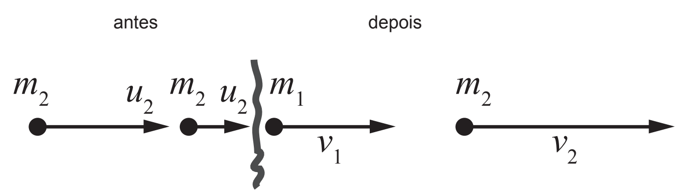


Figura 26.2 – A colisão unidimensional de duas partículas.

Escolhendo o sentido positivo do eixo Ox, coincidente com o sentido de movimento da massa m_1, temos que:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \tag{26.15}$$

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2. \tag{26.16}$$

Como não é possível saber *a priori* quais os sentidos de movimento das partículas após a colisão, nas equações acima foi suposto que o sentido é o mesmo que o do eixo Ox. Se, depois da colisão, alguma das partículas (ou ambas) se mover em sentido contrário, você poderá saber por que o sinal das respectivas velocidades será negativo.

O sistema acima pode ser reescrito como:

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2), \tag{26.17}$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2). \tag{26.18}$$

Dividindo membro a membro, 26.18 por 26.17, vem:

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2,$$

ou:

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1. \tag{26.19}$$

O primeiro membro da igualdade é a velocidade da partícula m_1 relativamente à m_2; o segundo membro é a velocidade de m_2 relativa a m_1. Então, numa colisão unidimensional elástica, a velocidade com as quais as partículas se aproximam uma da outra (antes da colisão) é igual à velocidade com que elas se afastam (depois da colisão).

Para calcular as velocidades finais das partículas, relativamente ao referencial fixo adotado, temos que resolver o sistema de equações 26.17 e 26.18. Para isso, tiramos o valor de v_2 em 26.19 e levamos em 26.17, obtendo:

$$v_2 = u_1 + v_1 - u_2.$$

Levando v_2 em 26.17, vem:

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2. \tag{26.20}$$

Da mesma forma, tirando o valor de v_1 da equação 26.19 e levando em 26.17, vem:

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)u_2. \tag{26.21}$$

Essas equações são a solução do problema da colisão completamente elástica unidimensional entre duas partículas, com a de massa m_1 incidente sobre a de massa m_2. Delas podemos tirar alguns casos particulares:

a) se $m_1 = m_2$: $v_1 = u_2$ $\qquad v_2 = u_1$;

isto é, as partículas trocam as velocidades. Se a partícula de massa m_2 está em repouso antes da colisão, ela adquire a velocidade da massa m_1, que, por sua vez, fica em repouso:

b) se $m_2 >> m_1$: $v_1 = -u_1$ $\qquad v_2 = 0$;

ou seja, a massa muito grande praticamente não se move, enquanto a massa muito pequena incidente reverte seu sentido de movimento:

c) se $m_1 >> m_2$: $v_1 = u_1$ $\qquad v_2 = 2v_1$;

o que significa que a velocidade da partícula massiva incidente praticamente não se modifica, enquanto a menos massiva adquire uma velocidade igual a quase o dobro da velocidade da partícula incidente.

Exemplo 26.2

Considere uma colisão elástica frontal entre um nêutron (massa m_1) e um núcleo de um átomo (massa m_2) inicialmente em repouso. Calcule qual a fração da energia cinética do nêutron é perdida na colisão. Essa fração é:

$$F = \frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1^2} = 1 - \frac{v_1^2}{u_1^2}.$$

Solução

De acordo com 26.18, como $u_2 = 0$:

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1.$$

Então:

$$F = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Para um átomo de chumbo, $m_2 = 206\ m_1$ e $F = 0,02$; para o Carbono, $m_2 = 12\ m_1$ e $F = 0,28$; para o hidrogênio, $m_2 = m_1$ e $F = 1$;

ATIVIDADE 26.3 – COLISÃO ELÁSTICA UNIDIMENSIONAL

Ao tentar ultrapassar um automóvel, um caminhão de massa 2,00 toneladas e velocidade de 100 *km/h* choca-se frontalmente com um outro automóvel, de massa 500 *kg* e velocidade 120 *km/h*, que vinha no sentido contrário ao do caminhão. Logo após o choque, quais são as velocidades do caminhão e do carro, supondo a colisão completamente elástica?

26.5 COLISÕES COMPLETAMENTE INELÁSTICAS

Numa colisão completamente inelástica, as velocidades finais das duas partículas são iguais. A conservação do momentum fica:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}. \quad (26.22)$$

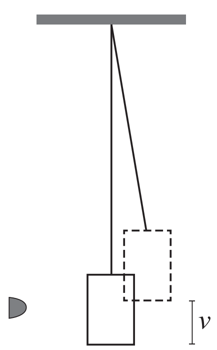


Figura 26.3 – O pêndulo balístico.

Uma aplicação interessante das colisões completamente inelásticas é o pêndulo balístico, usado para medir a velocidade de balas. Ele é constituído por um bloco de madeira de massa *M*, suspenso por duas cordas de massa desprezível. Uma bala de massa *m* é lançada contra o bloco e na colisão penetra nele. Se o tempo de colisão (isto é, o tempo que a bala leva para parar dentro do bloco) for pequeno em comparação com o tempo de oscilação do pêndulo, as cordas permanecem praticamente verticais durante a colisão. Então, nenhuma força externa atua no sistema bloco + bala durante a colisão e a componente horizontal do momentum linear se conserva. A equação 26.22 fica:

$$mu = (M + m)v.$$

Quando a colisão termina, o sistema se desloca até uma altura máxima y, com a energia cinética do sistema após o impacto da bala sendo transformada em energia potencial gravitacional. A conservação da energia nos dá:

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gy.$$

Resolvendo estas duas últimas equações para a velocidade u, temos:

$$u = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gy},$$

e a velocidade da bala pode ser determinada conhecendo sua massa m, a do bloco M e medindo a altura y que ele alcança.

ATIVIDADE 26.4 – COLISÃO COMPLETAMENTE INELÁSTICA

Na atividade 26.1 estudamos a colisão completamente elástica entre um caminhão e um carro. Qual seria o resultado se a colisão fosse completamente inelástica?

ATIVIDADE 26.5 – EFEITO DA COLISÃO

Se o coeficiente de atrito entre os pneus do carro e do caminhão com o asfalto for $\mu = 0{,}50$, qual é a distância percorrida pelo sistema até parar, supondo a estrada plana e horizontal.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 26.1 – Cálculo do impulso a partir da variação do momentum linear

Considere o sentido positivo do movimento do nadador como sendo aquele em que ele se aproxima da borda da piscina. Seu momentum linear é, então:

$$p_i = mv = 70 \times 3{,}0 = +210\ kg.m/s.$$

Ao tocar na parede, ele exerce sobre ela um impulso igual e oposto ao que a parede exerce sobre ele. Ao voltar, seu momentum linear é:

$$p_f = -mv = -210\ kg.m/s.$$

Logo, a variação de seu momentum linear foi:

$$\Delta p = p_f - p_i = -2mv = -420\ kg.m/s,$$

e a força média **que a parede exerceu sobre ele** foi:

$$F = \frac{p_f - p_i}{\Delta t} = \frac{-420}{0.01} = -4,2 \times 10^4 \ kg.m/s^2$$

(o sinal negativo mostra que a força tem sentido da parede para o meio da piscina). Então, a força que ele exerce sobre a parede é:

$$F' = -F = 4,2 \times 10^4 \ kg.m/s^2 = 42 \times 10^3 N.$$

Atividade 26.2 – Colisão entre corpos de mesma massa

No exemplo 26.1, foi obtido que $v_1 = u_1 cos\theta$ e $v_2 = u_1 sen\theta$. Levando essas expressões em 26.11, obtemos:

$$u_1 cos\theta sen\theta = u_1 sen\theta sen\phi,$$

de onde se tira que $cos\theta = sen\phi$, e então $\theta = \pi/2 - \phi$, ou ainda $\theta + \phi = \pi/2$.

Atividade 26.3 – Colisão elástica unidimensional

Sejam $m_1 = 2,0 \times 10^3 kg$, $u_1 = 1,00 \times 10^2 \ km/h = 27,8 \, m/s$ a massa e a velocidade do caminhão e $m_2 = 5,00 \times 10^2 kg$ e $u_2 = 1,20 \times 10^2 \ km/h = 33,3 \ m/s$ a massa e a velocidade do carro. Escolhendo um sistema de coordenadas com origem O em um ponto da estrada e eixo Ox com direção e sentido do movimento do caminhão, temos $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$; com as projeções dos vetores momentum das partículas do sistema caminhão + carro, obtemos a conservação do momentum linear e da energia do sistema:

$$m_1 u_1 - m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Dividindo membro a membro a segunda equação pela primeira:

$$u_1 + v_1 = v_2 - u_2.$$

Tirando o valor de v_1 dessa equação e levando na expressão da conservação do momentum, obtemos:

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) u_1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) u_2.$$

Analogamente, tirando o valor de v_2 da equação e levando na expressão da conservação do momentum, obtém-se:

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 - \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) u_2.$$

(Compare as formas dessas duas equações com as equações 26.20 e 26.21 para ver o que aconteceu quando o sentido de uma das partículas é invertido). Com os valores numéricos, temos, então:

$$v_1 = \frac{(2,00 - 0,50) \times 10^3}{(2,00 + 0,50) \times 10^3} \times 1,00 \times 10^2 - \frac{2,00 \times 0,50 \times 10^3}{(2,00 + 0,50) \times 10^3} \times 1,20 \times 10^2 = 12,0 \ km/h,$$

$$v_2 = \frac{2,00 \times 2,00 \times 10^3}{(2,00+0,50)\times 10^3} \times 1,00 \times 10^2 - \frac{(0,50-2,00)\times 10^3}{(2,00+0,50)\times 10^3} \times 1,20 \times 10^2 = 2,32 \times 10^2 \; km/h.$$

Atividade 26.4 – Colisão completamente inelástica

A equação 26.22 se escreve com o eixo Ox na direção e no sentido do movimento do caminhão:

$$m_1 u_1 - m_2 u_2 = (m_1 + m_2)V,$$

sendo V a velocidade do sistema carro + caminhão depois da colisão. Numericamente, obtemos:

$$V = \frac{m_1 u_1 - m_2 u_2}{m_1 + m_2} = \frac{2,00 \times 10^3 \times 1,00 \times 10^2 - 0,50 \times 10^3 \times 1,20 \times 10^2}{(2,00+0,50)\times 10^3} = 56,0 \; km/h.$$

Atividade 26.5 – Efeito da colisão

A desaceleração do sistema é constante porque a força de atrito (F_a) entre os pneus e o asfato é constante. Como $F_a = \mu(m_1 + m_2)g$, a aceleração é $a = \mu g$. Então, a distância percorrida é:

$$X = \frac{V^2}{2a} = \frac{V^2}{2\mu g}.$$

Com $V = 56,0\, km/h = 15,6 m/s$, $g = 9,8\, m/s$ e $\mu = 0,50$, vem $X = 24,7m$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um taco de sinuca bate sobre uma bola e exerce sobre ela uma força de 50 *N* durante 10 *ms*. Se a massa da bola é de 200 *g*, qual é a velocidade da bola logo após o impacto do taco?

E2. Uma bola cai verticalmente e, ao chegar ao solo, tem uma velocidade de 25 *m/s*. Após se chocar contra o solo, ela sobe com velocidade inicial de 10 *m/s*. (a) Qual é o impulso exercido pelo solo sobre a bola? (b) Se ela fica em contato com o solo durante 0.020 *s*, qual é a força média exercida pelo solo sobre ela?

E3. Uma bala de massa 10 *g*, deslocando-se horizontalmente, choca-se contra um pêndulo balístico de massa 2,0 *kg*, ficando nele embebida. O centro de massa do pêndulo sobe então verticalmente de 12 *cm*. Qual é a velocidade da bala?

E4. Um corpo A de massa 2,0 *kg* movendo-se a 0,8 *m/s* choca-se com o corpo B, inicialmente em repouso. Após a colisão, o corpo A continua a se mover na mesma direção e sentido que antes, mas com uma velocidade igual a 1/4 da velocidade que tinha antes do choque. Qual é a massa do corpo B sabendo que ele se move a 1 *m/s* após o choque?

E5. Uma bola de sinuca ***A***, movendo-se com uma velocidade de 2,2 *m/s*, choca-se com uma bola ***B*** em repouso. Depois da colisão, ***A*** se move com velocidade de 1,1 *m/s* em uma direção que faz um ângulo de 60° com a direção original de seu movimento. Ache a velocidade de ***B***. Suponha que as bolas tenham massas iguais.

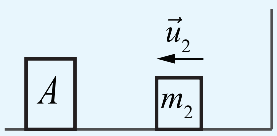
PROBLEMAS DA UNIDADE 9

P1. Um jogador de futebol chuta uma bola de massa 400 *g* que parte com uma velocidade de 100 *km/h*, fazendo um ângulo de 30° com o solo. A bola fica em contato com o pé do jogador durante 0,010 *s*.

a) Qual é a força média exercida pelo jogador sobre a bola?

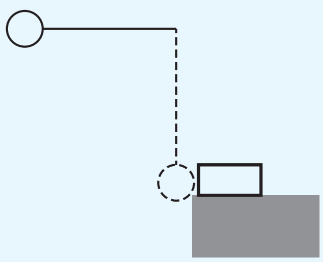
b) A que distância do jogador a bola bate no chão, supondo o terreno plano e horizontal?

P2. Um bloco (A) de massa 100 *kg* está em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito, que termina em uma parede (figura). Outro bloco (B) de massa m_2 é colocado entre o bloco A e a parede e posto em movimento com uma velocidade constante u_2 no sentido do bloco A. Supondo as colisões completamente elásticas, ache o valor da massa m_2 tal que os blocos se movam com a mesma velocidade depois que o bloco B colidir uma vez com A e uma vez com a parede.

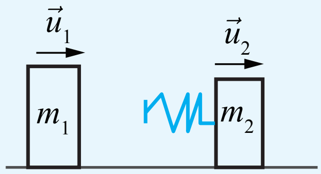


P3. Uma bala de massa 50 *g* é atirada contra um bloco de madeira com 2,0 *kg* de massa, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é 0,20. A bala penetra no bloco e fica dentro dele. O bloco se move de uma distância de 2,0 *m* até ficar novamente em repouso. Qual é a velocidade da bala ao penetrar no bloco?

P4. Uma bola de aço com massa de 5,0 *kg* forma a extremidade de um pêndulo simples cuja corda tem massa desprezível e comprimento de 70 *cm*. O pêndulo é colocado em uma posição em que a corda fica horizontal e, então, é solto. No ponto mais baixo da sua trajetória, encontra-se um bloco de massa 2,5 *kg* em repouso sobre uma superfície horizontal. A bola do pêndulo choca-se com o bloco e a colisão é completamente elástica. Quais são as velocidades do pêndulo e do bloco logo após o choque?



P5. Um bloco de massa m_1 = 2,0 *kg* desliza sobre uma superfície horizontal sem atrito com uma velocidade u_1 = 10 *m/s*. Um segundo bloco, de massa m_2 = 5,0 *kg* e velocidade u_2 = 3,0 *m/s*, move-se diretamente à sua frente e no mesmo sentido que ele. Uma mola sem massa e de constante elástica k = 1.120 *N/m* está fixada na parte traseira do bloco m_2. Quando os blocos colidem, qual é a compressão máxima da mola, supondo que ela não se dobre.



P6. Coloca-se uma caixa sobre uma balança e zera-se a balança. Em seguida, deixa-se cair, sucessivamente dentro da caixa, bolinhas de massa m numa taxa de μ bolinhas por segundo. Se a colisão entre as bolinhas e a caixa é completamente inelástica, ache a leitura da balança no instante t depois de as bolinhas começarem a se chocar na caixa. Determine numericamente o resultado com h = 8,25 *m*, μ = 100 s^{-1}, m = 50 *g* e t = 10 *s*.

P7. Uma partícula α colide com um núcleo de oxigênio inicialmente em repouso. A partícula α é desviada de um ângulo de 64° em relação à sua trajetória inicial e o oxigênio, de um ângulo de 51°, para o lado oposto da trajetória inicial. Qual é a razão das velocidades das partículas? A massa do oxigênio é quatro vezes a da partícula α.

P8. Dois veículos A e B estão se deslocando para oeste e sul, respectivamente. Numa esquina, eles se chocam e se aglutinam, passando a se moverem juntos. Antes da colisão, o veículo A pesa 450 *kg* e tem velocidade de 64 *km/h*; o veículo B pesa 600 *kg* e tem velocidade de 80 *km/h*. Ache o módulo e a direção da velocidade dos veículos depois da colisão.

P9. Duas bolas, A e B, possuem massas diferentes, porém desconhecidas. A bola A está inicialmente em repouso e B tem velocidade v. Depois de colidirem, a bola B passa a ter velocidade $v/2$ e se move perpendicularmente à sua direção de movimento original. Ache a direção de movimento de A. Você pode determinar a velocidade de A?

P10. Um elétron colide elasticamente com um núcleo de hidrogênio inicialmente em repouso. Sabendo que todos os movimentos se dão sobre a mesma linha reta, que fração da energia cinética inicial do elétron é transferida para o hidrogênio? A massa do hidrogênio é 1.840 vezes a do elétron.

UNIDADE 10
Cinemática da rotação

Os movimentos de rotação e de translação são movimentos fundamentais da mecânica. Até agora, foi estudado o movimento de translação de partículas e do chamado **corpo rígido**, que é definido como aquele cujas partes são fixas, umas relativamente às outras. Em outras palavras, o corpo rígido não se deforma. Nenhum corpo é rigorosamente rígido, mas em uma grande maioria de aplicações, que vão de moléculas a planetas, podemos ignorar que eles se deformam, esticam, encolhem ou vibram.

AULA 27

Movimento de rotação

Objetivo

- Fazer o estudo cinemático do movimento de rotação.

27.1 TRANSLAÇÃO, ROTAÇÃO E REVOLUÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

Considere um corpo rígido em movimento relativamente a um referencial $S(O,x,y,z)$. Seja um sistema de coordenadas $S'(O,x',y',z,')$, com origem no ponto S' do corpo. Diz-se que esse corpo possui um movimento de translação puro quando a direção dos eixos de S' mantém sempre a mesma orientação em relação aos eixos de S (Figura 27.1).

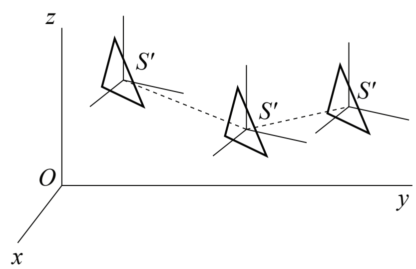


Figura 27.1 – Movimento de translação puro.

Diz-se que um corpo rígido está em movimento de rotação quando um ou mais eixos de coordenadas de S' mudam sua direção relativamente aos eixos de S. O movimento mais geral de um corpo rígido é uma combinação da translação e da rotação (Figura 27.2).

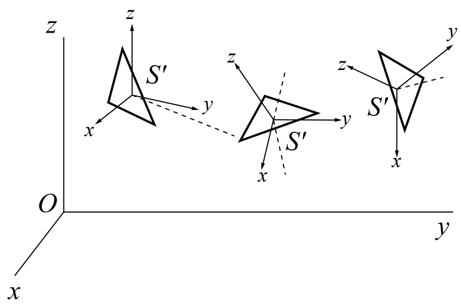


Figura 27.2 – Movimento geral de um corpo rígido.

ATIVIDADE 27.1

Desenhe uma sequência de posições de sua caneta supondo-a em movimento de translação, de rotação e de revolução (rotação e translação combinados).

27.2 CINEMÁTICA ROTACIONAL

Um corpo rígido está em movimento de rotação puro quando cada partícula que o compõe se move em um círculo cujo centro é um ponto do próprio corpo (por exemplo, o ponto C na Figura 27.3a). O lugar geométrico desses pontos é uma reta, denominado **eixo de rotação** (eixo *Oz* na mesma figura).

A perpendicular ao eixo de rotação, traçada de um ponto do corpo (vetor r na Figura 27.3b), descreve, num dado intervalo de tempo, o mesmo ângulo que qualquer outra perpendicular ao eixo, traçada de qualquer outro ponto. Por essse motivo, podemos descrever o movimento de rotação de um corpo rígido como o movimento de qualquer partícula dele em torno do eixo de rotação (exceto, é claro, uma partícula situada sobre o próprio eixo de rotação), como mostra a Figura 27.3b.

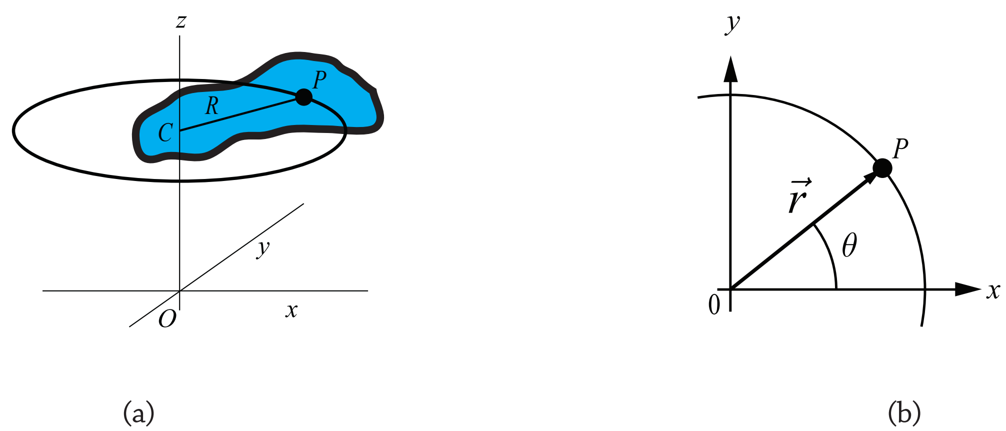


Figura 27.3 – (a) A rotação de um corpo rígido; (b) vista de cima do movimento do ponto *P*.

Considere, então, um corpo rígido e um ponto *P* dele. Seja um ponto *O* do eixo de rotação, tal que o plano contendo *O* e *P* seja perpendicular ao eixo (Figura 27.3b). A posição de *P* relativamente a *O* pode ser dada pelas coordenadas polares (r, θ) de *P*, sendo θ medido no sentido trigonométrico a partir de uma dada direção no plano (eixo *Ox*). O ângulo θ é chamado de **posição angular** do ponto *P* relativamente a *Ox*.

Por definição, o **deslocamento angular** $(\Delta\theta)$ de *P*, no intervalo de tempo $dt = t_2 - t_1$, é a diferença entre as posições angulares de *P* no início e no fim do intervalo de tempo:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \quad (27.1)$$

Lembre-se de que ele é sempre medido em radianos.

A velocidade angular instantânea (ω) de *P* é:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad (27.2)$$

e sua unidade é *rad/s*. Como o deslocamento angular de um corpo rígido durante um dado intervalo de tempo é o mesmo para todos os seus pontos, a sua velocidade angular também é a mesma em qualquer um de seus pontos. O deslocamento angular do corpo é positivo quando ele gira no sentido anti-horário; sua velocidade angular também será positiva neste caso.

ATIVIDADE 27.2 – VELOCIDADE ANGULAR DE ROTAÇÃO DA TERRA

Calcule a velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo (que passa pelos polos), sabendo que ela completa uma revolução em 23 horas e 56 minutos (dia sideral).

Quando a velocidade angular do corpo não é constante, definimos a **aceleração angular instantânea** do corpo como:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}, \qquad (27.3)$$

sendo medida em rad/s^2.

ATIVIDADE 27.3 – VELOCIDADE E ACELERAÇÃO ANGULARES A PARTIR DO DESLOCAMENTO ANGULAR

Calcule a velocidade e a aceleração angular de um corpo no instante $t = 3\,s$, sabendo que sua posição angular é descrita, em função do tempo, por $\theta = 5t^3 + 2t^2$.

As equações que determinam a cinemática de rotação de um corpo são semelhantes às do movimento de translação. Conhecendo a aceleração angular ou a velocidade angular em um intervalo de tempo *dt*, podemos obter a velocidade angular ou o deslocamento angular com:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt \qquad (27.4)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt \qquad (27.5)$$

ATIVIDADE 27.4 – VELOCIDADE E DESLOCAMENTO ANGULARES A PARTIR DA ACELERAÇÃO ANGULAR

Calcule a velocidade e o deslocamento angular de uma roda que, partindo do repouso, gira com aceleração angular dada por $\alpha = 4a^3 - 3bt^2$, em que a e b são constantes.

Quando a aceleração angular for constante, a equação 27.4 pode ser facilmente integrada, dando:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0).$$

Tomando $t_0 = 0$, temos que:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t. \qquad (27.6)$$

Levando 27.6 em 27.5 e integrando, vem:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \qquad (27.7)$$

Eliminando t dessas últimas equações, temos:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \tag{27.8}$$

As equações 27.6, 27.7 e 27.8 descrevem o movimento uniforme de rotação em torno de um eixo.

Exemplo 27.1

Uma roda tem uma aceleração angular constante de 3.0 *rad/s*. No intervalo de tempo t = 4,0 *s*, ela gira de um ângulo de 120 radianos. Supondo que a roda partiu do repouso, durante quanto tempo ela já estava rodando até o início do intervalo de 4,0 *s*?

Solução

Sabendo que $\alpha = 3{,}0$ *rad/s* e que a roda girou de $\Delta\theta = 120$ *rad* em $t = 4{,}0\,s$, você pode calcular a velocidade angular ω_1 no início do intervalo Δt, com a equação (27.7). Temos:

$$\Delta\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

o que nos dá:

$$\omega_1 = \frac{2\Delta\theta - \alpha t^2}{2t} = \frac{2\times 120 - 3,0\times(4,0)^2}{24,0} = 24,0\ rad/s.$$

Mas ω_1 é a velocidade final da roda, adquirida no intervalo de tempo anterior a $t = 4{,}0\,s$ e que começa em $t = 0\,s$ quando a roda está em repouso.

O intervalo de tempo levado pela roda para variar a velocidade angular de $\omega_0 = 0$ *rad/s* até $\omega_1 = 24.0$ *rad/s* pode ser calculado com a equação 27.6. Então:

$$t = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\alpha} = \frac{24,0}{3} = 8,0s.$$

Usando as equações 27.6, 27.7 e 27.8, você conseguiria resolver o exemplo de outra forma?

27.3 RELAÇÃO ENTRE GRANDEZAS LINEARES E ANGULARES NA ROTAÇÃO

O deslocamento, a velocidade e a aceleração angulares estão relacionados com o deslocamento, a velocidade e a aceleração lineares do corpo. Com efeito, seja P uma partícula do corpo à distância r (constante) do eixo de rotação. Durante o intervalo de tempo dt, P descreve um arco de círculo ds em torno do eixo de rotação, ao mesmo tempo que sua posição angular sofre uma variação $d\theta$. Então:

$$ds = r\,d\theta. \tag{27.9}$$

Essa relação mostra que quanto maior a distância de um ponto do corpo ao eixo de rotação, maior é o arco de círculo descrito por ele no deslocamento $d\theta$. Derivando em relação ao tempo (r constante):

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Mas ds/dt é a velocidade linear instantânea v do ponto P (e do corpo). Então, de 27.2:

$$v = \omega r. \qquad (27.10)$$

Da mesma forma que para o deslocamento angular, quanto maior a distância de um ponto do corpo ao eixo de rotação, maior é a sua velocidade linear. Derivando essa relação, obtemos, com 27.3:

$$a = \alpha r. \qquad (27.11)$$

ATIVIDADE 27.5 – RELAÇÃO ENTRE AS GRANDEZAS ANGULARES E LINEARES

Um automóvel, com rodas de 75 *cm* de diâmetro, possui uma velocidade de 100 *km/h*. (a) Qual a velocidade angular das rodas? (b) Se as rodas forem freiadas de modo uniforme em 30 voltas completas até o carro parar, qual é a aceleração angular delas? (c) De quanto o carro se desloca até parar?

As equações 27.9, 27.10 e 27.11 relacionam os módulos dos vetores deslocamento linear, velocidade linear e aceleração linear com o deslocamento, a velocidade e a aceleração angulares. Entretanto, as grandezas lineares são vetores e as angulares não foram definidas como vetores. Isto pode ser feito associando uma direção e sentido para elas. Por convenção, a direção dos vetores deslocamento, velocidade e aceleração angulares é a direção do eixo de rotação. A relação entre as grandezas vetoriais lineares e angulares é dada pelo produto vetorial de dois vetores, que será definido a seguir.

Relembrando – Produto vetorial

O produto vetorial de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é um vetor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ definido, de modo que:

a) o módulo de $\vec{C}$ é dado por $C = AB sen\theta$, em que A e B são os módulos dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{B}$ e θ é o ângulo entre os sentidos de $\vec{A}$ e $\vec{B}$;

b) a direção de $\vec{C}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$;

c) o sentido é determinado pela regra da mão direita: fechando a mão no sentido da rotação, o sentido do vetor é dado pelo do polegar Figura 27.4.

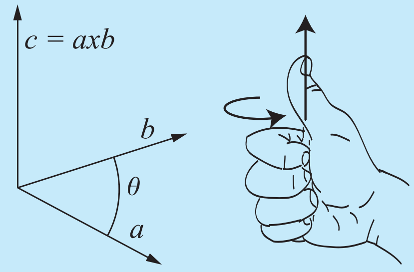


Figura 27.4 – A direção e o sentido do vetor no produto vetorial.

Algebricamente, o produto vetorial pode ser escrito em termos das componentes de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em um dado sistema de coordenadas. Por exemplo, em coordenadas cartesianas, se as componentes de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k},$$

em que $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ são, respectivamente, os unitários dos eixos *Ox, Oy*, *Oz* do sistema de coordenadas, então:

$$\vec{C} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) =$$

$$= A_xB_x(\hat{i}\times\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}\times\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}\times\hat{k}) +$$

$$+A_yB_x(\hat{j}\times\hat{i}) + A_yB_y(\hat{j}\times\hat{j}) + A_yB_z(\hat{j}\times\hat{k}) +$$

$$+A_zB_x(\hat{k}\times\hat{i}) + A_zB_y(\hat{k}\times\hat{j}) + A_zB_z(\hat{k}\times\hat{k}).$$

Como os módulos de $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são iguais à unidade, os produtos vetoriais acima ficam:

$\hat{i}\times\hat{i} = sen0 = 0$ $\quad$ $\hat{i}\times\hat{j} = sen(\pi/2)\hat{k} = \hat{k}$ $\quad$ $\hat{i}\times\hat{k} = sen(\pi/2)(-\hat{j}) = -\hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i} = sen(\pi/2)(-\hat{k}) = -\hat{k}$ $\quad$ $\hat{j}\times\hat{j} = sen(0) = 0$ $\quad$ $\hat{j}\times\hat{k} = sen(\pi/2)(\hat{i}) = \hat{i}$

$\hat{k}\times\hat{i} = sen(\pi/2)(-\hat{j}) = -\hat{j}$ $\quad$ $\hat{k}\times\hat{j} = sen(\pi/2)(-\hat{i}) = -\hat{i}$ $\quad$ $\hat{k}\times\hat{k} = sen(0) = 0$

Logo:

$$\vec{C} = A_xB_y\hat{k} - A_xB_z\hat{j} - A_yB_x\hat{k} + A_yB_z\hat{i} + A_zB_x\hat{j} - A_zB_y\hat{i},$$

ou:

$$\vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}. \quad (27.12)$$

A expressão acima pode ser colocada em uma forma matricial:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

cujo determinante, desenvolvido com a primeira linha da matriz, dá a equação 27.12.

O produto vetorial obedece às seguintes propriedades:

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A};$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C};$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} \neq \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C});$$

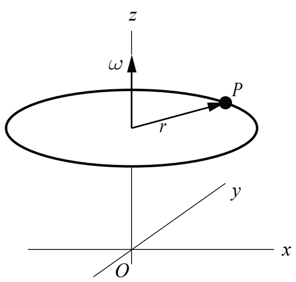
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}.$$

Você deve notar que o vetor $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ não é um vetor livre, isto é, não pode ser deslocado livremente no espaço; ele só pode ser deslocado ao longo de um eixo (no caso o eixo de rotação) e, por isso, é conhecido com o nome de vetor axial.

A equação 27.10 pode ser escrita com ajuda do produto vetorial, pois $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$ são mutuamente perpendiculares. De acordo com a definição desse produto, é fácil ver que (Figura 27.5):

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \tag{27.13}$$

sendo $\vec{r}$ o vetor posição de qualquer partícula do corpo, **relativo ao eixo de rotação**.



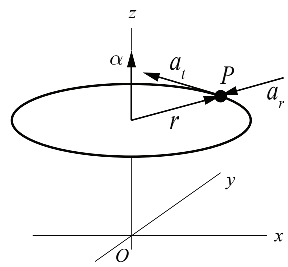


Figura 27.5 – Os vetores velocidade e aceleração angulares.

Da mesma forma, podemos escrever a relação entre as acelerações angular e linear. Lembre-se de que, quando um corpo em rotação está acelerado, qualquer uma de suas partículas descreve um movimento circular não uniforme em torno do eixo. Assim:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Como:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad \text{e} \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha},$$

vem:

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}).$$

Usando agora a propriedade “d” do produto vetorial, obtemos que:

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}-\omega^2\vec{r};$$

e, como $\vec{\omega}\perp\vec{r}$, o primeiro termo do segundo membro dessa equação é nulo. Então:

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}. \tag{27.14}$$

O primeiro termo do segundo membro é a **aceleração tangencial**:

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}. \qquad (27.15)$$

O segundo termo é perpendicular tanto ao eixo de rotação quanto ao vetor velocidade linear; seu módulo é $\omega^2 r = (v^2/r^2) r \equiv v^2/r$, sua direção é a mesma do vetor $\vec{r}$ e seu sentido é oposto a ele (sinal negativo do termo). Ele representa a **aceleração centrípeta** do corpo:

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \times \vec{r}. \qquad (27.16)$$

Exemplo 27.2

Um inseto de massa $8,0 \times 10^{-2} g$ se desloca radialmente para fora sobre um prato de toca-disco de vinil cujo raio é $R = 16\, cm$. A velocidade do inseto é constante e vale 1,6 *cm/s* e o toca-disco gira com velocidade angular de 33(1/3) rotações por minuto (*rpm*). Qual deve ser o coeficiente de atrito mínimo entre o inseto e o prato para permitir o inseto caminhar até sair do prato sem deslizar?

Solução

A velocidade angular do toca-disco é:

$$\omega = \frac{33,333 \times 2\pi}{60} = 3,49\ rad\,/\,s.$$

A aceleração radial do inseto a uma distância r do eixo de rotação é $a_r = \omega^2 r$. Seja μ o coeficiente de atrito desejado. Então, para o inseto não deslizar, devemos ter que:

$$\mu m g = m a_r \qquad \text{ou} \qquad \mu = \frac{a_r}{g}.$$

O ponto onde o inseto tem maior aceleração radial é na borda do prato, no qual $r = R = 16\ cm$. Portanto:

$$a_r(R) = (3,49\ rad\,/\,s)^2 \times 16\ cm = 1,95 \times 10^2\ cm\,/\,s^2.$$

Então, com $g = 9,80 \times 10^2$ *cm/s²*, vem: $\mu = 0,20$.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 27.1

A posição de um corpo rígido, em um dado instante de tempo, pode ser determinada especificando as coordenadas de um ponto desse corpo. Isso é possível porque todas as outras partículas do corpo sempre mantêm uma mesma distância a esse ponto. Se o corpo possui também um movimento de rotação, precisamos de mais três coordenadas ou ângulos para especificar a orientação do corpo relativamente a S. Em geral, o ponto escolhido é o centro de massa, porque, além de descrever o movimento de translação do corpo, as equações que descrevem o movimento de rotação ficam mais simples quando o sistema S' tem origem no centro de massa.

Atividade 27.2 – Velocidade angular de rotação da Terra

O módulo da velocidade angular da Terra é:

$$\omega = \frac{2\pi\ rad}{1\ dia} = \frac{6,28\ rad}{23\ h \times 3600\ s/h + 56\ m \times 60\ s/m} = \frac{6,28\ rad}{86160s} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s.$$

Atividade 27.3 – Velocidade e aceleração angulares a partir do deslocamento angular

De acordo com as definições de velocidade e aceleração angulares, você sabe que:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^3 + 2t^2) = 15t^2 + 4t,$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(15t^2 + 4t) = 30t + 4.$$

Para $t = 3$ s, vem: $\omega = 147$ *rad/s* e $\alpha = 94$ *rad/s*^{2}.

Atividade 27.4 – Velocidade e deslocamento angulares a partir da aceleração angular

Aplicando a equação 27.4, com $t_0 = 0$ e $\omega_0 = 0$, vem:

$$\omega = \int_0^t \alpha dt = \int_0^t (4a^3 - 3bt^2)dt = at^4 - bt^3.$$

Da mesma forma, aplicando a equação 27.5, com $\theta_0 = 0$, vem que:

$$\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (at^4 - bt^3)dt = \frac{at^5}{5} - \frac{bt^4}{4}.$$

Atividade 27.5 – Relação entre as grandezas angulares e lineares

a) A velocidade de um ponto na extremidade da roda deve ser igual à velocidade com que o carro se move. Logo, a velocidade angular da roda é:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{100.000\ m}{3600\ s} \times \frac{2}{0.75} = 74\ rad/s.$$

A velocidade angular final é $\omega = 0$, a inicial é $\omega_0 = 74\ rad/s$ e o deslocamento angular total descrito até o carro parar é $\Delta\theta = 30 \times 2 \times \pi$ radianos. Então:

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\theta} = \frac{-74^2}{2 \times 30 \times 2 \times \pi} = -14\ rad/s^2.$$

Como $a = \alpha R$ é constante e $v^2 = v_0^2 + 2ax$, temos que:

$$x = \frac{v_0^2}{2\alpha R} = \frac{771,6}{10,5} = 73\ m.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um aparelho reprodutor de discos em vinil gira com uma velocidade angular de 33 rotações por minuto. Qual é a velocidade linear em um ponto do disco (a) no início e (b) no final da trilha gravada? As distâncias desses pontos ao eixo de rotação são, respectivamente, 14,4 e 7,0 *cm*.

E2. A velocidade angular de uma roda aumentou de 1.200 *rpm* para 3.000 *rpm* em 12 *s*.

a) Qual a aceleração angular da roda, supondo-a uniforme?

b) Quantas revoluções a roda faz nesse intervalo de tempo?

E3. O deslocamento angular em função do tempo de uma roda é descrito pela equação:

$$\theta = at + bt^3 - ct^4,$$

em que a, b e c são constantes. Qual é a aceleração da roda?

E4. Calcule as velocidades angulares e lineares das pontas dos ponteiros de horas e minutos de um relógio analógico. O ponteiro de horas tem comprimento de 1.0 *cm* e o de segundos, 1,2 *cm*.

PROBLEMAS DA UNIDADE 10

P1. Uma roda gira em torno do eixo que passa por seu centro sob ação de atrito com o eixo. No final do primeiro minuto, sua velocidade angular vale 0,90 da sua velocidade angular inicial. Supondo o atrito constante, determine a sua velocidade angular no fim do segundo minuto.

P2. Uma roda tem sua aceleração angular descrita pela equação:

$$a = -3t^2 + 4{,}0t^3.$$

a) Quais são as unidades dos coeficientes dos termos da equação?

b) Determine sua velocidade angular no instante t = 4 s e o número de rotações que teve até esse instante.

P3. A órbita da Terra em torno do Sol, embora elíptica, pode ser aproximada por um círculo.

a) Calcule a velocidade angular da Terra em seu movimento em torno do Sol, bem como sua aceleração centrípeta.

b) Sabendo que seu raio é de 6.340 *km*, determine a velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo.

c) Calcule a velocidade linear e a aceleração centrípeta de um ponto da sua superfície situado no Equador terrestre.

d) Compare os resultados dos itens a e b.

P4. Um automóvel com uma velocidade de 96 *km/h* tem rodas de 76 *cm* de diâmetro.

a) Qual é a velocidade angular da roda em torno de seu eixo?

b) Se as rodas giram uniformemente até pararem em 30 voltas, qual é a aceleração angular delas?

c) De quando o carro se desloca durante a frenagem?

P5. Uma roda de bicicleta tem, em um dado instante t_0, velocidade angular de 4,00 *rad/s* e uma aceleração angular constante de – 3,00 *rad/s*^{2}. Nesse instante, um aro OP passando por um ponto P da roda coincide com o eixo *Ox* de um sistema de coordenadas com origem no centro O da roda.

a) Qual é a velocidade angular da roda no instante 3,0 *s* após t_0?

b) Qual é o ângulo descrito por OP durante esse intervalo de tempo?

P6. Para $t = 0$, a roda de um esmeril possui velocidade angular de 24 *rad/s* e uma aceleração angular constante de 30,0 rad/s^2. No instante $t = 2\ s$, aciona-se um freio e, a partir desse instante, ela perfaz 432 rotações à medida que para com aceleração constante.

a) Qual foi o deslocamento angular da roda desde $t = 0$ até parar?

b) Em que instante ela parou?

c) Qual foi o valor de sua aceleração constante enquanto sua velocidade diminuía?

P7. Um CD armazena músicas em uma configuração codificada constituída por pequenas reentrâncias de $10^{-7}\ m$ de profundidade. Essas reentrâncias são agrupadas ao longo de uma trilha de forma espiral, orientada de dentro para fora do CD; o raio interno da espiral é igual a 25 *mm* e o externo é 58 *mm*. À medida que o CD gira no toca-discos, a trilha é percorrida com uma velocidade linear constante de 1,25 *m/s*.

a) Qual é a velocidade angular do CD quando a sua parte mais interna é percorrida?

b) Qual é a velocidade angular do CD quando a sua parte mais externa é percorrida?

c) Se o tempo máximo de reprodução do CD é de 74 minutos, qual será o comprimento da sua trilha caso a espiral fosse esticada para formar uma linha reta?

d) Qual é a aceleração angular máxima durante os 74 minutos?

P8. Um volante de raio igual a 30 *cm* parte do repouso e acelera com aceleração angular constante de 0,600 rad/s^2. Calcule o módulo da aceleração tangencial, da aceleração radial e da aceleração resultante em um ponto da periferia do volante (a) no início de seu movimento; (b) depois de ter girado 60°; (c) depois de ter girado 120°.

P9. Um ventilador de teto, cujas lâminas possuem um diâmetro de 75 *cm*, gira em torno de um eixo fixo com velocidade angular igual a 0,250 revoluções por segundo. A aceleração angular é de 0,900 rev/s^2.

a) Calcule a velocidade angular depois de 0,200 *s*;

b) Quantas revoluções foram feitas pela lâmina durante esse intervalo de tempo?

c) Qual é a velocidade tangencial na extremidade da lâmina para $t = 0{,}200\ s$?

d) Qual é o módulo da aceleração resultante de um ponto na extremidade da lâmina para esse instante?

P10. Os ciclos de rotação de uma máquina de lavar roupas possuem duas velocidades angulares: 423 *rpm* e 640 *rpm*. O diâmetro interno do tambor é igual a 0,470 *m*.

a) Qual é a razão entre as forças radiais máxima e mínima que atuam na roupa quando a velocidade angular da máquina é mínima?

b) Qual é a razão das velocidades tangenciais quando as velocidades angulares de rotação são máximas e mínimas?

c) Calcule, em função de g, a velocidade tangencial máxima da roupa e a aceleração radial máxima.

UNIDADE 11
Dinâmica da rotação

Uma partícula não tem dimensão; por isso, quando uma força atua sobre ela, o efeito é mudar seu movimento de translação. Um corpo possui dimensão e a ação de uma força sobre ele, em geral, causa mudança tanto no movimento de translação quanto no de rotação. Nesta unidade, o interesse está nos efeitos de forças sobre os corpos que forem supostos rígidos. Em particular, a preocupação será com o movimento de rotação, uma vez que o centro de massa descreve o movimento de translação do corpo.

AULA 28

Torque

Objetivos

- Definir e calcular torque de uma força;
- Definir e calcular momento de inércia de um corpo rígido;
- Determinar a equação que descreve o movimento de um corpo rígido;
- Estudar o movimento do corpo rígido sob a ação de forças.

28.1 TORQUE OU MOMENTO DE UMA FORÇA

O efeito de uma força depende de onde ela é aplicada no corpo. É fácil ver isso: basta empurrar uma porta apoiando em vários pontos dela. O que se verifica é que quanto mais longe das dobradiças (eixo de rotação) se aplica a força, mais fácil fica abri-la ou fechá-la; isto é, maior é o efeito da força.

Quando empurramos um corpo, além de adquirir movimento de translação, quase sempre ele também passa a ter o de rotação. Por causa disso, a noção de força sozinha não é suficiente para descrever o agente da modificação do estado dinâmico do corpo. Para levar em conta a dependência da rotação do corpo com o ponto de aplicação da força, definimos uma outra grandeza, denominada **torque ou momento da força**. É claro que o torque deve ser proporcional à distância do ponto de aplicação da força ao eixo de rotação, bem como ao módulo da própria força. Além disso, ele deve ser um vetor para levar em conta os dois sentidos de rotação (horário e anti-horário).

Voltando ao exemplo da porta, sabemos que quanto mais perpendicular a ela aplicamos a força, mais fácil será fazê-la se mover. Então, apenas a componente da força perpendicular à porta é importante para fazê-la rodar. A Figura 28.1 mostra a situação: a força $\vec{F}$ atua sobre a porta (vista de cima na Figura 28.1, no lado direito) em um ponto P, fazendo um ângulo θ com a porta.

A distância do ponto P de aplicação da força ao eixo de rotação (que passa pelas dobradiças) é o módulo do vetor-posição de P **relativamente ao eixo** ($\vec{r}$). A componente da força, perpendicular à porta, é $F sen\theta$, sendo θ o ângulo **entre os sentidos** dos vetores $\vec{F}$ e $\vec{r}$.

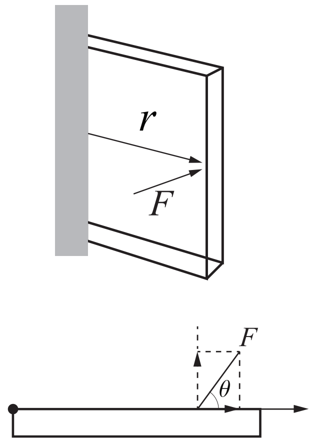


Figura 28.1 – Força sobre uma porta vista de lado e vista de cima.

Existe uma grandeza vetorial que possui a propriedade de seu módulo depender do seno do ângulo entre dois vetores: o produto vetorial. Então, nada mais natural que englobar todas as propriedades do torque em um produto vetorial, definindo-o como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{28.1}$$

O módulo do torque é $\tau = rF\,sen\theta$; sua direção e seu sentido são dados pela regra da mão direita para o produto vetorial. Sua unidade é o produto da unidade de força pela de distância. No sistema MKS, ela é $N.m$.

Exemplo 28.1

Um pêndulo simples de comprimento $\ell = 1{,}5\ m$ e massa $m = 2{,}0\ kg$ é solto de sua posição horizontal. Desprezando a resistência do ar, qual o torque relativo a seu ponto de suspensão exercido pela força da gravidade no ponto em que ele faz um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a vertical?

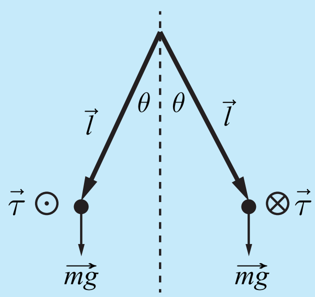


Figura 28.2 – Momento de força.

Solução

O torque é dado por $\vec{\tau} = \vec{\ell} \times m\vec{g}$.

Seu módulo é $\tau = \ell sen30^\circ\, mg$.

Logo, $\tau = 1{,}5 \times 0{,}50 \times 2{,}0 \times 9{,}8 = 14\ N.m$.

A direção do torque é perpendicular ao plano que contém $\vec{\ell}$ e $m\vec{g}$. Como o pêndulo oscila em torno de sua posição vertical, o sentido do torque varia de acordo com o fato do pêndulo estar de um lado ou de outro em relação à vertical. Note que, no ponto mais baixo da trajetória, o torque é nulo.

É importante notar que o torque é um vetor perpendicular ao plano contendo $\vec{r}$ e $\vec{F}$. Se a força está aplicada no plano perpendicular ao eixo de rotação, o torque terá a direção desse eixo e o seu efeito, nesse caso, é de produzir uma aceleração angular no corpo. Se, entretanto, ela não estiver no plano perpendicular (Figura 28.3), o efeito do torque será diferente.

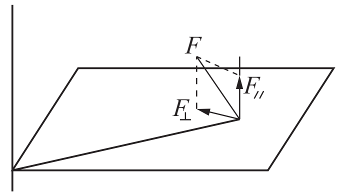


Figura 28.3 – Momento de força não ortogonal ao eixo.

Para entender melhor, decomponha a força em duas componentes, uma no plano perpendicular ($\vec{F}_{\perp}$) e outra no plano paralelo ao eixo ($\vec{F}_{P}$). Então:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r} \times \vec{F}_{P}.$$

O torque devido à componente da força perpendicular ao eixo acelera o corpo, que gira em torno do eixo de rotação; o torque da componente da força paralela ao eixo tende a fazer o corpo (e o eixo de rotação preso nele) mudar sua orientação no espaço. Se o eixo é fixo por meio de mancais, esses reagirão sobre o corpo impedindo essa mudança; mas se o corpo está livre, o eixo de rotação mudará continuamente de orientação no espaço, dando origem ao chamado movimento de precessão do eixo de rotação.

ATIVIDADE 28.1 – CÁLCULO DO TORQUE

Uma moeda é colocada sobre um prato de toca-discos de vinil, que gira com velocidade constante de 33 *rpm*. A distância da moeda ao centro do prato é de 20 *cm* e ela permanece parada sobre o prato. Quais as forças que atuam sobre ela e quais os torques exercidos por elas sobre a moeda? Qual é o torque total?

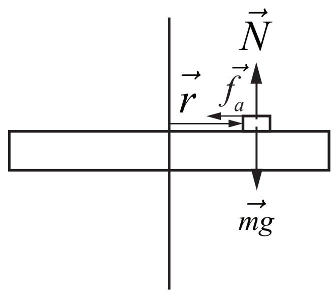


Figura 28.4 – As forças que atuam sobre a moeda.

28.2 MOMENTO DE INÉRCIA

Além do efeito de uma força sobre um corpo rígido depender de seu ponto de aplicação nele, há um outro fator que afeta o movimento do corpo sob ação da força. Considere uma régua composta de duas metades de materiais diferentes (por exemplo, ferro e madeira). Quando aplicamos uma força na extremidade de madeira da régua, a experiência mostra que a aceleração do corpo não é igual à que ele adquire quando a mesma força é aplicada sobre a extremidade de ferro (a aceleração nesse caso é menor que a do anterior).

Em outras palavras, **a aceleração adquirida depende da distribuição de matéria no corpo**. Esse possui uma **inércia rotacional** que é função dessa distribuição de matéria em relação ao eixo de rotação. Essa inércia rotacional é medida pelo **momento de inércia do corpo relativo a um eixo de rotação**. Para defini-lo, seja um corpo rígido e uma partícula dele, de massa m_i , situada a uma distância r_i do eixo. Se sobre ela atua uma força $\vec{F}_i$, o momento dessa força relativo ao eixo é:

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i,$$

em que se escreve a força em termos da aceleração linear da partícula, de acordo com a segunda lei de Newton. Mas como a partícula descreve um movimento circular em torno do eixo, $\vec{a}_i = \vec{\alpha}_i \times \vec{r}_i$, sendo $\vec{\alpha}_i$ a aceleração angular da partícula. Como o corpo é rígido, todas as partículas dele possuem a mesma aceleração angular ($\vec{\alpha}$) em torno do eixo de rotação e, então, pode-se escrever que: $\vec{\alpha}_i = \vec{\alpha}$. Com isso, a equação acima fica:

$$\vec{\tau}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_i).$$

Desenvolvendo o duplo produto vetorial, obtém-se:

$$\vec{\tau}_i = m_i[(\vec{r}_i \bullet \vec{r}_i)\vec{\alpha} + (\vec{r}_i \bullet \vec{\alpha})\vec{r}_i],$$

ou, como $\vec{r}_i \bullet \vec{\alpha} = 0,$ porque são mutuamente perpendiculares, temos que:

$$\vec{\tau}_i = m_i r_i^2 \vec{\alpha}.$$

Definindo agora o **torque ou momento resultante** de todas as forças que atuam no corpo como:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{\tau} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

a equação acima fica:

$$\vec{\tau} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \vec{\alpha} \qquad (28.2)$$

Ao termo:

$$I = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right), \qquad (28.3)$$

damos o nome de **momento de inércia** do corpo, relativo ao eixo de rotação. Sua unidade é o produto da unidade de massa pelo quadrado da unidade de distância. No sistema SI, ela é *kg.m*^{2}. Nessa equação está representado o efeito da distribuição de massa do corpo através do produto da massa em um ponto pelo quadrado da distância desse ponto ao eixo. O momento de inércia de um corpo é um escalar.

Com a expressão 28.3, a equação 28.2 se escreve:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}, \qquad (28.4)$$

que relaciona o torque de uma força aplicada sobre um corpo e a aceleração angular adquirida pelo corpo sob ação dessa força.

Exemplo 28.2

Calculemos o momento de inércia de um haltere composto de duas massas iguais M ligadas por uma barra de comprimento L e de massa desprezível, em relação a um eixo que passa pelo meio da barra.

Solução

Temos, da definição de momento de inércia, que:

$$I = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\left(\frac{L^2}{2}\right).$$

ATIVIDADE 28.2 – CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA DO HALTERE

Calcule o momento de inércia do mesmo haltere relativamente a um eixo que passa por uma das massas M.

28.3 MOMENTO DE INÉRCIA DE UM CORPO RÍGIDO

Como um corpo rígido é composto de um grande número de partículas, ao invés do somatório, temos que usar uma integral, feita sobre o volume do corpo:

$$I = \int_V \rho(\vec{r}) r^2 \, dV, \tag{28.5}$$

em que dV é o elemento de volume cuja densidade volumétrica é ρ, **situado à distância r do eixo de rotação**.

Quando o corpo possuir uma dimensão desprezível em relação às outras, a integral sobre o seu volume se reduz a uma integral sobre a sua área; da mesma forma, para duas dimensões desprezíveis, a integral passa a ser uma integral de linha.

Exemplo 28.3

Calcule o momento de inércia de uma régua homogênea de comprimento L e massa M, relativo a um eixo que passa por uma de suas extremidades (Figura 28.5).

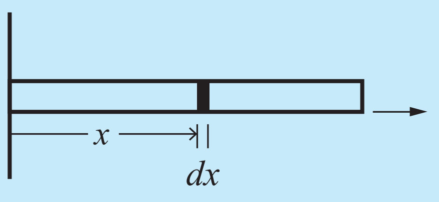


Figura 28.5 – Momento de inércia de uma régua homogênea.

Solução

Escolhendo o eixo Ox ao longo da régua, seja um elemento de comprimento dx situado a uma distância x do eixo de rotação. A densidade (linear) da régua se escreve $\lambda = M/L$ e o momento de inércia fica:

$$I = \int_0^L \lambda x^2\,dx = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{M}{L}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \frac{1}{3}M L^2.$$

ATIVIDADE 28.3 – CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA DA RÉGUA RELATIVAMENTE A OUTRO EIXO

Calcule o momento de inércia da régua homogênea relativamente a um eixo que passa pelo centro da régua.

Exemplo 28.4

Momento de inércia de um disco homogêneo de raio a em relação a um eixo que passa pelo seu centro.

Solução

O elemento de área em relação a um sistema de coordenadas polares com origem no centro do disco é $dS = r\,dr\,d\theta$. Então:

$$I = \int_0^a\int_0^{2\pi} r^2 \rho\, dS = \frac{M}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} r^3\,dr\,d\theta = \frac{2\pi M}{\pi a^2}\int_0^a r^3\,dr = \frac{2M}{a^2}\frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{2}.$$

Exemplo 28.5

Momento de inércia de uma esfera homogênea de raio a relativo a um eixo que passa pelo seu centro.

Solução

Em coordenadas esféricas, o elemento de volume em relação a um sistema de coordenadas com origem no centro da esfera é $dV = r^2 sen\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ e a distância ao eixo $r\,sen\theta$. Então:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a \rho r^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a \rho r^4 sen^3\theta\,dr\,d\theta\,d\phi,$$

que dá, fazendo primeiro a integral em ϕ:

$$I = 2\pi\rho\int_0^a r^4\,dr\int_0^{\pi} sen^3\theta\,d\theta = 2\pi\rho\left[\frac{cos^3\theta}{3} - cos\theta\right]_0^{\pi}\int_0^a r^4\,dr,$$

ou:

$$I = 2\pi\frac{3M}{4\pi a^3}\frac{4}{3}\frac{a^5}{5} = \frac{2}{5}M a^2.$$

28.4 PROPRIEDADES DO MOMENTO DE INÉRCIA

Um corpo homogêneo tem algumas propriedades que tornam o cálculo de seu momento de inércia mais simples. De modo geral, na vida prática, devemos sempre procurar trabalhar com corpos homogêneos, de modo que essas propriedades se tornem muito úteis.

Propriedade 1: Se um corpo é constituído de várias partes, o seu momento de inércia é a soma dos momentos de inércia das partes.

Exemplo 28.6

Calcule o momento de inércia de um disco homogêneo de raio a em relação a um eixo passando por seu centro e perpendicular a seu plano (Figura 28.6).

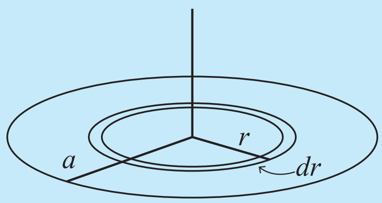


Figura 28.6 – Momento de inércia de um disco homogêneo.

Solução

Divide-se o disco em anéis de raio r e largura dr. Então, o elemento de área do disco é $dA = 2\pi r\,dr$ e a densidade, $\sigma = M/\pi a^2$. Assim, o momento de inércia fica:

$$I = \int_0^a \sigma r^2\,dA = \frac{M}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi r^3\,dr = \frac{M a^2}{2}.$$

Exemplo 28.7

Calcule o momento de inércia de uma esfera homogênea em relação a um eixo passando por seu centro.

Solução

De modo análogo ao disco, divida a esfera em discos de raio r e espessura dr; o raio do disco é $r = \sqrt{a^2 - z^2}$ (Figura 28.7); então, o elemento de massa de cada disco é:

$$dm = \rho\pi r^2\,dz = \rho\pi(a^2 - z^2)dz.$$

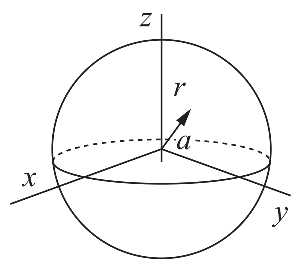


Figura 28.7 – Momento de inércia de uma esfera homogênea.

O momento de inércia do disco elementar é:

$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - z^2}\right)^2 [\rho\pi(a^2 - z^2)dz] = \frac{\pi\rho}{2}\left(a^2 - z^2\right)^2 dz.$$

Integrando:

$$I = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-a}^{a}\left(a^2 - z^2\right)^2 dz = \frac{\pi\rho}{2}\left[\int_{-a}^{a} a^4 dz - \int_{-a}^{a} 2a^2 z^2 dz + \int_{-a}^{a} a^4 dz\right].$$

Fazendo os cálculos, resulta que:

$$I = \frac{\pi\rho}{2}\frac{8}{15}a^5 = \frac{2}{5}M a^2,$$

pois a massa da esfera é $M = (4/3)\pi\rho a^3$.

Propriedade 2: O momento de inércia de um corpo, relativo a um eixo que passa por ele, é igual ao momento de inércia do corpo relativo a um eixo paralelo ao primeiro e passando pelo centro de massa, mais o produto da massa do corpo pela distância entre os eixos.

Para demonstrar essa propriedade, sejam I_O o momento de inércia relativo ao eixo Oz de um sistema de coordenadas fixo no corpo e I_G, o relativo a um eixo paralelo a Oz, passando pelo centro de massa do corpo (*G*). Sejam $\vec{r}(x,y,z)$ e $\vec{r}'(x',y',z')$ os vetores-posição de um ponto *P* do corpo, relativos a *O* e a *G*, respectivamente. Seja $\vec{R}(X,Y,Z)$ o vetor-posição do centro de massa relativamente a *O* (Figura 28.8).

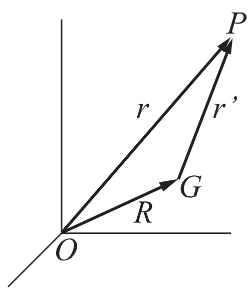


Figura 28.8 – Localização do ponto *P* em relação a *O* e *G*.

A distância de *P* ao eixo Oz é $d = \sqrt{x^2 + y^2}$; a distância de *P* ao eixo que passa por *G* é $d' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Então, da relação $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$ vem:

$$x^2 + y^2 = (x' + X)^2 + (y' + Y)^2 = x'^2 + y'^2 + X^2 + Y^2 + 2Xx' + 2Yy',$$

e o momento de inércia relativo a *O* é:

$$I_O = \int\rho(x^2 + y^2)dV = \int\rho(x'^2 + y'^2)dV + (X^2 + Y^2)\int\rho dV + 2X\int\rho x' dV + 2Y\int\rho y' dV.$$

A primeira integral de segundo membro é I_G; a segunda integral é a massa do corpo; as duas últimas integrais são, pela definição de centro de massa, respectivamente, as componentes x' e y' da posição do centro de massa relativamente a ele mesmo e, portanto, são nulas. Então, a equação acima se resume em:

$$I_O = I_G + M(X^2 + Y^2) = I_G + MD^2, \tag{28.6}$$

$$I_O = I_{CM} + MD^2, \qquad (28.7)$$

em que I_{CM} é o momento de inércia em relação ao centro de massa e D é a distância do ponto de rotação ao centro de massa.

Exemplo 28.8

No exemplo 28.1, foi calculado o momento de inércia de uma régua homogênea de comprimento L relativamente a um eixo passando por uma de suas extremidades. Calcule o momento de inércia em relação ao centro de massa.

Solução

Como o centro de massa da régua situa-se, neste caso, no meio da régua, o momento de inércia da régua, relativo a um eixo paralelo ao da extremidade, passando pelo centro de massa é:

$$I_G = I_O - MD^2 = \frac{ML^2}{3} - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12}.$$

ATIVIDADE 28.4 – APLICAÇÃO DA PROPRIEDADE 2

Calcule o momento de inércia de um disco de raio a em relação a um eixo perpendicular a seu plano, passando por sua borda.

ATIVIDADE 28.5 – APLICAÇÃO DAS PROPRIEDADES 1 E 2

Calcule o momento de inércia em relação a um eixo Oz passando pelo centro de um disco de raio R com um buraco. O buraco tem raio $R/4$ e seu centro está à distância $R/2$ do centro do disco. O eixo Oz é perpendicular ao plano do disco (Figura 28.9).

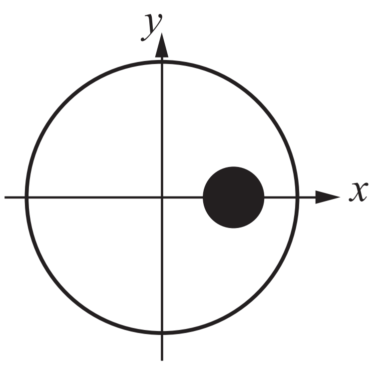


Figura 28.9 – Disco homogêneo com buraco.

A Figura 28.10 mostra alguns valores para o momento de inércia ou **inércia rotacional** em relação a certos eixos para alguns objetos.

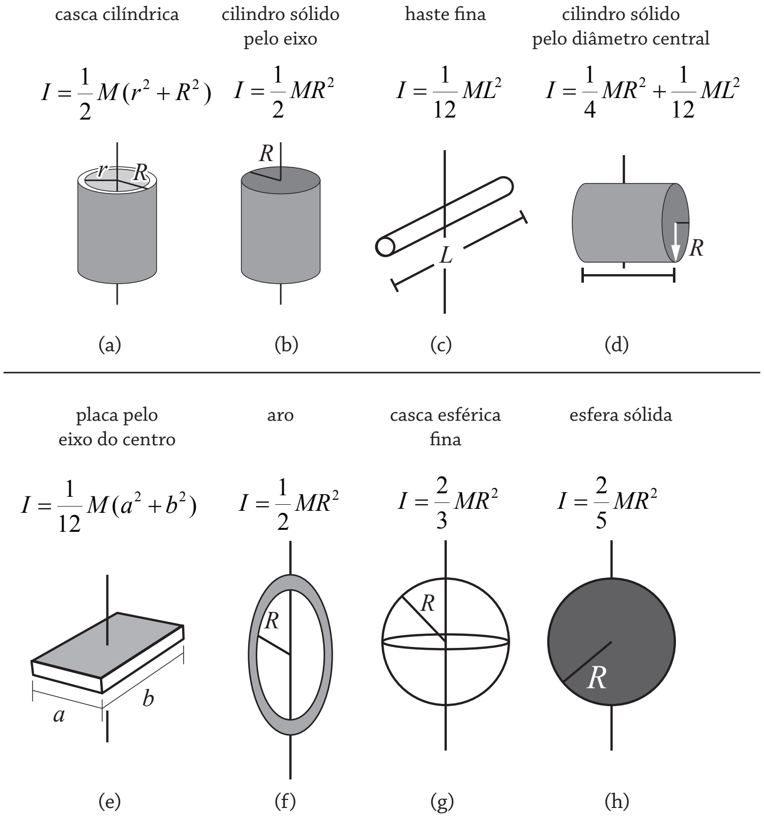


Figura 28.10 – Momento de inércia em relação a certos eixos para alguns objetos.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 28.1 – Cálculo do torque

As forças que atuam sobre a moeda são o peso, a reação normal a ele exercida pelo prato e a força de atrito (radial) que a mantém parada em relação ao toca-discos (Figura 28.4). Seja μ o coeficiente de atrito estático entre a moeda e o prato. Considerando o sentido positivo o que entra no papel, temos que:

torque do peso: $\tau_1 = r \times mg \times sen(\pi/2) = rmg,$

torque da reação normal: $\tau_2 = -r \times N \times sen(\pi/2) = -r \times mg,$

torque da força de atrito: $\tau_3 = r \times f_a \times \text{sen}(\pi) = 0,$

pois a força de atrito tem direção radial. O torque total é, obviamente, nulo (a moeda gira no prato com velocidade angular constante).

Atividade 28.2 – Cálculo do momento de inércia do haltere

Nesse caso, como o eixo passa por uma das massa, a distância dessa massa ao eixo é nula. A distância da outra massa ao eixo é L. Então:

$$I = M \times 0 + M L^2 = M L^2.$$

Atividade 28.3 – Cálculo do momento de inércia da régua relativamente a outro eixo

Nesse caso, como o eixo passa pelo centro da régua, temos:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 \, dx = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, dx = \frac{M}{L}\left|\frac{x^3}{3}\right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} M L^2.$$

Atividade 28.4 – Aplicação da Propriedade 2

Aplicando a Propriedade 2, temos que a distância entre a borda do disco e seu centro é a. Então:

$$I = I_{cm} + M a^2 = \frac{3}{2} M a^2.$$

Atividade 28.5 – Aplicação das propriedades 1 e 2

Pela Propriedade 1, o momento de inércia do disco pode ser considerado como a soma do momento de inércia do disco cheio e do momento de inércia do buraco considerado com massa negativa, ambos em relação ao eixo Oz:

$$I_z = I_c + I_b,$$

em que os índices c e b representam, respectivamene, o disco cheio e o buraco.

Sabemos que $I_c = (1/2) M R^2$. O momento de inércia do buraco relativamente a um eixo paralelo a Oz e passando pelo centro do buraco é $I_b = (1/2) m a^2$, em que m é a massa (negativa) do material que comporia o buraco e a é o raio do buraco. Então:

$$a = \frac{R}{4} \quad \text{e} \quad \frac{|m|}{M} = \frac{\pi a^2 \sigma}{\pi R^2 \sigma} = \frac{a^2}{R^2}.$$

O momento de inércia do buraco, relativamente ao eixo Oz, é obtido com a Propriedade 2. Com efeito, a distância do centro do buraco ao eixo Oz é $d = R/2$. Então:

$$I_b = \frac{1}{2}(-m)a^2 + (-m)d^2 = -\frac{1}{2} m (a^2 + 2d^2) = -\frac{1}{2} m \left(\frac{R^2}{16} + \frac{2R^2}{4} \right) = -\frac{9}{32} M R^2.$$

Logo:

$$I_z = \frac{1}{2} M R^2 - \frac{9}{32} M R^2 = \frac{7}{32} M R^2.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um aro possui raio 0,50 *m* e massa 2,0 *kg*. Qual é seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular a seu plano, passando por um ponto de sua superfície externa?

E2. Uma roda possui aro cujo raio tem 30,0 *cm* e massa de 1,40 *kg*. Ligando o aro a seu centro há oito barras distribuídas uniformemente ao longo de seus diâmetros. O comprimento de cada barra é 30,0 *cm* e a massa, 280 *g*. Qual é o momento de inércia da roda relativamente a um eixo que passa por seu centro e é perpendicular ao plano da roda?

E3. Na roda do exercício anterior, qual deve ser o torque necessário para que, partindo do repouso, ela passe a girar com velocidade angular de 5 *rad/s* em um intervalo de tempo de 3 *s*?

AULA 29

Dinâmica de um corpo rígido

29.1 MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

Como você estudou nas aulas anteriores, a equação

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{29.1}$$

é a **generalização da segunda lei de Newton para o caso do movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo**. Ela relaciona o torque de uma força com a aceleração angular adquirida pelo corpo devido à ação da força.

Para ilustrar a aplicação da equação 29.1, imagine um corpo de massa m, preso a uma corda de massa desprezível enrolada em uma roldana circular de massa M, raio R e de momento de inércia I (Figura 29.1). A roldana é fixa por um suporte em seu centro, que permite que ela gire, mas não se desloque. Calculemos a aceleração angular da roldana.

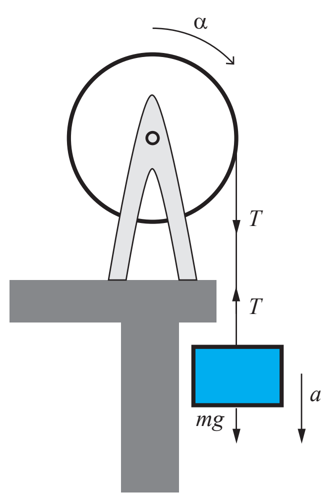


Figura 29.1 – Corpo preso a roldana fixa em seu centro.

As forças que atuam na roldana são o seu peso mg, a reação do suporte a ele e a força que a corda exerce sobre a roldana devido ao atrito entre elas. Como a corda não desliza sobre a roldana, essa força é de atrito estático. A corda, ao ser puxada para baixo pelo peso mg, se move de tal maneira que suas partes em contato com a roldana descrevem um círculo no sentido horário. A força de atrito que atua na corda opõe-se ao movimento dela. De acordo com a terceira lei de Newton, a força de atrito que atua sobre a roldana (reação à força de atrito da corda sobre a roldana) tem sentido oposto à força de atrito na corda; portanto ela atua no sentido de fazer a roldana girar no sentido horário. Preste bastante atenção! É a força de atrito sobre a roldana que a faz girar; não confunda com a força de atrito sobre a corda, senão vai acabar achando que a roldana deveria girar no sentido anti-horário.

As forças peso e reação normal se anulam e, como estão aplicadas no centro de massa da roldana, não exercem torque sobre ela. A força de atrito (horizontal) tanto tende a deslocar a roldana para a direita, como exerce um torque sobre ela em relação ao centro de massa. A reação do suporte ao atrito, que está aplicada no centro de massa da roldana, equilibra a força de atrito e, por isso, a roldana não tem movimento de translação. A força de atrito exerce um torque sobre a roldana, dado por 29.1. Se escolhermos o sentido positivo para o torque como sendo aquele que penetra na folha de papel, temos, projetando os vetores $\vec{\tau}$ e $\vec{\alpha}$:

$$\tau = I\alpha.$$

Como a corda não tem massa, a força de atrito é que dá origem à tensão na corda. Portanto:

$$T\,R\,sen(\pi/2) = I\alpha, \tag{29.2}$$

de modo que, usando $I = (1/2)MR^2$, resulta em:

$$\alpha = \frac{2T}{MR}. \tag{29.3}$$

Essa expressão dá a aceleração angular em termos da tensão na corda. Eliminemos a tensão e escreva a aceleração angular em função das massas e do raio da roldana aplicando a segunda lei de Newton para o movimento da massa *m*, que está ligado ao da roldana. Escolhendo um eixo de coordenadas vertical com sentido positivo para baixo, a projeção das forças que atuam sobre o corpo de massa *m* nos dá:

$$mg - T = ma, \tag{29.4}$$

em que *a* é a aceleração da massa *m*. Tirando o valor de *T* dessa equação e levando na expressão de α, obtemos que:

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{2m}{MR}(g - a).$$

Como a corda não desliza sobre a roldana, a aceleração linear da corda e da borda da roldana deve ser a mesma que a da massa *m*. Assim, $a = \alpha R$ e:

$$\alpha = \frac{2m}{MR}(g - \alpha R);$$

ou:

$$\left(1 + \frac{2m}{M}\right) = \frac{2m}{MR}g,$$

de onde tiramos que:

$$\alpha = \left(\frac{2m}{M + 2m}\right)\frac{g}{R}. \tag{29.5}$$

A aceleração angular da roldana é constante; portanto, sua velocidade angular aumenta linearmente com o tempo.

A tensão na corda pode ser obtida de 29.3 e 29.5:

$$T = \left(\frac{Mm}{M + 2m}\right)g.$$

Ela também é constante. Isso significa que a massa m tem uma aceleração constante pois seu peso e T são constantes. Ela pode ser calculada levando a expresão de T na equação 29.4:

$$a = \left(\frac{2m}{M + 2m}\right)g. \tag{29.6}$$

29.2 ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO SIMULTÂNEAS

Quando um sistema possui movimento de translação e rotação, a aplicação da segunda lei de Newton para o centro de massa descreve o movimento de translação; o de rotação é descrito pela equação 29.1. Para entender isso, estudemos um problema clássico, o da máquina de Atwood. Ela é constituída por duas massas ligadas por uma corda de massa desprezível, suspensas por uma roldana (Figura 29.2).

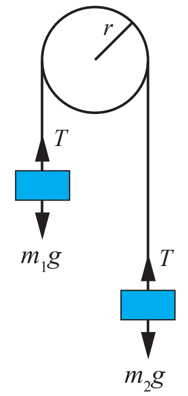


Figura 29.2 – Máquina de Atwood com roldana fixa.

Considere inicialmente que a roldana seja **fixa** e que a corda deslize sobre ela. Determinemos então a tensão na corda e a aceleração do sistema.

Sabemos, neste caso, que sobre cada uma das massas m_i atuam o peso e a força da corda (T_i). De acordo com a terceira lei de Newton, sobre a corda deve atuar a reação da força que ela exerce sobre a massa. Pelo fato de a corda ter massa desprezível, as forças T_i são iguais e são chamadas de tensão na corda (T), sendo representadas atuando nas extremidades dela. Escolhendo o eixo Ox de projeção das forças com a direção vertical e sentido para cima, a aplicação da segunda lei de Newton ao sistema dá:

$$T - m_1 g = m_1 a$$
$$T - m_2 g = -m_2 a,$$

em que T é a tensão na corda e a, a aceleração do sistema. Resolvendo o sistema, obtemos:

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g, \tag{29.7}$$

$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)g. \tag{29.8}$$

Suponhamos, agora, que a roldana seja um disco de massa M e raio R. O momento de inércia relativo ao eixo que passa por seu centro é $(1/2)MR^2$. O movimento das massas m_1 e m_2 é de translação pura; o da roldana é de rotação pura. Para que a roldana se mova, é preciso haver uma força de atrito ($\vec{f}_a$) entre a corda e ela. Como a corda não desliza na roldana, essa força é de atrito estático. Por causa do atrito, as forças nas extremidades da corda não são mais iguais porque a roldana reage exercendo uma força de atrito sobre a corda, de sentido oposto ao movimento dela relativo à corda (Figura 29.3).

Supondo que corda se mova no sentido horário, a força da corda sobre ela está aplicada no ponto mais alto dela e tem sentido da aceleração linear da roldana; a força da roldana sobre a corda, aplicada na corda, tem sentido oposto.

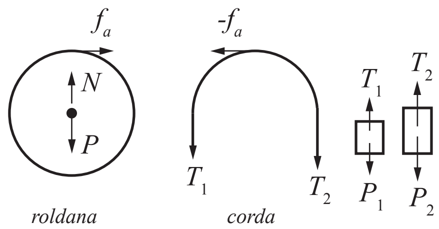


Figura 29.3 – Forças que atuam nos corpos do sistema.

As forças aplicadas à roldana são o seu peso P, a reação normal ao peso N exercida pelo seu suporte, a força de atrito f_a que a corda exerce sobre ela e a reação R à força de atrito exercida pelo suporte da roldana. A segunda lei de Newton para essas forças aplicadas no centro de massa da roldana nos dá:

$$N - Mg = 0 \tag{29.9}$$

$$f_a - R = 0, \tag{29.10}$$

pois a roldana não tem translação. Aplicando a segunda lei às massas, temos:

$$T_1 - m_1 g = +m_1 a, \tag{29.11}$$

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a, \tag{29.12}$$

porque foi escolhido um eixo de projeção das forças de direção vertical com sentido positivo para cima.

A segunda lei de Newton aplicada à corda dá:

$$T_2 - T_1 - f_a = m_c a = 0, \tag{29.13}$$

porque foi desprezada a massa da corda (m_c) em relação às outras massas.

A equação 29.1 dá o movimento de rotação da roldana em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa. Para escrevê-la, escolha um sentido positivo para a rotação. Tomando esse sentido como sendo o horário, temos, para o movimento de rotação da roldana:

$$\tau = f_a R sen(\pi/2) = I\alpha;$$

ou:

$$f_a R = I\alpha = I\frac{a}{R}, \tag{29.14}$$

porque a aceleração linear da borda da roldana é $a = \alpha R$. Mas, da equação 29.10, vem que $T_2 - T_1 = f_a$. Levando esse valor de f_a na equação 29.10, resulta em:

$$T_2 - T_1 = I\frac{a}{R^2}. \tag{29.15}$$

Para determinar a aceleração do sistema, temos que escrever $T_2 - T_1$ na equação 29.11 em função da aceleração. Para isso, subtraimos membro a membro a equação 29.11 de 29.12:

$$(T_2 - T_1) - (m_2 - m_1)g = -(m_1 + m_2)a.$$

Levando, nessa equação, o valor de $T_2 - T_1$ dado por 29.15, a aceleração do sistema:

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + (I / R^2)}\right)g;$$

ou, com o momento de inércia do disco:

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + (M / 2)}\right)g.$$

Se compararmos essa equação com a equação 29.7, que descreve o movimento dos corpos com a roldana fixa, verificamos que a aceleração agora é menor que a do caso da roldana fixa. A razão disso é que a inércia do sistema aumenta com o acréscimo da roldana e a presença da massa dela no denominador indica isso claramente.

Exemplo 29.1

A Figura 29.4 mostra um bloco 1 de massa $m_1 = 4{,}0\ kg$ sobre uma mesa horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre a mesa e o bloco é $\mu = 0{,}4$. Um bloco 2, de massa $m_2 = 3{,}0\ kg$, está ligado ao bloco 1 por uma corda sem massa que passa por uma roldana de massa $m_3 = 2{,}0\ kg$ e raio de 30 *cm*. (a) Qual é a aceleração do sistema? (b) Qual é a aceleração angular da roldana? (c) Quais são as forças exercidas pela corda sobre os blocos?

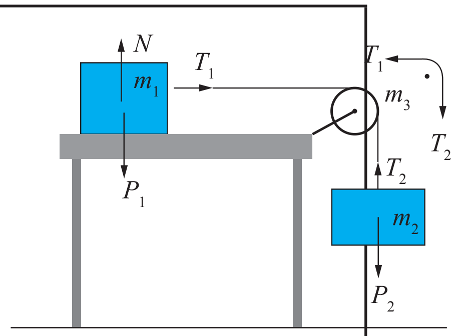


Figura 29.4 – Blocos com roldana fixa.

Solução

Sobre o bloco 1 atuam a força T_1 da corda, a força peso, a reação normal da mesa e a força de atrito entre o bloco e a mesa. Supondo que o bloco se move da esquerda para a direita, a segunda lei de Newton, aplicada a ele, nos dá:

$$T_1 - \mu m_1 g = m_1 a \tag{29.16}$$

O bloco 2 move-se verticalmente. Sobre ele atuam as forças T_2 da corda e o seu peso. A força T_2 é diferente de T_1 porque a roladana tem massa. Da segunda lei de Newton, temos para o bloco 2:

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a, \tag{29.17}$$

em que o sentido positivo do eixo foi escolhido para cima.

A roldana está sujeita a uma força resultante, diferença entre as forças de reação dos dois corpos. Como ela só possui movimento de rotação:

$$(T_2 - T_1)R = I_c \alpha,$$

em que foi escolhido o sentido positivo para a aceleração como sendo o que entra na página. Como não há deslizamento da corda sobre a roldana, $\alpha = a/R$ e, com $I_c = m_3 R^2 / 2$, a equação acima fica:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_3 a. \qquad (29.18)$$

Subtraindo 29.16 de 29.17 e levando o resultado em 29.18, elimina-se $T_2 - T_1$, o que dá a aceleração:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3 / 2} g.$$

Numericamente:

$$a = \frac{4,0 - 0,4 \times 3,0}{4,0 + 3,0 + 1,0} = 0,35 \; m/s^2.$$

A aceleração angular da roldana é:

$$\alpha = \frac{0,35 \; m/s^2}{0,30 \; m} = 1,2 \; rad/s^2.$$

As tensões são dadas pelas equações 29.16 e 29.17:

$$T_1 = m_1(\mu g + a) = 3,0 \times (0.40 \times 9,81) + 0,35 = 12,1 \; N,$$
$$T_2 = m_2(g - a) = 4,0 \times (9,81 - 0,35) = 37,8 \; N.$$

ATIVIDADE 29.1 – MOVIMENTO EM PLANO INCLINADO

Calcule a aceleração do sistema da Figura 29.5, em que a roldana é um disco de raio R e massa M.

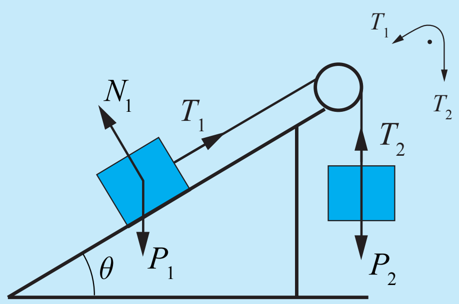


Figura 29.5 – Blocos com roldana móvel em plano inclinado.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 29.1 – Movimento em plano inclinado

As forças que atuam no sistema são mostradas na figura. De acordo com a segunda lei de Newton, escolhendo um eixo vertical com sentido positivo para baixo, temos que:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a,$$

$$-m_1 g sen\theta + T_1 = m_1 a,$$

em que a é a aceleração do sistema.

Para a roldana, temos, escolhendo o sentido positivo do torque como aquele penetrando na folha de papel, que:

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha = I\frac{a}{R}.$$

Das duas primeiras equações, vem:

$$T_1 - T_2 + (m_2 - m_1 \mathrm{sen}\theta)g = (m_1 + m_2)a.$$

Com $I = (1/2)MR^2$, temos que:

$$(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}Ma.$$

Levando o valor de $T_2 - T_1$ na equação da roldana, vem:

$$-\frac{1}{2}Ma + (m_2 - m_1 \mathrm{sen}\theta)g = (m_1 + m_2)a,$$

que resolvida para a resulta em:

$$a = \frac{m_2 - m_1 \mathrm{sen}\theta}{m_1 + m_2 + M/2}g.$$

Exercícios de fixação

E1. Numa máquina de Atwood, um bloco tem massa de 500 g e o outro de 460 g. A roldana, que está montada em um suporte sem atrito, tem raio de 5,0 cm. Quando solto a partir do repouso, o bloco mais pesado cai 75 *cm* em 5 *s*. Qual é o momento de inércia da roldana?

E2. Uma esfera sobe um plano inclinado de 30° rolando sem deslizar. Na base do plano, sua velocidade é $v = 5\ m/s$.

a) Até que altura a bola subirá no plano?

b) Quanto tempo ela leva para parar?

AULA 30

Movimento plano de um corpo rígido

30.1 MOVIMENTO PLANO DE UM CORPO RÍGIDO

Por movimento plano de um corpo rígido entende-se os movimentos de translação e de rotação combinados, de modo que o eixo de rotação do corpo mantenha sempre a mesma direção no espaço. Ele é muito importante porque é assim que se movimentam as rodas, engrenagens, esteiras e escadas rolantes.

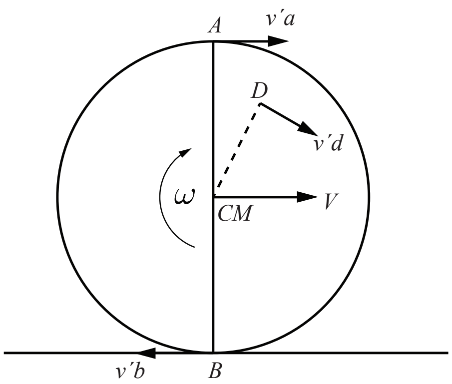


Figura 30.1 – Movimento plano de corpo rígido.

Para estudar as características desse tipo de movimento, imagine um corpo rígido que esteja se movendo sobre uma superfície horizontal (Figura 30.1); seja $\vec{V}$ a velocidade de seu centro de massa em relação a um sistema de referência S fixo na superfície horizontal. Se $\vec{\omega}$ é a sua velocidade angular de rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, qualquer ponto do corpo a uma distância r do eixo de rotação (como o ponto D) descreve um movimento circular em relação a um referencial S, fixo no centro de massa.

A velocidade angular do ponto D é $\vec{\omega}$ e o módulo da sua velocidade linear, relativa a S, é:

$$v'd = \omega r \ .$$

Relativamente a S, a velocidade linear do ponto D é:

$$\vec{v} = \vec{v}'_d + \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}. \qquad .$$

A velocidade linear nos pontos A e B, relativa a S, tem como módulo:

$$\vec{v}'_a = \vec{v}'_b = \omega R, ,$$

em que $\vec{R}$ é a distância desses pontos ao centro de massa. Em relação a S, a velocidade linear desses pontos é:

$\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{V}$ (ponto A),

$\vec{v}_b = \vec{v}'_b + \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{V}$ (ponto B).

Suponha agora que os módulos das velocidades lineares v'_a e v'_b dos pontos A e B, **relativas ao centro de massa**, sejam iguais a V, velocidade do centro de massa relativa a S. Então, conforme podemos ver na Figura 30.2, em relação a S, temos que:

$$\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{V} = 2\vec{V} \text{ (ponto } A\text{)}, \quad (30.1)$$

$$\vec{v}_b = \vec{v}'_b + \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{V} = -\vec{V} + \vec{V} = 0 \text{ (ponto } B\text{)}. \quad (30.2)$$

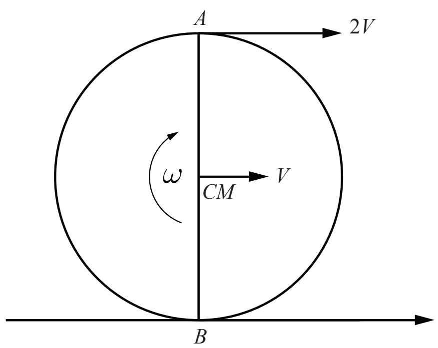


Figura 30.2 – Movimento relativo a um referencial fora do corpo.

Portanto, visto por um observador em repouso relativamente à superfície (fora do corpo), todos os pontos do corpo, situados sobre um eixo paralelo ao de rotação e que passa pelo ponto B, (contato do corpo com a superfície) estão instantâneamente em repouso em relação à superfície. Este eixo é denominado **eixo instantâneo de rotação**.

O eixo instantâneo de rotação é o lugar geométrico dos pontos do corpo rígido em que a equação 30.2 é obedecida. Assim, quando:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{R} = 0,$$

o corpo rola sem deslizar sobre a superfície. Ou seja, se o corpo se desloca com a mesma velocidade com que gira, vai rolar sem deslizar. Logo, lembrando que $v' = \omega R$:

a) Se $v' > V$, o corpo gira mais rapidamente do que se desloca; consequentemente ele derrapa na superfície.

b) Se $v' < V$, ele gira mais lentamente do que desloca e a derrapagem se dá no sentido contrário do caso anterior.

Uma propriedade importante do eixo instantâneo de rotação é que, num referencial fixo na superfície (isto é, não no corpo), o vetor velocidade linear $\vec{v}$ de um ponto P qualquer do corpo (Figura 30.3), situado à distância R do centro de massa, tal que $V = \omega R$, é sempre perpendicular à reta que une esse ponto ao eixo instantâneo Q e é proporcional à distância r' do ponto ao eixo. Consequentemente, para um observador situado sobre o eixo instantâneo de rotação, o movimento plano se reduz a apenas um movimento de rotação pura.

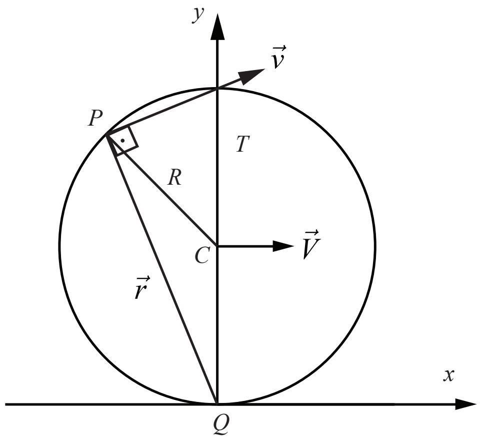


Figura 30.3 – Velocidade $\vec{v}$ perpendicular à reta PQ. Note que o eixo instantâneo de rotação está na direção z, que fura o papel no ponto Q. Ou seja, é como se num dado instante o corpo tivesse rodando em torno desse eixo z.

Para demonstrar isso, veja a Figura 30.4, na qual se visualizam, além do vetor velocidade $\vec{v}$, os vetores $\vec{v}'$, velocidade de *P* relativa ao centro de massa *C*, e $\vec{V}$, velocidade do centro de massa relativa ao referencial fixo.

Então, no sitema de referência da Figura 30.4, obtemos que:

$$\vec{r} = -rsen\beta\hat{i} + rcos\beta\hat{j},$$

$$\vec{v} = vcos\alpha\hat{i} + vsen\alpha\hat{j}.$$

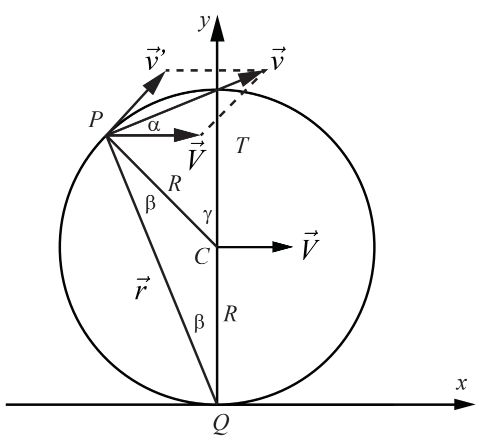


Figura 30.4 – Velocidades de um ponto do corpo.

Mas, do triângulo PQC, temos que $\gamma = 2\beta$. A condição de rolamento estabelece que $V = v'$; portanto, o paralelogramo que tem como lados v' e V é um losango, e o vetor $\vec{v}$ (soma de v' e V) é bissetriz do ângulo $v'PV = 2\alpha$. Então, como γ tem lados perpendiculares ao ângulo $v'PV$, $\gamma = 2\alpha$. Logo, $\alpha = \beta = \gamma/2$. Assim: $\vec{r}\cdot\vec{v} = -rvsen\beta cos\alpha + rvsen\alpha cos\beta = 0$, provando que $\vec{r} \perp \vec{v}$.

ATIVIDADE 30.1 – PROVA DE QUE O MOVIMENTO É DE ROTAÇÃO PURA QUANDO VISTO POR UM OBSERVADOR NO EIXO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO

Prove que a velocidade de P é proporcional à distância PQ.

A descrição do movimento plano se faz com a segunda lei de Newton para o movimento do centro de massa, e da equação $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ para a rotação em torno do eixo que passa pelo centro de massa (e que pode ser considerado fixo porque sua direção no espaço não muda).

30.2 ROLAMENTO SEM DESLIZAMENTO

O movimento de rolamento sem deslizamento de um corpo de seção circular (aro, disco, esfera e cilindro) é o mais importante na vida prática, pois, quando isso acontece, o desgaste da superfície de contato do corpo com a superfície sobre a qual ele se desloca é mínimo.

Quando o corpo é rígido, a superfície de contato se reduz a uma linha (o eixo instantâneo de rotação); a força de atrito entre o corpo e a superfície sobre a qual ele se desloca é uma força de atrito estático, pois não há movimento relativo entre os pontos de contato, e, assim, não há desgaste devido ao atrito.

Na realidade, nenhum corpo é absolutamente rígido e sempre há deformação do corpo na região de contato (como exemplo extremo, basta observarmos um pneu de automóvel). Por causa dessa deformação, ao invés do eixo instantâneo de rotação, passa a existir uma área de contato entre o corpo e a superfície sobre a qual ele se desloca; nela aparecem então forças de atrito que tendem a frear não só a rotação, como também a translação do corpo. Não há mais rolamento puro e, por isso, é sempre necessário que uma força externa atue sobre o corpo para manter seu movimento. Entretanto, as deformações em corpos sólidos são pequenas, de modo que a descrição de corpo rígido dá resultados muito próximos da realidade.

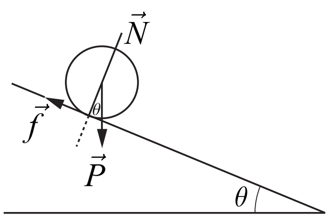


Figura 30.5 – Rolamento sem deslizamento de um corpo sobre um plano inclinado.

Exemplo 30.1

Seja o rolamento sem deslizamento de um corpo de seção circular de raio R, ao longo de um plano inclinado de um ângulo θ. Sobre ele atuam as forças mostradas na Figura 30.5. A força de atrito deve sempre existir; caso contrário, haveria apenas o movimento de translação.

Escolhendo um sistema de coordenadas fixo no plano, com eixo Ox ao longo dele e dirigido para baixo, a segunda lei de Newton nos dá, para a translação do centro de massa:

$$mg sen\theta - f = ma_{cm},$$

$$N - mg cos\theta = 0,$$

em que a_{cm} é a aceleração do centro de massa em relação ao plano. Escolhendo o sentido positivo para o momento da força e para a aceleração angular apontando para dentro do papel, a equação $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$ nos fornece:

$$R\,f\,sen(\pi/2) = I_c\,\alpha\,,$$

em que I_c é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo centro de massa. A condição de rolamento sem deslizamento obriga que:

$$V = \omega R,$$

$$a_{cm} = \alpha R,$$

em que V é a velocidade do centro de massa em relação ao plano. Dessas últimas equações, vem, para a força de atrito:

$$f = I_C \frac{a_{cm}}{R^2}\,,$$

que levada nas equações do centro de massa, dá:

$$m\,g\,sen\theta - I_c \frac{a_{cm}}{R^2} = m a_{cm}\,,$$

ou:

$$a_{cm} = \frac{sen\theta}{1+(I_c/mR^2)}\,g\,.$$

ATIVIDADE 30.2 – ROLAMENTO EM ESFERA E CILINDRO

Uma esfera e um cilindro de mesmo raio R são soltos do alto de um plano inclinado. Qual deles você espera que chegue primeiro no final do plano?

De acordo com a propriedade vista anteriormente, um observador, situado no eixo instantâneo de rotação, veria um corpo com rolamento puro tendo apenas o movimento de rotação. Podemos utilizar o exemplo 30.1 e a atividade 30.2 para observar isso com uma aplicação:

Considere que o corpo do exemplo 30.1 seja um cilindro. De acordo com a atividade 30.2, sua aceleração ao descer o plano inclinado, vista por um observador em repouso no plano, deve ser:

$$a_{cm} = \frac{2}{3}g\,sen\theta.$$

Considere agora o observador no eixo instantâneo de rotação do cilindro. O momento de inércia do cilindro, relativo a esse eixo (I), pode ser calculado com o teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_c + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2\,,$$

em que I_c é o momento de inércia do cilindro relativo a um eixo que passa pelo seu centro de massa e é paralelo ao eixo instantâneo de rotação.

Para o observador no eixo instantâneo de rotação, o cilindro só possui rotação em torno desse eixo, e, portanto, a equação

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$$

permite calcular a aceleração angular do cilindro.

Em relação ao eixo instantâneo de rotação, a força de atrito e a reação normal não exercem torque sobre o cilindro, porque possuem direção que passa por esse eixo. A força peso ($\vec{P}$), entretanto, atua com um torque:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P};$$

que, em módulo, é dado por:

$$\tau = r \cdot P = R \cdot mg \cdot sen\theta = mgRsen\theta,$$

em que $\vec{r}$ é o vetor-posição do centro de massa em relação ao eixo instantâneo de rotação (a força peso está aplicada no centro de massa).

As três últimas equações nos dão:

$$mgRsen\theta = \frac{3}{2}mR^2\alpha,$$

de onde se tira que:

$$\alpha = \frac{2}{3}\frac{gsen\theta}{R}.$$

Mas, como o corpo só possui rotação, essa também é a aceleração angular do seu centro de massa. A aceleração linear é dada por $a_{cm} = \alpha R$. Então, a aceleração linear do centro de massa do cilindro, é:

$$a_{cm} = \frac{2}{3}gsen\theta,$$

resultado idêntico ao da atividade 30.2.

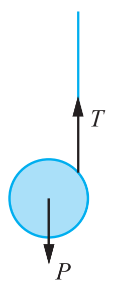


Figura 30.6 – O movimento do ioiô.

Exemplo 30.2

Um ioiô cai verticalmente a partir do repouso (Figura 30.6). Supondo que ele é solto da posição em que ele está junto à mão de quem o solta, determine sua velocidade em um ponto a uma distância y_0 do seu ponto de partida.

Sobre o ioiô atuam duas forças: o seu peso P, cuja direção passa pelo centro de massa, e a tensão na corda T, cuja direção é tangente à borda do ioiô.

De acordo com a segunda lei de Newton:

$$mg - T = ma_{cm},$$

em que m é a massa do ioiô. O momento do peso em relação ao centro de massa é nulo; o momento resultante sobre o ioiô é o da tensão na corda. Então:

$$TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha.$$

O ioiô rola sem deslizar sobre a corda, de modo que $\alpha = a_{cm}/R$. Então:

$$T = \frac{1}{2}ma_{cm}.$$

Levando o valor da tensão na equação da segunda lei de Newton, é obtido que:

$$a_{cm} = \frac{3}{2}mg.$$

Como a_{cm} é constante, temos, para a velocidade no ponto de coordenadas y_0:

$$v = \sqrt{2a_{cm}y_0} = \sqrt{3mgy_0}.$$

30.3 O ESTABELECIMENTO DO ROLAMENTO

Considere uma bola que é lançada no sentido da esquerda para a direita sobre uma superfície plana com uma velocidade v_0, mas sem movimento de rotação. Ela começa então a se deslocar sob ação de três forças: o seu peso, que tem direção vertical, a reação normal da superfície, também vertical, igual e de sentido oposto ao peso, e a força de atrito cinético entre a bola e a superfície. Essa força se opõe ao movimento de translação da bola, freando-a, mas, como não está atuando diretamente sobre o centro de massa da bola, ela produz um torque que obriga a bola a começar a girar em torno do seu centro de massa, no sentido horário.

A aceleração angular da bola aumenta a sua velocidade angular até que os pontos de contato da bola com a superfície formem um eixo instatâneo de rotação. Para esses pontos, $v = \omega R$. A partir desse ponto, a bola passa a rolar sem deslizar. A força de atrito que passa a atuar entre o corpo e a superfície é uma força de atrito estático.

Podemos calcular a velocidade em que o rolamento passa a ocorrer e a distância percorrida pela bola até esse instante: a força de atrito que atua na bola enquanto ela desliza é $f = \mu mg$, sendo μ o coeficiente de atrito cinético entre a bola e a superfície. Então, da segunda lei de Newton:

$$-\mu mg = ma_{cm}.$$

Considerando o sentido do torque positivo como o horário, tem-se que:

$$\mu mgR = \frac{2}{5}mR^2\alpha, ,$$

ou:

$$a_{cm} = \mu g \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{5\mu g}{2R}.$$

Integrando a primeira equação acima, com a condição de que a velocidade inicial (em $t = 0$) é v_0, vem, para a velocidade do centro de massa da bola:

$$v_{cm} = v_0 - \mu gt. \tag{30.3}$$

Integrando a segunda, com a velocidade angular inicial $\omega_0 = 0$, a velocidade angular de rotação da bola em torno do centro de massa é dada por:

$$\omega = \frac{5\mu g}{2R}t. .$$

No instante em que desaparece o deslizamento, as velocidades angular de rotação da bola e a linear do centro de massa devem obedecer à condição $v = \omega R$. Então:

$$v_0 - \mu g t = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R} t R,$$

de onde vem que:

$$t = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}.$$

A velocidade v da bola em que começa o rolamento sem deslizamento é obtida levando esse valor de t na equação 30.3. Assim:

$$v = v_0 - \mu g \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g} = \frac{5}{7} v_0.$$

A distância percorrida até o início do rolamento é:

$$x = -\frac{v^2 - v_0^2}{2\mu g} = \frac{1-(25/49)}{2\mu g} v_0^2 = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu g}.$$

ATIVIDADE 30.3 – ESTABELECIMENTO DO ROLAMENTO PARA UM ARO

Calcule a velocidade e a distância percorrida por um aro de mesma massa e mesmo raio que a esfera analisada acima.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 30.1 – Prova de que o movimento é de rotação pura quando visto por um observador no eixo instantâneo de rotação

Basta ver que, como $\vec{r} \perp \vec{v}$, o movimento de P relativamente a Q é de rotação pura, com velocidade angular $\omega = v/r$, em que $v = \omega r$.

Atividade 30.2 – Rolamento em esfera e cilindro

Se o corpo for um cilindro:

$$I_c = \frac{1}{2} M R^2, \qquad a_c = \frac{2}{3} g\, sen\theta$$

Se o corpo for uma esfera:

$$I_c = \frac{2}{5} M R^2, \qquad a_e = \frac{5}{7} g\, sen\theta$$

Logo $a_e > a_c$, e a esfera chega primeiro.

Atividade 30.3 – Estabelecimento do rolamento para um aro

O momento de inércia do aro é $I = M R^2$. Então, a equação do torque sobre ele fica:

$$\mu m g R = m R^2 \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\mu g}{R}.$$

A equação para o centro de massa fica:

$$a_{cm} = -\mu g$$

No instante em que desaparece o deslizamento, as velocidades angular de rotação da bola e a linear do centro de massa devem obedecer à condição $v = \omega R$. Então:

$$v_0 - \mu g t = \frac{\mu g}{R} t R ,$$

$$\omega = \frac{\mu g}{R} t ,$$

de onde tiramos que:

$$t = \frac{v_0}{2\mu g} .$$

A velocidade v da bola em que começa o rolamento sem deslizamento é obtida levando esse valor de t na equação 30.3. Obtemos que:

$$v = v_0 - \mu g \frac{v_0}{2\mu g} = \frac{1}{2} v_0 .$$

A distância percorrida até o início do rolamento é:

$$x = -\frac{v^2 - v_0^2}{2\mu g} = -\frac{v_0^2/4 - v_0^2}{2\mu g} = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{\mu g} . .$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um carro se desloca para direita em uma superfície plana com velocidade $V = 40km/h$. A velocidade de um ponto da roda que toca o chão em relação à superfície é v.

a) Se $v = 30\ km/h$, em qual sentido o carro derrapa?

b) Se $v = 50\ km/h$, em qual sentido o carro derrapa?

c) Descreva situações físicas para os casos **a** e **b**, por exemplo: um carro freando ou acelerando?

d) Para qual valor de v o carro não derrapa?

E2. Um disco de raio R rola em um plano para esquerda sem deslizar com velocidade angular ω. Encontre o vetor velocidade $\vec{v}$, em relação a um observador na superfície, de um ponto que está na periferia do disco e se encontra a 90° (sentido anti-horário) e a -90° do ponto mais alto do disco. Calcule o módulo desse vetor.

E3. Um anel rola para cima em um plano que possui inclinação a. Em qual sentido está a força de atrito? Calcule a aceleração do centro de massa do anel.

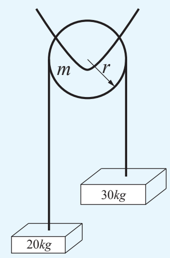
E4. Um disco é lançado com velocidade v_0 e desliza sobre uma superfície plana com coeficiente de atrito cinético μ. Qual é a perda de energia entre o instante do lançamento e o instante em que o disco começa a rolar sem deslizar?

E5. Uma bola é lançada com velocidade v_{0L} e desliza sobre uma superfície plana colocada na Lua. Qual deve ser a razão entre a velocidade de lançamento dessa bola e a velocidade v_{0T} de lançamento da mesma bola na Terra para que a bola percorra a mesma distância antes de rolar sem deslizar? Considere a gravidade da Terra $9,78\ m/s^2$ e que a bola seja lançada sobre a mesma superfície que foi colocada na Lua. A gravidade média na superfície da Lua é $1,67\ m/s^2$.

PROBLEMAS DA UNIDADE 11

P1. Determine o momento de inércia de um cone maciço reto de raio de base R e altura h em relação ao seu eixo de simetria. A massa do cone é M.

P2. Um disco fino e uniforme possui massa M e raio R. Fazemos um buraco circular de raio $R/4$ centrado em um ponto situado à distância $R/2$ do centro do disco.



a) Calcule o momento de inércia do disco com o buraco em relação a um eixo perpendicular ao disco e passando por seu centro.

b) Calcule o momento de inércia do disco com o buraco em relação a um eixo perpendicular ao disco e passando pelo centro do buraco.

P3. Uma pequena bola de massa 1,06 *kg* é presa na extremidade de uma barra de aço homogênea, de comprimento 1,20 *m* e massa 6,40 *kg*. A barra é colocada horizontalmente e posta para girar em torno de um eixo vertical que passa pelo seu meio. Em um dado instante t_0, sua velocidade angular é de 39,0 *rev/s*. Por causa do atrito entre a barra e o eixo, ela perde velocidade até parar, 32 segundos depois de t_0. Supondo que o torque do atrito que atuou sobre a barra foi constante, calcular: a) a aceleração angular da barra; b) o torque; c) o número de revoluções realizadas durante os 32 segundos.

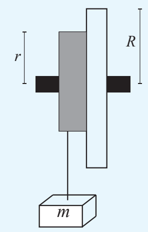
P4. O sistema da figura abaixo começa a se mover do repouso. O bloco de 30 *kg* está a 2,0 *m* do solo. A roldana é um disco uniforme de raio de 10,0 *cm* e massa 5,0 *kg*.

a) Qual é a velocidade do bloco de 30 *kg* ao colidir com o solo?

b) Qual é a velocidade angular da polia nesse instante?

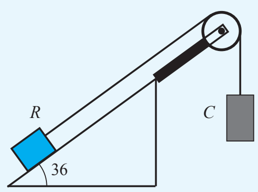
c) Quais são as tensões nas cordas?

d) Quanto tempo leva o bloco de 30 *kg* até chegar ao solo?



P5. Dois discos metálicos, um com raio R_1 = 2,50 *cm* e massa m_1 = 0,80 *kg* e o outro com raio R_2 = 5,00 *cm* e massa m_2 = 1,60 *kg*, são soldados juntos e montados sobre um eixo sem atrito passando pelo centro comum (figura ao lado).

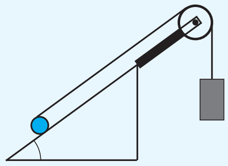
a) Qual é o momento de inércia dos dois discos?



b) Um fio de massa desprezível é enrolado na periferia do disco menor e um bloco de massa m = 1.50 *kg* é suspenso pela extremidade livre do fio. Se o bloco é solto a partir do repouso a uma distância de 2,0 *m* acima do solo, qual é sua velocidade ao chegar ao solo?

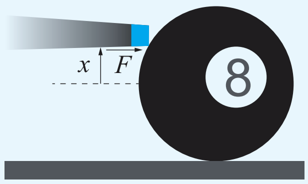
c) Repita o cálculo para o caso do fio ser enrolado no disco maior e compare os resultados.

P6. Um bloco B de 3,0 *kg* é colocado em um plano inclinado de 36° com a horizontal e é ligado a outro C de 12,0 *kg* por uma corda de massa desprezível, que passa por uma roldana de massa 1,0 *kg* e raio 10 *cm* (figura ao lado). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é μ = 0,10. Ache a aceleração do sistema, as tensões na corda dos dois lados da roldana. Suponha a roldana um disco uniforme.

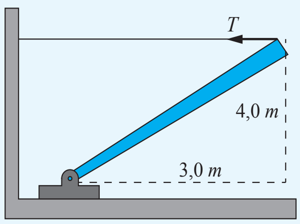


P7. Um cilindro tem raio R = 7,5 cm e pesa 25,0 *kg* e está em um plano inclinado de 30° (figura ao lado). Uma fita fina e leve é enrolada nele e passa por uma roldana de massa desprezível para se fixar em um corpo que pesa 5,0 *kg* (figura ao lado). Ache a tensão na fita e a aceleração linear do cilindro ao descer o plano inclinado.

P8. Uma escada de 3,0 *m* de comprimento está apoiada sobre uma parede fazendo um ângulo de 60° com o solo. Ela começa a escorregar. Onde está o seu eixo instantâneo de rotação?



P9. Dá-se uma tacada em uma bola de sinuca a uma distância x acima do seu centro de massa. Qual deve ser o valor de x para que a bola role sem deslizar desde o início de seu movimento?



P10. Um guindaste homogêneo de massa m = 150 *kg* e comprimento L = 5,0 *m* tem sua extremidade inferior articulada. Ele é suportado por um cabo horizontal, conforme mostra a figura ao lado.

a) Qual é a tensão no cabo?

b) Se o cabo for cortado, qual a aceleração angular do guindaste exatamente no instante do corte?

c) Qual a velocidade angular do guindaste quando ele tocar o solo?

UNIDADE 12
Leis de conservação para sistemas de partículas

Os conceitos de energia cinética e potencial, tal como foi feito para o momentum linear, podem ser estendidos a um sistema de partículas e, em particular, a um corpo rígido, incluindo os movimentos de translação e rotação. Nesta unidade você verá como fazê-lo e como aplicá-los ao movimento plano do corpo rígido. Aprenderá ainda a noção de momentum angular e sua lei de conservação.

AULA 31

Conservação da energia em sistemas de partículas

Objetivos

- Estudar a lei de conservação de energia para um sistema de partículas;
- Estudar a lei de conservação do momentum angular para um sistema de partículas;
- Aplicar ambas as leis para um corpo rígido.

31.1 ENERGIA CINÉTICA E POTENCIAL NA ROTAÇÃO

Os conceitos de energia cinética e potencial podem ser estendidos a um sistema de partículas, em particular, a um corpo rígido, incluindo os movimentos de translação e rotação. Nesta aula veremos como fazê-lo e como aplicá-los ao movimento plano do corpo rígido.

31.2 ENERGIA CINÉTICA PARA UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

A energia cinética de uma partícula, relativa a um referencial O, é definida como:

$$E_c = \frac{1}{2}m(\vec{v} \bullet \vec{v}) = \frac{1}{2}mv^2,$$

em que m é a massa da partícula e $\vec{v}$ sua velocidade relativa a O.

Para um sistema de partículas de massas m_i e velocidades $\vec{v}_i$, a energia cinética é uma grandeza escalar e é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i \bullet \vec{v}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2. \qquad (31.1)$$

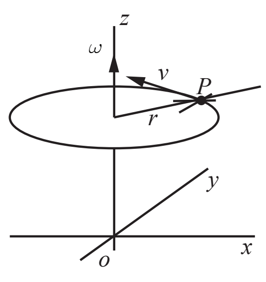


Figura 31.1 – Rotação pura de um corpo rígido em torno de um eixo; o ponto P do corpo descreve movimento circular em torno do eixo.

Considere um corpo rígido em rotação pura em torno de um eixo fixo no espaço, com velocidade angular $\vec{\omega}$. Cada partícula do corpo, de massa m_i, situada à distância r_i do eixo de rotação, descreve em torno dele um círculo de raio r_i com velocidade linear $\vec{v}_i = \omega \times \vec{r}_i$ (Figura 31.1). A energia cinética de rotação do corpo em torno do eixo é, então:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (m_i r_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_E\omega^2, \qquad (31.2)$$

em que I_E é o momento de inércia do corpo, relativo ao eixo de rotação.

Exemplo 31.1

Calcule a energia cinética de um prato de toca-disco de vinil cuja massa é de 500 *g* e raio de 15 *cm*, girando com a velocidade angular de $33\frac{1}{3}$ rotações por minuto.

A velocidade angular do prato é:

$$\omega = \frac{33,333 \times 2\pi \ rad}{60,0 \ s} = 3,49 \ rad/s.$$

Supondo que o prato seja um disco homogêneo, seu momento de inércia relativo a um eixo perpendicular a seu plano e que passa por seu centro é:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 = 0,500 \times 0,500 \ kg \times (0,15 \ m)^2 = 5,6 \times 10^{-3} \ kg.m^2.$$

A sua energia cinética é, então:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = 0,500 \times 5,6 \times 10^{-3} \ kg.m^2 \times (3,49 \ rad/s)^2 = 3,41 \times 10^{-2} \ J.$$

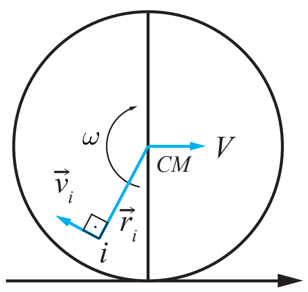


Figura 31.2 – A representação de uma partícula *i* de um corpo rígido.

Seja agora um corpo rígido em movimento plano. Conforme foi visto na unidade anterior, ao mesmo tempo que seu centro de massa se move com velocidade $\vec{V}_{CM}$ relativamente a um referencial *O*, as partículas do corpo descrevem círculos de raios r_i em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, com velocidades $\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ (ver Figura 31.2). A velocidade da partícula *i* relativamente ao ponto *O* é:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}_{CM}.$$

A energia cinética do corpo, relativa a *O*, é:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}_{CM})^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i [(\vec{v}_i' + \vec{V}_{CM}) \bullet (\vec{v}_i' + \vec{V}_{CM})] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i [v_i'^2 + 2\vec{V}_{CM} \bullet \vec{v}_i' + V_{CM}^2],$$

ou, separando os termos e escrevendo $v_i' = \omega r_i'$:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (m_i r_i'^2)\omega^2 + \vec{V}_{CM} \bullet \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) V^2.$$

Mas, por definição de centro de massa, $\sum m_i \vec{r}_i' = 0$, consequentemente, $\sum m_i \vec{v}_i' = 0$. Logo, a expressão acima fica:

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2, \text{ com } I_c = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i'^2, \qquad (31.3)$$

isto é, a energia cinética de um corpo rígido em movimento plano é a soma da energia cinética do seu centro de massa com a energia cinética de rotação do corpo em torno de um eixo que passa pelo centro de massa. I_c é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano de rotação.

Exemplo 31.2

Se o prato de toca-disco do exemplo 31.1 rolar sem deslizar sobre uma superfície plana, qual será sua energia cinética?

Como o prato de toca-disco rola sem deslizar, é preciso que a velocidade de seu centro de massa seja igual ao produto de sua velocidade angular de rotação pelo seu raio:

$$V_{CM} = \omega R = 3,49\ rad/s \times 0,15\ m = 0,523\ m/s$$

Então, de acordo com a equação 31.3 e com o resultado do exemplo 31.1, obtemos que:

$$E_c = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = 0,500 \times 0,500\ kg \times (0,523\ m/s)^2 + 3,41\times 10^{-2}\ J$$

$$E_c = 0,102\ J$$

31.3 TRABALHO E POTÊNCIA NA ROTAÇÃO

Se uma força $\vec{F}$ atua sobre um corpo rígido e ela não está aplicada diretamente sobre o centro de massa do corpo, ela produzirá uma rotação nesse corpo em torno de um eixo (que pode ou não passar pelo centro de massa).

Seja $d\theta$ o deslocamento angular que o corpo sofre durante o intervalo de tempo dt sob ação de uma força $\vec{F}$. Como o corpo é rígido, seu movimento poderá ser representado pelo movimento de qualquer ponto P pertencente a ele. Seja então P um ponto do corpo à distância r do eixo de rotação. Durante o intervalo de tempo dt, o ponto P descreve um arco de círculo em torno desse eixo e seu deslocamento ds está relacionado com o **deslocamento angular** $d\theta$ por:

$$ds = r\,d\theta.$$

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ durante o deslocamento $d\vec{s}$ é:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cos\phi\, ds = (F\cos\phi)(r\,d\theta), \qquad (31.4)$$

em que ϕ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $d\vec{s}$. O termo $F\cos\phi$ é a componente da força na direção do deslocamento e $(F\cos\phi)r$ é o torque $\vec{\tau}$ exercido pela força sobre o corpo em torno do eixo perpendicular ao plano de rotação do corpo. Dessa forma, a equação 31.4 pode ser escrita:

$$dW = \tau\, d\theta, \qquad (31.5)$$

que dá o trabalho realizado por uma força durante um deslocamento angular do corpo.

A taxa de realização de trabalho de uma força com o tempo é a **potência** liberada pela força:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega, \tag{31.6}$$

em que ω é a velocidade angular de rotação.

Considerando que $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$, a equação 31.6 pode ser escrita:

$$\frac{dW}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt}.$$

Então, durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, o trabalho realizado pela força é:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2}\frac{dW}{dt}dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2,$$

isto é, o trabalho realizado pela força durante um deslocamento angular é igual à variação da energia cinética de rotação do corpo. Esse resultado é semelhante ao do teorema do trabalho-energia cinética no movimento de translação.

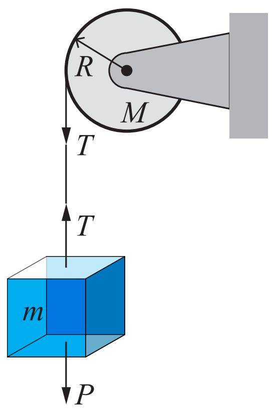


Figura 31.3 – Corpo suspenso em uma roldana.

Exemplo 31.3

Uma corda de massa desprezível é enrolada em uma roldana de massa M = 2,92 *kg* e raio 15,0 *cm*. Na sua extremidade livre prende-se um corpo de massa m = 1,0 *kg*, de modo que a corda que o prende fique esticada (Figura 31.3). O corpo é solto a partir do repouso.

Calcule o trabalho realizado pelo torque aplicado à roldana sobre ela em 2,0 *s*;

Calcule o aumento de energia cinética da roldana.

As forças que atuam no corpo e na roldana são mostradas na Figura 31.3. Daí:

$$mg - T = ma,$$

$$RT = I_c\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{r}.$$

A solução desse sistema, como foi visto na aula anterior, é:

$$a = \frac{2m}{M+2m}g,$$

$$T = \frac{Mm}{M+2m}g,$$

em que a é a aceleracão linear do sistema.

A força que exerce torque sobre a roldana é a força T. O trabalho que ela realiza sobre a roldana durante um deslocamento angular $\Delta\theta$ da roldana é:

$$W = \tau\Delta\theta = RT\Delta\theta.$$

Como a força T é constante, a roldana gira com aceleração angular constante, que vale:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2m}{M+2m}\frac{g}{R} = \frac{2\times 1,0\ kg}{2,92\ kg + 2\times 1,0\ kg}\frac{9,80\ m/s^2}{0,15\ m} = 26,6\ rad/s^2.$$

O deslocamento angular total da roldana no intervalo de tempo $t = 2,0\,\mathrm{s}$ é dado por:

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}\times 26,6\ rad/s^2 \times (2,0\ s)^2 = 53,2\ rad.$$

O trabalho realizado pela tensão T sobre a roldana neste deslocamento angular é:

$$W = TR\Delta\theta = \left(\frac{Mm}{M+2m}g\right)R\Delta\theta;$$

ou, numericamente:

$$W = \frac{2,92\ Kg \times 1,0\ Kg}{2,92\ Kg + 2\times 1,0\ Kg}\times 9,80\ m/s^2 \times 0,15\ m \times 53,2\ rad = 46,4\ J.$$

A energia cinética inicial E_0 da roldana é zero, pois o sistema estava inicialmente em repouso. Após os 2,0 *s*, ela vale:

$$E_c = E_0 + W = 46,4\ J.$$

ATIVIDADE 31.1 – A VELOCIDADE ANGULAR DA ROLDANA

Calcule a velocidade angular da roldana após os 2,0 *s*.

31.4 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA EM SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Da mesma forma que no caso de uma partícula, podemos associar ao centro de massa de um corpo rígido em movimento plano uma energia potencial U derivada de qualquer força conservativa que atua no corpo.

A energia mecânica total (E) do corpo será a soma das energias cinéticas do centro de massa, de rotação do corpo em torno dele e das energias potenciais associadas às forças conservativas que nele atuam:

$$E = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \sum U_i.$$

Se as forças que atuam no corpo e realizam trabalho sobre ele são conservativas, a energia mecânica total se conserva. Se sobre o corpo atuam também forças dissipativas, o trabalho realizado por essas é igual à variação da energia mecânica do corpo.

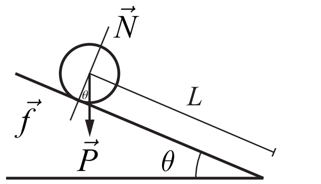


Figura 31.4 – Rolamento sem deslizamento de um corpo sobre um plano inclinado.

Exemplo 31.4

Consideremos novamente o exemplo 30.1. Um cilindro se move sobre um plano inclinado (Figura 31.4) e está a uma distância L do chão. As forças que atuam no cilindro são a normal ao plano inclinado, o peso e a força de atrito entre o cilindro e o plano.

Solução

A normal ao plano inclinado e a componente do peso perpendicular ao plano inclinado não realizam trabalho sobre o corpo. A força de atrito está aplicada no eixo instantâneo de rotação do corpo, em que a velocidade dele, relativamente ao plano, é nula; portanto, como não há deslocamento do corpo em relação ao plano, o trabalho da força de atrito é nulo; assim, a única força que realiza trabalho sobre o corpo é a componente do peso paralela ao plano, que é conservativa. Portanto, a energia potencial gravitacional do corpo, a uma altura h em relação ao solo, é:

$$U = mgh.$$

Da conservação da energia vem que:

$$\frac{1}{2}mV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + 0,$$

em que o lado esquerdo é a energia total no alto do plano, e o direito, na parte mais baixa dele. Considerando que o corpo partiu do repouso, sem rotação (isto é, com velocidade angular inicial nula) e com $h = Lsen\theta$ e $V = \omega R$, temos:

$$mgLsen\theta = \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + \frac{1}{4}mV_{CM}^2 = \frac{3}{4}mV_{CM}^2,$$

que nos permite calcular a velocidade do centro de massa no ponto mais baixo do plano inclinado:

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gLsen\theta}.$$

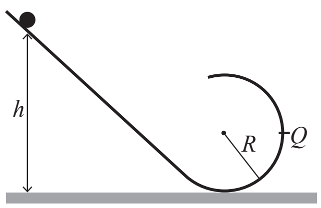


Figura 31.5 – Esfera em trilho.

Exemplo 31.5

Uma esfera de massa m e raio r é solta de uma altura h em um trilho que começa em um plano inclinado e termina em um arco de círculo de raio R (Figura 31.5). Se $h = 6R$, calcule a força horizontal que atua na esfera no ponto Q.

Solução

A força horizontal que atua sobre a esfera em Q é a centrípeta:

$$F = m\frac{v^2}{R},$$

em que v é a velocidade da esfera em Q.

Para determinar essa velocidade, usamos o fato de que não há forças dissipativas atuando na esfera, posto que ela rola sem deslizar no trilho. Da conservação da energia, com o nível zero de energia potencial no ponto mais baixo do trilho, temos:

$$mg6R = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + mgR;$$

ou, como o momento de inércia da esfera relativo ao seu centro de massa é $I_c = (2/5)mr^2$ e $\omega = v/r$:

$$5mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right]mv^2 = \frac{7}{10}mv^2;$$

de onde tiramos:

$$v^2 = \frac{50}{7}gR.$$

Levando agora esse resultado na expressão da força obtemos:

$$F = \frac{50}{7}mg.$$

ATIVIDADE 31.2 – A VELOCIDADE DE UM ARO NO PLANO INCLINADO

No exemplo 31.2, considere um anel ao invés de uma esfera. Ache a força do trilho que atua sobre ela no ponto Q e a sua velocidade linear nesse ponto.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 31.1 – A velocidade angular da roldana

A velocidade angular da roldana pode ser calculada de duas maneiras: na primeira, sabendo a aceleração angular e a velocidade angular inicial da roldana, temos:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 26{,}6\ rad/s^2 \times 2{,}0\ s = 53{,}2\ rad/s.$$

A segunda maneira de calcular a velocidade angular é aplicando o teorema do trabalho--energia cinética:

$$W = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 \equiv \frac{1}{2}I\omega^2,$$

de onde vem que, considerando I em relação a um eixo perpendicular ao plano de rotação e que passa pelo centro de massa:

$$\omega = \sqrt{\frac{2W}{I_c}} = \sqrt{\frac{2W}{(1/2)MR^2}} = \sqrt{\frac{4\times 46{,}4\ Joules}{2{,}92\ Kg\times(0{,}15\ m)^2}} = 53{,}2\ rad/s.$$

Atividade 31.2 – A velocidade de um aro no plano inclinado

O momento de inércia do anel, relativo a um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular a seu plano, é: $I_c = mR^2$. Então, a equação da conservação da energia fica:

$$mg6R = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + mgR;$$

ou, com $\omega = v/R$:

$$5mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

de onde tiramos:

$$v = \sqrt{5mgR} \qquad \text{e} \qquad F = m\frac{v^2}{R} = 5mg.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Marquinhos está testando a roda de raio 30,0 *cm* e massa 1,5 *kg* da sua bicicleta. Para isso, ele a roda no ar e determina que sua velocidade angular é 6 *rad/s*. Qual é a energia cinética de rotação que Marquinhos calcula? Como Marquinhos faz para determinar o momento de inércia da roda comparando com o momento de inércia do anel? Responda então: qual é o momento de inércia da roda?

E2. Uma esfera de massa m e raio R rola em um plano sem deslizar. Sendo V a velocidade do centro de massa, calcule a energia cinética de rotação e a energia cinética total da esfera.

E3. Para que uma equação seja verdadeira, é preciso que as unidades sejam consistentes. Verifique então se a equação para energia cinética de rotação ($E_c = \frac{1}{2} I_e \omega^2$) possui unidade de energia.

E4. Um toca-disco exerce um torque τ em um disco de momento de inércia I_c em relação a um eixo perpendicular ao plano de rotação e que passa pelo seu centro de massa. Calcule o trabalho realizado em um tempo t se o disco começou seu movimento parado. Lembre-se de que podemos escrever $\Delta W = \tau \Delta \theta$.

E5. Um cilindro parte de uma altura h de um plano inclinado com $\omega = \omega_1$ e a velocidade do centro de massa $V_{CM} = V_1$. O cilindro chega ao fim do plano com $\omega = \omega_2$ e $V = V_2$, sendo $\omega_1 < \omega_2$ e $V_1 < V_2$. Calcule a diferença de energia. O que aconteceu com a energia potencial? O cilindro deslizou ou não?

AULA 32

Momentum angular de uma partícula

Objetivos

- Definir o momentum angular de uma partícula;
- Relacionar o momentum angular com o torque.

32.1 MOMENTUM ANGULAR

O **momentum angular** de uma partícula de massa m, relativo a um referencial inercial determinado por um ponto O é:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v}), \tag{32.1}$$

em que $\vec{r}$ é o vetor-posição da partícula e $\vec{v}$, a sua velocidade, ambos relativos a O. Como a definição indica, o momentum angular da partícula é perpendicular ao plano que contém os vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$. Sua unidade no sistema MKS é $kg.m^2/s$.

Se derivarmos a equação acima, obtemos:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Mas:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad \text{e} \qquad \vec{v} \times \vec{v} = 0.$$

Então:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r} \times \left(m\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{r} \times \vec{F};$$

e, finalmente:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\tau}_o, \tag{32.2}$$

em que $\vec{\tau}_o$ é o torque da força resultante que atua na partícula, relativamente a O.

Então, a taxa de variação do momentum angular com o tempo, relativo ao ponto *O*, é igual (em módulo, direção e sentido) ao torque resultante que atua na partícula.

Exemplo 32.1

Calcule o torque a que está sujeito um pêndulo simples, relativo a seu ponto de suspensão. Calcule o momentum linear do pêndulo em um dado ponto de sua trajetória (Figura 32.1), relativo ao mesmo ponto, e verifique que a equação 32.2 é obedecida.

As forças que atuam sobre o pêndulo são o peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e a tensão $\vec{T}$ na corda. A tensão está sempre dirigida para *O*, de modo que ela não produz torque sobre o pêndulo. O torque do peso é:

$$\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{P}.$$

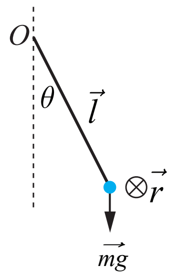


Figura 32.1 – O pêndulo simples.

Escolhendo um eixo perpendicular à folha de papel e com sentido para dentro, a projeção dessa equação sobre ele nos dá:

$$\tau = \ell sen\theta P = m\ell g sen\theta.$$

O momentum angular do pêndulo é, relativamente a *O*, e na posição da figura:

$$\vec{L} = \vec{\ell} \times \vec{p} = m\vec{\ell} \times \vec{v}.$$

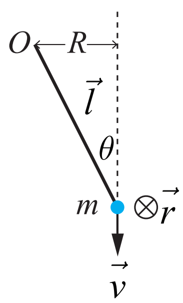


Figura 32.2 – Partícula em queda livre.

O sentido do momentum angular depende do sentido do produto vetorial. Assim, se o pêndulo está subindo, o produto vetorial terá sentido para fora da folha de papel e o momentum angular terá o sentido oposto (para fora do papel) ao do eixo escolhido anteriormente. Se, por outro lado, o pêndulo estiver descendo, o sentido do produto vetorial será para dentro da folha e o momentum angular será positivo. Então, temos:

$$L = \pm m\ell sen(\pi/2)v = \pm m\ell v.$$

A derivada em relação ao tempo do momento angular é:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \pm m\ell a = \pm m\ell g sen\theta.$$

ATIVIDADE 32.1 – PARTÍCULA EM QUEDA LIVRE

A Figura 32.2 mostra uma partícula em queda livre. Calcule o torque exercido sobre ela pelo seu peso e também o seu momentum angular em relação ao ponto *O*.

32.2 MOMENTUM ANGULAR RELATIVO A UM EIXO

A Figura 32.3a mostra uma partícula de massa m que descreve um movimento circular uniforme em torno de um eixo Oz, com velocidade angular ω. O momentum angular dessa partícula, relativo ao ponto *O*, é $\vec{l}$, mostrado na figura. Nota-se que ele não aponta para o centro da trajetória circular, tendo inclinação θ.

O vetor momentum angular também é perpendicular ao plano contendo $\vec{r}$ e $\vec{v}$, mas **não** é paralelo a $\vec{\omega}$. Isso decorre do fato de que, como a partícula se move em um círculo, sobre ela existe uma força resultante centrípeta (mostrada na Figura 32.2b), e esta exerce um torque sobre a partícula (relativo a *O*). O torque modifica a direção do momentum angular, isto é, obriga a componente do momentum angular a variar em direção, rodando em torno do eixo Oz. Assim, o vetor $\vec{l}$ descreve um cone de abertura $(90^{\circ}-\theta)$ em torno do eixo Oz.

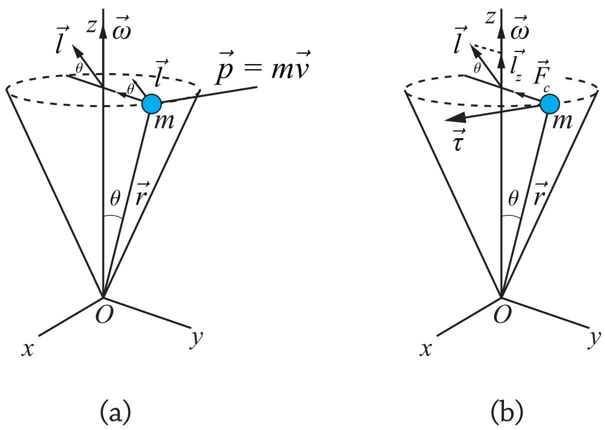


Figura 32.2 – (a) O momentum angular de uma partícula que circula em torno de um eixo OZ; (b) o torque devido à força centrípeda que atua sobre a partícula.

O momentum angular da partícula, relativo a *O*, é, em módulo:

$$l = mr^2\omega sen\theta.$$

Sua componente perpendicular ao eixo é:

$$l_{\perp} = -mr^2\omega sen\theta cos\theta;$$

e sua componente sobre o eixo Oz é:

$$l_z = l sen\theta = m\omega r^2 sen^2\theta.$$

Mas $r sen\theta = \rho$, raio do círculo descrito pela partícula. Portanto:

$$l_z = m\rho^2\omega.$$

Como $I = m\rho^2$ é o momento de inércia da partícula relativamente ao eixo Oz, podemos escrever:

$$l_z = I\omega.$$

É importante notar que essa relação **só vale para os módulos** da componente do vetor momentum angular paralela ao eixo Oz e da velocidade angular; o vetor $\vec{l}$ *não* é igual ao vetor $I\vec{\omega}$ porque $\vec{l}$ e $\vec{\omega}$ não possuem a mesma direção.

Se escolhermos como referência o ponto do eixo, situado no plano da órbita da partícula, o vetor $\vec{l}$ é paralelo a $\vec{\omega}$; não há mais o torque da força centrípeta sobre a partícula (notemos que tanto o torque quanto o momentum angular dependem de um ponto de referência). O momentum angular da partícula relativo a esse ponto (diferente de *O*) é $\vec{l}_z = m\vec{\rho}\times\vec{v}$, em que $\vec{\rho}$ **é o vetor-posição da partícula em relação ao centro da trajetória circular**. Nesse caso, os vetores momentum angular e velocidade angular são paralelos e podemos escrever a relação vetorial $\vec{l}_z = I\vec{\omega}_z$ para eles. A esse vetor momentum angular,

$$\vec{l}_z = m\vec{\rho}\times\vec{v},$$

em que ρ é a distância perpendicular da partícula ao eixo, damos o nome de momentum angular da partícula **relativamente ao eixo** Oz.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 32.1 – Partícula em queda livre

Em relação a *O*, temos, com $P = mg$, peso da partícula:

$$\vec{\tau} = \vec{\ell}\times\vec{P} \qquad\qquad \vec{L} = \vec{\ell}\times m\vec{v}.$$

Tomando um eixo perpendicular à folha de papel e com sentido positivo para dentro, tem-se que:

$$\tau = \ell P sen\theta = (\ell sen\theta)P = RP \qquad\qquad L = m(\ell sen\theta)v = mRv,$$

em que foi feito $\ell sen\theta = R$, pois essa grandeza é constante durante o movimento porque é a projeção de ℓ sobre a perpendicular à trajetória da partícula. Obviamente:

$$\frac{dL}{dt} = mR\frac{dv}{dt} = mRg = RP.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Um carro de Fórmula 1 passa a 320 *km/h* em uma reta na frente de sua equipe que se encontra a 30 *m* na lateral da pista. Calcule o momento angular do piloto em relação à equipe.

E2. Uma esfera de massa 3 *kg* em movimento circular gira em um raio de 5 *m* com frequência igual a 5 *Hz*. Depois de um giro, sua frequência passa a ser 3 *Hz*. Qual foi o torque feito sobre essa esfera?

E3. Calcule as componentes l_x, l_y, l_z do momentum angular em função das componentes da velocidade v_x, v_y, v_z de uma partícula de massa m cuja posição em relação ao ponto de origem é dada por x, y e z.

E4. Uma partícula de 500 *g* encontra-se na posição $x = 1$ *cm* e $y = 1$ *cm*. Sabendo que uma força $F = \hat{i} + \hat{j}$ está atuando sobre a partícula, determine:

a) o momentum angular se a partícula possui velocidade dada por $v = \hat{i} + \hat{j}$;

b) o momentum angular se a partícula possui velocidade dada por $v = \hat{i} - 3\hat{j}$;

c) o torque se a partícula mudar sua velocidade da situação descrita em *a* para a situação descrita em *b*.

E5. Uma partícula de massa 2 *kg* move-se como na Figura 32.3a com $r = 0{,}5$ *m* e $v = 5$ *m/s*.

a) Faça um desenho mostrando a direção e o sentido do momentum angular em quatro posições diferentes, sendo a diferença entre elas de 90°.

b) Calcule o módulo do momentum angular para os casos mostrados.

AULA 33

Momentum angular de um sistema de partículas

Objetivos

- Definir o momentum angular de um sistema de partículas;
- Discutir a conservação do momentum angular.

33.1 MOMENTUM ANGULAR DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

Considere agora um sistema de partículas. Definimos o **momentum angular** desse sistema como:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i, \tag{33.1}$$

isto é, a soma dos momenta angulares de cada uma das partículas do sistema. A derivada dessa equação em relação ao tempo nos dá:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i,$$

em que $\vec{\tau}_i$ é o torque resultante das forças que atuam na partícula i. Essas forças podem ser de dois tipos: externas ou internas ao sistema.

A terceira lei de Newton nos diz que os módulos das forças de ação e reação que atuam entre duas partículas são iguais, suas direções são as mesmas e seus sentidos, opostos. Entretanto, mesma direção não quer dizer mesma linha de ação (linha que une as duas partículas). Isso significa que, embora as forças se anulem quando aplicadas no sistema, seus torques só se anularão se as suas linhas de ação coincidirem com a linha que une as duas partículas que se interagem. A suposição de que isso ocorre é conhecida como a forma forte da terceira lei de Newton (veja a Aula 13).

Na forma forte da terceira lei, tanto a soma das forças internas que atuam no sistema quanto a soma dos torques delas vão se anular. Então, o momento resultante que atua no sistema é devido apenas às forças externas. Assim, a equação 33.1 fica:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{\,e}, \tag{33.2}$$

sendo $\vec{\tau}_i^{\,e}$ o torque resultante externo sobre a partícula i.

A relação dada pela equação 33.2 foi deduzida supondo que o ponto *O* fosse um referencial inercial. Em geral, quando medimos o momentum angular e o torque em relação a um ponto qualquer, essa equação não é válida; entretanto **ela vale sempre que o ponto *O* coincide com o centro de massa do corpo**. Essa propriedade, aliás, é mais uma das características do centro de massa, que o tornam um ponto especial. Sua demonstração necessita de conceitos mais avançados e, por isso, não será estudada aqui.

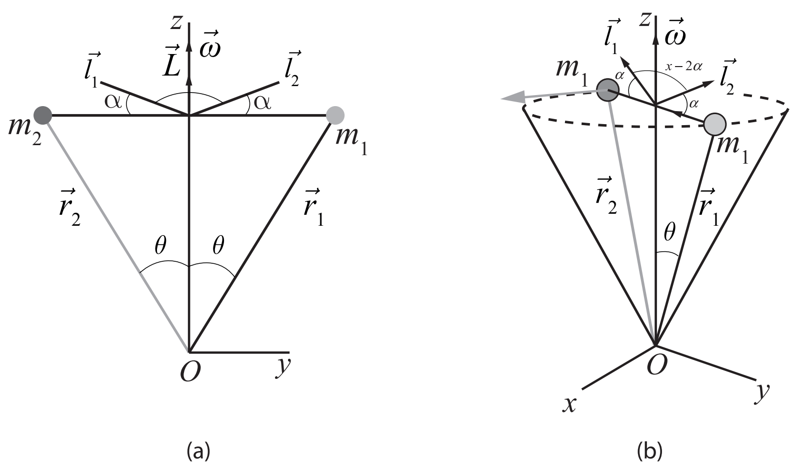


Figura 33.1 – (a) Momentum angular de um sistema de duas partículas; (b) visão de perfil.

Consideremos as partículas de mesma massa da configuração da Figura 33.1, chamando-as de massas m_1 e m_2 (embora elas tenham a mesma massa). As partículas têm o mesmo movimento e estão sempre diametralmente opostas, relativamente ao eixo, conforme está mostrado na Figura 33.1a.

O momentum angular em relação a *O* da segunda partícula ($\vec{l}_2$) será igual ao da primeira partícula ($\vec{l}_1$) em módulo e fará o mesmo ângulo θ com o eixo *Oz*, mas sua orientação será diferente porque a velocidade da partícula m_2 terá sempre direção oposta à da m_1. Como as partículas estão diametralmente opostas em relação a *Oz*, $\vec{l}_1$, $\vec{\omega}$ e $\vec{l}_2$, estão no mesmo plano vertical (veja a visão de perfil da Figura 33.1b).

Consideremos, então, **o sistema formado pelas duas partículas**. O momentum angular total do sistema é:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2.$$

Sua direção coincide com a do eixo *Oz* (portanto, na direção de $\vec{\omega}$) e seu módulo é constante. Isso é verdade **para qualquer que seja o referencial (*O*) escolhido sobre o eixo *Oz***.

A razão pela qual o momentum angular agora é constante e paralelo à velocidade angular, diferentemente do caso de uma partícula, é que, no caso do sistema acima, as massas são iguais e são simetricamente distribuídas em relação ao eixo de rotação; a componente do momentum angular total, perpendicular ao eixo de rotação, se anula.

33.2 MOMENTUM ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

Podemos estender a discussão acima para um corpo rígido, pois ele é composto de um grande número de partículas. Se o corpo tiver **simetria de massa** relativamente a um eixo de rotação, os vetores momentum angular e velocidade angular de rotação serão paralelos. Para um corpo rígido homogêneo, a simetria de massa se transforma em simetria geométrica. Para esse corpo rígido podemos escrever:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \tag{33.3}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}, \tag{33.4}$$

em que I é o momento de inércia relativo ao eixo de rotação. Dizemos que o corpo está **dinâmicamente balanceado**: ele gira em torno do eixo, que é fixo no espaço, com velocidade constante, sem que seja necessário aplicar um torque externo sobre ele. Nesse caso, o centro de massa do corpo deve estar contido no eixo de rotação.

O balanceamento é muito importante na prática. A roda de um automóvel, por exemplo, deve ser balanceada com a aplicação de pesos sobre seu aro, caso contrário haverá um torque resultante agindo sobre o seu eixo de rotação, que é transmitido aos pontos de sustentação do eixo, provocando desgaste das peças.

Podemos nos perguntar se um corpo que não possui simetria de massa pode ter um eixo de rotação balanceado. Embora a discussão anterior possa dar a entender que não, isso pode acontecer. Na verdade, o estudo mais avançado do problema mostra que qualquer corpo tem três eixos que passam pelo seu centro de massa e são eixos balanceados. Na linguagem mais avançada, esses eixos são chamados **eixos principais de inércia** e são perpendiculares entre si. Qualquer corpo, posto a girar em torno de um deles, terá movimento de rotação uniforme (velocidade angular constante) se não forem aplicados torques externos sobre ele. Na prática, entretanto, costumamos trabalhar sempre com corpos com figuras geométricas simétricas, que tornam mais fácil efetuar o balanceamento no caso de eles não possuírem simetria de massa.

Exemplo 33.1

Na seção 29.2, foi determinada a aceleracão dos pesos na máquina de Atwood com roldana giratória através da aplicação da segunda lei de Newton. Vamos agora resolver o problema com a equação 33.4.

Seja o centro de massa da roldana o ponto de referência para o momentum angular (como a roldana é suposta homogênea, o seu centro geométrico é também centro de massa). O torque das forças externas atuando sobre o sistema é:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times (m_2\,\vec{g}) + \vec{R} \times (m_1\,\vec{g}).$$

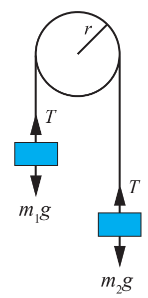


Figura 33.2 – Máquina de Atwood com roldana giratória.

Escolhendo para o torque o sentido positivo como sendo o que entra no papel, temos, com a projeção dos vetores:

$$N = m_2 gR - m_1 gR. \tag{33.5}$$

O momentum angular do sistema fica:

$$L = m_2 vR + m_1 vR + I_c \omega = m_2 vR + m_1 vR + I_c \frac{v}{R}, \tag{33.6}$$

em que I_c é o momento de inércia da roladana relativo ao seu centro de massa e v é a velocidade das massas. O sentido positivo do momentum angular foi escolhido igual ao do torque.

Derivando a equação 33.6 em relação ao tempo, temos:

$$\frac{dL}{dt} = m_2 R\frac{dv}{dt} + m_1 R\frac{dv}{dt} + \frac{I_c}{R}\frac{dv}{dt}.$$

Igualando a derivada do momentum angular ao torque e simplificando o fator R , obtemos:

$$(m_2 - m_1)g = \left(m_1 + m_2 + \frac{I_c}{R^2}\right)\frac{dv}{dt};$$

ou:

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I_c / R^2}g.$$

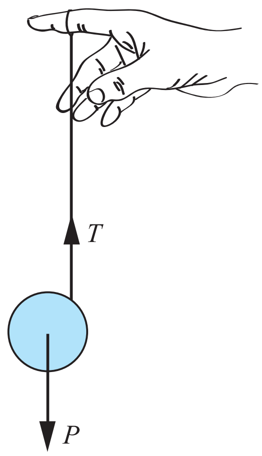


Figura 33.3 – O ioiô movendo-se na vertical.

Exemplo 33.2

Deixa-se cair um ioiô na forma de um disco de massa m e raio R a partir do repouso (Figura 33.3). À medida que cai, ele se desenrola. Ache a aceleração do ioiô usando a equação 33.4.

As forças que atuam no ioiô são a tensão na corda e o seu peso. Vamos tomar um referencial O coincidindo com a mão que segura o ioiô e um sentido positivo para o torque e momentum angular para fora da folha de papel. A força que produz o torque no ioiô em relação ao centro de massa é a tensão (o peso está aplicado nele). Então:

$$\tau = RT\,sen(\pi/2) = RT.$$

O momentum angular do ioiô relativo ao centro de massa é:

$$L = I_c \omega = I_c \frac{v}{R},$$

em que $I_c = MR^2 / 2$ é o momento de inércia do ioiô relativo ao centro de massa.

Derivando essa expressão em relação ao tempo:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{I_c}{R}\frac{dv}{dt}.$$

Igualando o torque à derivada do momentum angular:

$$RT = \frac{I_c}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{I_c}{R}a, \qquad (33.7)$$

em que a é a aceleração linear do centro de massa.

A tensão na corda é obtida aplicando a segunda lei de Newton para o centro de massa do ioiô. Temos, com um eixo vertical com sentido positivo para cima:

$$T - mg = -ma,$$

de onde tiramos:

$$T = mg - ma.$$

Levando o valor da tensão na equação 33.7, vem:

$$(mg - ma) = \frac{I_c}{R^2}a.$$

Resolvendo essa equação para a, obtemos:

$$(m + \frac{1}{2}m)a = mg,$$

ou:

$$a = \frac{m}{m + m/2}g = \frac{2}{3}g.$$

ATIVIDADE 33.1 – ESFERA EM PLANO INCLINADO

Uma esfera de massa M e raio R rola sem deslizar sobre um plano com inclinação θ. Calcule a aceleração da esfera usando a equação 33.4.

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 33.1 – Esfera em plano inclinado

Sobre a esfera atuam o peso, a reação normal do plano (que não exercem torque sobre ela) e a força de atrito (f_a) entre ela e o plano. O torque dessa força, em relação ao centro de massa da esfera, é:

$$\tau = R f_a, \qquad (33.8)$$

em que a última igualdade decorre do fato de haver rolamento sem deslizamento.

O momentum angular da esfera em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu centro de massa é:

$$L = I\omega = I\frac{v}{R}.$$

E sua derivada em relação ao tempo é:

$$\frac{dL}{dt} = I\alpha = I\frac{a}{R},$$

em que o sentido positivo para o torque e para o momentum angular foi escolhido para dentro da folha. Então:

$$R f_a = I\frac{a}{R}.$$

Da segunda lei de Newton, temos para a força de atrito:

$$mg\,sen\theta - f_a = ma \qquad \rightarrow \qquad f_a = m(g\,sen\theta - a).$$

Com esse valor da força de atrito levado na equação 33.8, obtemos:

$$mgR\,sen\theta - maR = I\frac{a}{R};$$

que, resolvida para a, nos dá:

$$a = \frac{1}{1+(I/MR^2)} g\,sen\theta.$$

Com $I = (2/5)MR^2$ obtemos:

$$a = \frac{5}{7} g\,sen\theta.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Calcule o momentum angular de um sistema que possui três esferas de massas m_1, m_2, m_3 que se localizam às respectivas distâncias l_1, l_2, l_3 de um centro comum e possuem velocidades lineares v.

E2. Uma haste fina com 1,5 *m* de comprimento e massa 400 *g* gira com velocidade $\omega = 2{,}0$ *rad/s*. Qual é o momento angular do sistema? Defina um sentido de rotação e explique a diferença se a haste estiver girando no sentido contrário.

E3. Um anel de massa m e raio R gira em torno do seu centro com velocidade angular ω.

a) Calcule o momentum angular do anel.

b) No lugar do anel, é posto um disco para girar, também em torno de seu centro, com as mesmas características (massa, raio e velocidade angular). Calcule o momentum angular do disco e compare com o item "a" dizendo se fisicamente os resultados têm sentido. (Por exemplo: qual objeto deve possuir maior momentum angular? Por quê?)

E4. Um disco de massa M e raio r que está preso pelo seu centro sofre a ação de uma força $\vec{F}$ que atua em sua periferia. Qual é a aceleração angular resultante? Resolva através da equação 33.4.

E5. Um anel rola para cima em um plano inclinado ε. Calcule a aceleração do centro de massa do anel usando a equação 33.4.

AULA 34

Conservação do momentum angular

Objetivos

- Aplicar a conservação do momentum angular;
- Descrever o movimento do pião (precessão e nutação).

34.1 CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM ANGULAR DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

De acordo com a equação

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_e, \tag{34.1}$$

se a soma dos torques externos que atuam em um sistema de partículas for nula, o momentum angular desse sistema se conserva. Para um sistema constituído por um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo z, o momentum angular se escreve:

$$L_z = I_z \omega. \tag{34.2}$$

Se não há torque externo, L_z deve permanecer constante.

É possível, entretanto, que o momento de inércia do corpo em relação ao eixo varie devido a um rearranjo das partes do corpo. Nesse caso, como o momentum angular é constante, a velocidade angular de rotação do corpo deve variar.

A equação 34.2 não só vale para um eixo fixo no espaço, mas também para um eixo que passa pelo centro de massa do corpo e permanece com direção fixa no espaço, como pode ser visto na Figura 34.1.

A conservação do momentum angular é muito usada por acrobatas e mergulhadores de competição. Eles mudam seu momento de inércia aproximando e afastando os seus braços e pernas do tronco; com isso, variam a velocidade angular de rotação com que giram em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa.

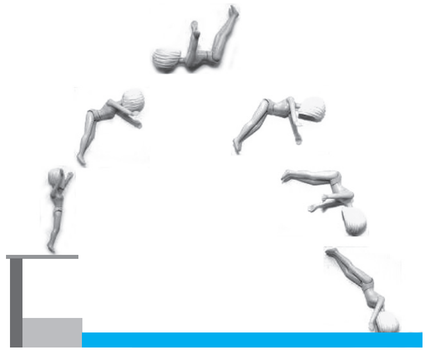


Figura 34.1 – O momento angular da mergulhadora permanece constante, apesar do seu momento de inércia mudar à medida que ela realiza o salto.

ATIVIDADE 34.1

Sente em um banco ou uma cadeira (de escritório, por exemplo) que possa girar. Faça o banco ou a cadeira girar. Durante o movimento abra e feche os braços. O que acontece? Segure pesos de ginástica nas duas mãos e o resultado ficará mais evidente.

Exemplo 34.1

Sob determinadas condições, uma estrela pode sofrer um colapso gravitacional e se transformar num objeto extremamente denso, constituído essencialmente por nêutrons, conhecido pelo nome de estrela de nêutrons. A densidade dela é cerca de 10^{14} vezes maior que a da matéria normalmente encontrada na Terra. Suponhamos que a estrela tenha uma forma esférica maciça e homogênea antes e depois do colapso, que seu raio inicial seja de $7{,}0\times10^5\,km$ (raio igual ao do Sol) e que o seu raio final seja de 16 km. Se o período de rotação da estrela antes do colapso era de 30 dias, qual é a velocidade angular da estrela de nêutrons?

Solução

O momento de inércia de uma esfera relativo a um eixo que passa pelo seu centro de massa é $I=(2/5)MR^2$. Como não há torque externo, o momentum angular se conserva e temos:

$$I_e\omega_e = I_n\omega_n,$$

em que os índices referem-se à estrela normal (e) e de nêutrons (n). A velocidade angular de rotação da estrela normal é:

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ rad}{30\ dia\times 86.400\ s/dia} = 2{,}4\times10^{-6}\ rad/s,$$

em que T é o período de rotação da estrela. Então:

$$\omega_n = \frac{I_e}{I_n}\omega_e = \left(\frac{R_e}{R_n}\right)^2\omega_e = \left(\frac{7{,}0\times10^5}{16}\right)^2\times 2{,}4\times10^{-6} = 4{,}6\times10^3\ rad/s.$$

ATIVIDADE 34.2

Uma patinadora gira com velocidade angular $\omega = 20\ rad/s$ e tem momento de inércia $I_{pi} = 1{,}9\ kg.m^2$ quando está com seus braços abertos. Ao fechar os braços, seu momento de inércia passa a ser $I_{pf} = 1{,}2\ kg.m^2$. Qual é a nova velocidade angular da patinadora?

Exemplo 34.2

Uma barra fina está em repouso na vertical sobre uma mesa horizontal sem atrito. Ela tem massa M e pode se mover livremente sobre a mesa. Um pequeno disco de massa m e velocidade v movendo-se perpendicularmente à barra choca-se elasticamente com ela em um ponto a uma distância d do centro da barra (Figura 34.2). Qual deve ser a massa do disco para que, logo após a colisão, o disco fique em repouso?

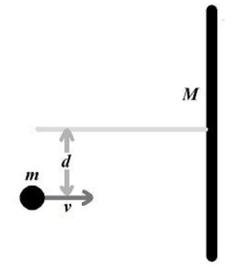


Figura 34.2 – Colisão com barra fina sobre a mesa (sem atrito).

Solução

Como não há atrito e a colisão é elástica, o momentum linear, o momentum angular e a energia do sistema disco + barra se conservam. Depois da colisão, o disco para e o centro de massa da barra adquire uma velocidade V, ao mesmo tempo que adquire também uma rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa. Seja ω a velocidade angular de rotação. Assim, com a condição do disco ficar parado depois da colisão, temos:

$$mv + 0 = 0 + MV,$$

$$mvd + 0 = 0 + I_c\,\omega,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_c\,\omega^2,$$

em que a primeira equação representa a conservação do momentum linear, a segunda, do momentum angular em relação ao centro da barra, e a terceira, a da energia. Esse é um sistema de três equações com as incógnitas V, m e ω. Da primeira equação:

$$v = \frac{M}{m}V.$$

Levando essa expressão na terceira equação, obtemos:

$$\frac{M}{m}V^2 = V^2 + \frac{I_c}{M}\omega^2.$$

Da segunda equação obtemos $\omega = \dfrac{mvd}{I} = \dfrac{MVd}{I}$, que levado na expressão acima dá:

$$\frac{M}{m}V^2 = V^2 + \frac{I_c}{M}\frac{M^2}{I_c^2}V^2 d^2;$$

ou:

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{M}{I_c}d^2,$$

equação que resolvida para m, com $I_c = ML^2/12$ (em relação ao centro da barra), nos dá:

$$m = \frac{ML^2}{12d^2 + L^2}.$$

Exemplo 34.3

Na Figura 34.3 o eixo do cilindro é fixo. O cilindro tem raio R, momento de inércia I e está inicialmente em repouso. O bloco de massa M move-se sobre a superfície horizontal sem atrito com velocidade v_1. O bloco passa então sobre o cilindro. Quando ele entra em contato com o cilindro, desliza, mas o atrito entre eles é grande e o bloco rola sem deslizar sobre ele, sendo transportado para o outro lado onde passa a ter uma velocidade v_2. Determine esta velocidade em função de v_1, M, R e I.

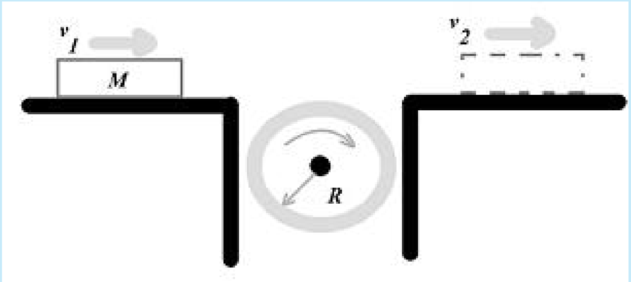


Figura 34.3 – Conservação do momentum angular.

Seja um sistema de referência com origem no centro de massa do cilindro. Como não há atrito entre o bloco e a superfície e não há deslizamento do bloco sobre o cilindro, o momentum angular do sistema relativamente ao centro de massa do cilindro se conserva. A componente vertical da distância que liga o centro de massa do cilindro ao centro de massa do bloco é constante e igual à R.

Então podemos escrever:

$$M v_1 R + 0 = M v_2 R + I\omega,$$

sendo ω a velocidade angular do cilindro, que, para que o bloco não deslize sobre o cilindro, deve ser $\omega = v_2/R$. Então:

$$M v_1 R = M v_2 R + I\frac{v_2}{R},$$

de onde tiramos:

$$v_2 = \frac{v_1}{1 + I/(M R^2)}.$$

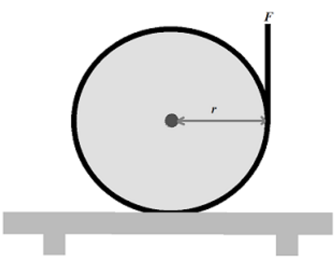


Figura 34.4 – Aro sob ação de força impulsiva.

Exemplo 34.4 – Ação de força impulsiva e a não conservação do momentum angular

Um aro homogêneo de massa M e raio r está em repouso na vertical sobre uma mesa horizontal sem atrito. Ele é então golpeado com uma força impulsiva F, tangencialmente a ele e em um ponto de sua periferia (Figura 34.4). Ache em torno de que ponto ele começa a girar.

Solução

Seja O o ponto em torno do qual ele começa a girar e ℓ a distância de O ao seu centro de massa. Como existe F, o momentum linear e o momentum angular não se conservam. Temos, então:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

em que $\vec{r}$ é o vetor-posição do ponto de aplicação da força ao ponto O, pois O pertence ao eixo de rotação.

Da primeira equação, como o aro está inicialmente em repouso, temos que:

$$Mv_0 = \int_0^t F\,dt,$$

sendo v_0 a velocidade do centro de massa do aro logo após ser golpeado.

Da segunda equação, sendo I_o o momento de inércia do aro em relação ao ponto O, temos:

$$I_o \frac{d\omega}{dt} = (\ell + R)F;$$

ou:

$$\frac{I_o}{\ell + R}\omega = \int_0^t F\,dt,$$

pois a velocidade angular de rotação do anel antes do impulso é nula.

Eliminando o impulso (integral da força) das duas equações acima, vem:

$$M\,v_0 = \frac{I_o}{\ell + R}\omega.$$

Como o aro gira em torno de O, o seu centro de massa descreve um círculo de raio ℓ em torno de O e, então:

$$v_0 = \omega\ell.$$

Então:

$$M\,\omega\ell = \frac{I_o}{\ell + R}\omega.$$

Mas, sendo I_{cm} o momento de inércia em relação ao centro de massa, temos $I_o = I_{cm} + M\,R^2 = M\,R^2 + M\,R^2 = 2M\,R^2$ (Propriedade 2 da Aula 28). Logo:

$$M\,\ell(\ell + R) = 2M\,R^2,$$

ou:

$$\ell^2 + \ell R - 2R^2 = 0.$$

A solução dessa equação do segundo grau para ℓ nos dá duas raízes: $\ell = R$ e $\ell = -2R$. Como ℓ não pode ser negativo, a solução que satisfaz é $\ell = R$. Portanto, ao ser golpeado, o aro gira em torno do ponto oposto ao do golpe relativamente ao centro de massa.

ATIVIDADE 34.3

No lugar do aro do exemplo 34.4 é colocado um disco maciço. Encontre o ponto em torno do qual o disco vai girar se for golpeado pela mesma força impulsiva F .

34.2 O PIÃO SIMÉTRICO

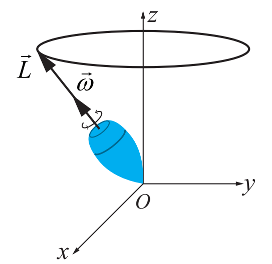


Figura 34.5 – O pião simétrico.

A Figura 34.5 mostra um pião homogêneo e simétrico em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa e que gira em torno dele com uma velocidade angular $\vec{\omega}$ (dirigida ao longo de seu eixo de rotação). A ponta do pião está sobre uma superfície horizontal. A experiência mostra que o eixo do pião se move em torno da vertical descrevendo um cone. Por causa da rotação, o pião possui um momentum angular $\vec{L}$ cuja direção coincide com a do eixo de rotação.

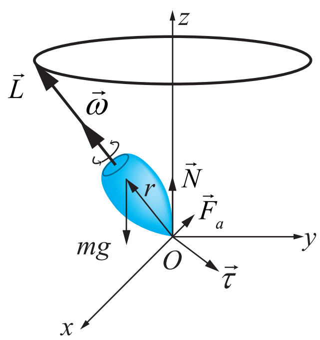


Figura 34.6 – Forças que atuam no pião.

Na Figura 34.6 são mostradas as forças que atuam no pião são o seu peso, a reação normal da superfície sobre a qual ele se apoia e a força de atrito entre essa superfície e a ponta do pião (Figura 34.6). O peso é equilibrado pela reação normal, e a força de atrito causa a força centrípeta que faz o eixo do pião ter o movimento circular em torno da vertical.

Em relação ao ponto de contato (*O*) dele com a superfície, apenas o peso produz um torque sobre o pião. Esse vale:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times mg,$$

em que $\vec{r}$ é o vetor-posição do centro de massa do pião relativamente a *O*. O torque é perpendicular ao plano que contém $\vec{r}$ e *mg*. Ao atuar sobre o pião, o torque produz a variação do seu momentum angular de acordo com a relação:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Essa equação mostra que a variação do vetor momentum angular $d\vec{L}$ deve ter a mesma direção e sentido que o torque $\vec{\tau}$; por isso, $d\vec{L}$ deve ser perpendicular ao vetor $\vec{L}$ (Figura 34.7).

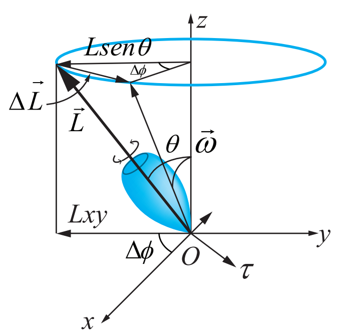


Figura 34.7 – Variação do momentum angular do pião. Lembrando que são mostradas as variações e que, quando estas tendem ao infinito, se transformam em infinitesimais.

Considere o movimento do pião durante o intervalo de tempo *dt*. Nesse intervalo, o torque produz uma variação do momentum angular dada por $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ e no fim do intervalo *dt* o momentum angular é a soma de $\vec{L}$ mais $d\vec{L}$. Como $d\vec{L}$ é perpendicular a $\vec{L}$ e é pequeno em relação a $\vec{L}$ (pois *dt* é pequeno), podemos dizer que o momentum angular sofre apenas variação de direção. A ponta do vetor $\vec{L}$ descreve um círculo em torno do eixo de rotação do pião, enquanto o vetor $\vec{L}$ precessa em torno do eixo vertical, descrevendo um cone de eixo coincidente com o eixo vertical.

A **velocidade angular de precessão** Ω é a velocidade com que o vetor $\vec{L}$ se move em torno do eixo vertical. Ela é dada por $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$, sendo ϕ o ângulo que a projeção de $\vec{L}$ sobre o plano *xy* faz com o eixo *Ox* (Figura 34.7).

Como $dL = \tau dt$, temos que:

$$d\phi = \frac{dL}{Lsen\theta} = \frac{\tau dt}{Lsen\theta}.$$

Como $\tau = mgrsen\theta$ e $L = I\omega$:

$$\Omega = \frac{\tau}{Lsen\theta} = \frac{mgrsen\theta}{Lsen\theta} = \frac{mgr}{I\omega}, \tag{34.3}$$

mostrando que a velocidade angular de precessão é inversamente proporcional à velocidade angular de rotação do pião. Ela independe também da inclinação θ do pião em relação à vertical.

ATIVIDADE 34.4 – A PRECESSÃO DE UM PIÃO SIMÉTRICO

Um pião tem a forma de um cone sólido e homogêneo, de massa $M = 60\ g$, raio da base $R = 3{,}0\ cm$ e altura $h = 8{,}0\ cm$. Ele é colocado para girar com uma velocidade de 24 rotações por segundo. Determine sua velocidade de precessão.

A suposição de que $L = I\omega$, feita ao deduzirmos a equação 34.3, implica que o pião tem como único movimento o de rotação em torno de seu eixo, que fica fixo no espaço. Entretanto, quando $\theta \neq 0$, ele nunca fica parado. Portanto, ao mudar sua direção no espaço, o eixo do pião contribui com uma componente adicional ao momentum angular. Se, entretanto, o pião gira muito rapidamente em torno do seu eixo, a componente do momentum angular devida a esse movimento é muito maior que a do movimento do eixo, e o momentum angular $\vec{L}$ será praticamente paralelo ao eixo. A equação 34.3 pressupõe isso. O caso geral é muito complicado para ser discutido aqui.

O centro de massa do pião se move com uma aceleração centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(\Omega rsen\theta)^2}{rsen\theta} = \Omega^2 rsen\theta,$$

e a força responsável por ela é a força de atrito estático entre o pião e o solo, valendo:

$$F = ma_c = m\Omega^2 rsen\theta.$$

Como a reação normal da superfície sobre o pião é $N = mg$ e a força de atrito é $f_a = \mu N$, podemos escrever que $f_a \leq \mu mg$, em que μ é o coeficiente de atrito estático. Comparando as expressões da força de atrito, podemos concluir que:

$$sen\theta \leq \frac{\mu g}{\Omega^2 r}. \tag{34.4}$$

A equação acima dá o valor máximo do ângulo de inclinação do pião para ele não deslizar. Vemos que esse ângulo é função do coeficiente de atrito e, sendo esse pequeno, o pião deverá ter uma pequena inclinação para não deslizar. Dizendo de outra forma, o atrito permite, neste caso, que o pião tenha rotação pura desde que a inclinação seja pequena.

Na ausência de atrito, a ponta do pião também se moveria em um círculo e o movimento do pião seria uma combinação do movimento de translação com o de rotação. (Você pode verificar isso fazendo o pião rodar em uma placa de vidro.)

ATIVIDADE 34.5 – A ROTAÇÃO PURA DE UM PIÃO SIMÉTRICO

Na atividade 34.4, calcule o ângulo máximo de inclinação que o pião pode ter para ficar imóvel, sabendo que o coeficiente de atrito entre ele e o solo é $\mu = 0,40$.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 34.1

Quando você fecha os braços, seu momento de inércia fica menor e consequentemente pela conservação do momento angular você gira mais rápido, como é mostrado na Figura 34.8.

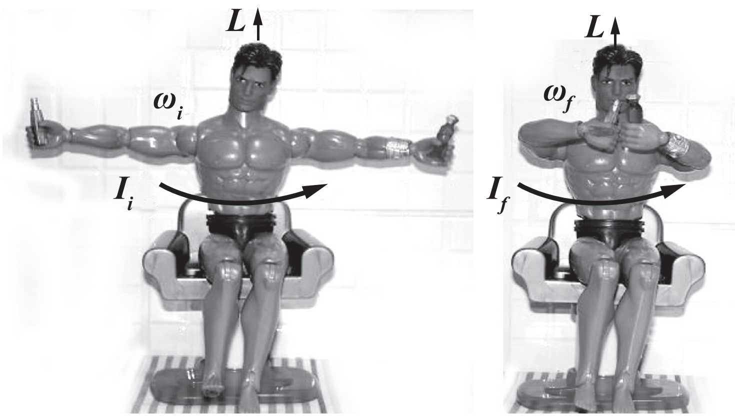


Figura 34.8 – (esquerda) Com os braços abertos o momento de inércia é maior e a velocidade angular pequena. (direita) Quando você coloca os seus braços junto ao corpo o seu momento de inércia fica menor e, portanto, por conservação do momento angular, sua velocidade angular ficará maior.

Atividade 34.2

Como não há torque externo, o momentum angular se conserva. Então escrevemos:

$$I_{pi}\omega_i = I_{pf}\omega_f,$$

sendo respectivamente I_{pi} e ω_i o momento de inércia e a velocidade angular iniciais da patinadora, e I_{pf} e ω_f o momento de inércia e a velocidade angular finais. Isolando ω_f, que é o que procuramos, temos:

$$\omega_f = \left(\frac{I_{pi}}{I_{pf}}\right)\omega_i = \left(\frac{1,9\ \ kg.m^2}{1,2\ \ kg.m^2}\right)20\ \ rad/s.$$

Então:

$$\omega_f = 32\ \ rad/s.$$

Atividade 34.3

Note que o cálculo é quase o mesmo do exemplo 34.4, sendo a única diferença o momento de inércia do disco em relação ao seu centro de massa, que é $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Dessa forma obtemos $I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$ e chegamos à equação de segundo grau para ℓ:

$$\ell^2 + \ell R - \frac{3}{2}R^2 = 0.$$

As duas raízes serão: $\ell = \left(\sqrt{7}-1\right)R$ e $\ell = -\left(\sqrt{7}+1\right)R$. Como antes, ℓ não pode ser negativo, e a solução que satisfaz é $\ell = \left(\sqrt{7}-1\right)R \cong 1,6R$. Portanto, ao ser golpeado, o disco não gira em torno do ponto oposto ao do golpe relativamente ao centro de massa, como o aro. Isso se deve ao fato de os momentos de inércia terem valores diferentes para o aro e para o disco.

Atividade 34.4 – A precessão de um pião simétrico

A velocidade angular de precessão é:

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}.$$

A velocidade angular de rotação é:

$$\omega = 2\times\pi\ \ rad\times 24\ \ s^{-1} = 1,51\times10^2\ \ rad/s.$$

O momento de inércia do pião, relativo a seu eixo de simetria, é:

$$I = \frac{3}{10}MR^2 = \frac{3\times 60,0\ \ g\times(3,0\ \ cm)^2}{10} = 1,62\times10^2\ \ g.cm^2.$$

O centro de massa do pião está situado sobre seu eixo de simetria a uma distância do vértice do cone dada por:

$$r = \frac{3}{4}h = \frac{3\times 8,0\ \ cm}{4} = 6,0\ \ cm.$$

Logo:

$$\Omega = \frac{60,0\ g \times 9,80 \times 10^2\ cm.s^{-2} \times 6,0\ cm}{1,62 \times 10^2\ g.cm^2 \times 1,51 \times 10^2\ rad/s} = 14,4\ rad/s.$$

Atividade 34.5 – A rotação pura de um pião simétrico

A inclinação máxima que o pião pode ter para ficar imóvel é dada pela equação 34.4:

$$sen\theta = \frac{\mu g}{\Omega^2 r}.$$

Com $\mu = 0,40$, $g = 9,80 \times 10^2\ cm.s^{-2}$, $r = 6,0\ cm$ e $\Omega = 14,4\ rad/s$, temos:

$$sen\theta = \frac{0,40 \times 9,80 \times 10^2\ cm.s^{-2}}{(14,4\ rad/s)^2 \times 6,0\ cm} = 0,315,$$

ou:

$$\theta = 18,^\circ 37.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. A Lua tem movimento de revolução (rotação e translação combinados) em torno da Terra, de modo que sempre mostra a mesma face para a Terra.

a) Qual é a razão entre os momenta angulares de rotação em torno do seu eixo para o de translação do seu centro de massa em torno da Terra?

b) De quanto o momentum angular de rotação deveria mudar para que pudéssemos ver toda a Lua? Supor a Lua esférica e a sua órbita em torno da Terra circular.

E2. Uma régua tem massa de 50,0 *g* e comprimento de 30,0 *cm*. Ela está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal e sofre uma força impulsiva de 2,0 N.s, perpendicular a ela e no ponto situado a 10,0 *cm* de seu centro. Ache seu movimento subsequente.

E3. Uma roda gira com velocidade de 500 *rpm*. Uma segunda roda, inicialmente em repouso, é encostada à primeira e passa a girar sempre em contato com ela. Qual é a velocidade angular resultante do sistema?

E4. Um homem está sobre uma plataforma que gira em torno do eixo vertical que passa por seu centro com uma velocidade de 1,0 rotação por segundo. Ele está com seus braços esticados e segura uma bola em cada mão. O momento de inércia total do sistema homem+bolas+plataforma vale 6,0 $kg.m^2$. Ao fazer as bolas se aproximarem do seu corpo, o homem reduz o momento de inércia total para 2,0 $kg.m^2$.

a) Qual é a nova velocidade da plataforma?

b) De quanto a energia cinética do sistema aumenta?

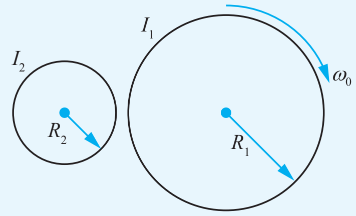
E5. Um pião está rodando com 30 rotações por segundo em torno de um eixo que faz um ângulo de 30° com a vertical. Sua massa é de 0,50 *kg* e seu momento de inércia é 5,0 x 10^{-4} *kg.m*. O centro de massa está a 4,0 *cm* da ponta do pião. Se a sua rotação se faz no sentido horário visto de cima do pião, qual é o módulo e o sentido da velocidade de precessão?

PROBLEMAS DA UNIDADE 12

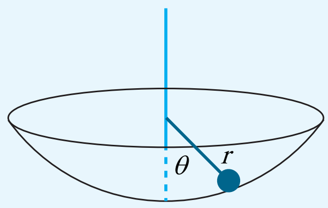
P1. Em um parque infantil há um pequeno carrossel de momento de inércia 173,0 $kg.m^2$, massa 175 *kg* e raio 1,32 *m*. O carrossel está parado quando uma criança de massa 40 *kg* corre com uma velocidade de 30 *cm/s* e salta sobre ele na tangente à borda do carrossel. Desprezando o atrito, calcule a velocidade do conjunto carrossel + criança.

P2. Uma bola de sinuca de raio *R*, inicialmente em repouso, sofre um impulso dado pelo taco, que é mantido horizontal e à distância vertical *h* do centro da bola. A velocidade da bola passa instantaneamente a valer v_0 e, eventualmente, chega a valer $(9/7)v_0$. Mostre que $h = (4/5)\,R$.

P3. Dois cilindros com raios R_1 e R_2 ($R_1 > R_2$) e momentos de inércia I_1 e I_2 são suportados por eixos fixos perpendiculares ao plano da figura abaixo. O cilindro maior inicialmente gira com velocidade ω_0. O cilindro menor é deslocado para a direita até encostar no maior e ser obrigado a girar devido à força de atrito entre eles. Eventualmente, o deslizamento desaparece e os cilindros passam a girar sem deslizar com velocidades constantes e sentidos opostos. Ache a velocidade ω_2 do cilindro menor. O momentum angular se conserva?



P4. Uma partícula é empurrada horizontalmente da parte de dentro de um hemisfério de raio r sem atrito e fixo. Determine a velocidade v_0 para que ela atinja a borda superior do hemisfério. Ache v_0 em função da posição *angular* inicial q_0 da partícula.



P5. Uma mesa giratória tem uma velocidade angular de 1 rps em torno do eixo que passa pelo seu centro. Seu momento de inércia é 1.200 $kg.m^2$. Uma criança com massa de 40 *kg*, inicialmente em repouso no centro da mesa, se desloca então radialmente sobre ela. Qual a velocidade angular da mesa quando a criança está a 2,00 *m* do centro da mesa?

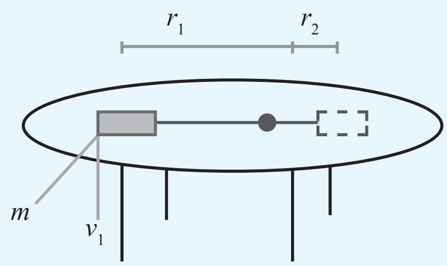
P6. Uma porta sólida de madeira de 1,0 *m* de largura, 2,0 *m* de altura e massa de 40 *kg* está articulada em um de seus lados. Inicialmente ela está aberta e em repouso. Joga-se então uma porção de lama perpendicularmente sobre ela, a qual se adere à porta. Se a massa da lama é de 0,50 *kg* e sua velocidade 12,0 *m/s*, qual é a velocidade final da porta? A lama contribui significativamente para o momento de inércia?

P7. Um pêndulo balístico é constituído por uma massa M presa na extremidade de uma barra de massa desprezível e de comprimento r. A massa é capaz de absorver uma bala. Quando essa é atirada sobre o pêndulo, ele sobe a uma altura vertical h acima de sua posição inicial.

a) Se a massa da bala é m, mostre que a velocidade angular com que o pêndulo começa a se mover após ser atingido pela bala é:

$$\omega = \sqrt{2gh(M+m)(mr^2+I)};$$

b) Seu colega diz que o momentum linear é conservado na colisão e que, por isso, $v = \sqrt{2gh}$ e $mv = (M+m)\sqrt{2gh}$, em que v é a velocidade da bala depois de penetrar no pêndulo. A partir do resultado do item anterior, mostre que esse resultado só é válido se $I = Mr^2$.



P8. Um bloco de massa m está girando sobre uma superfície horizontal em um círculo de raio r_1 e velocidade v_1. O fio que segura o bloco é puxado até que o raio do círculo seja reduzido a r_2.

a) Qual é a tensão no fio em função de r? Dê sua resposta em termos dos valores iniciais do raio e da velocidade.

b) Qual é o trabalho realizado pela tensão no deslocamento do corpo de r_1 até r_2?

UNIDADE 13
Equilíbrio de corpos rígidos

Nesta aula serão estudadas as condições de equilíbrio mecânico de um corpo rígido. É preciso lembrar, antes de qualquer coisa, que as forças que atuam em um corpo rígido são diferentes das que atuam sobre uma partícula. No caso de uma partícula, as forças podem ser deslocadas paralelamente em qualquer direção, enquanto as forças que atuam sobre um corpo rígido podem ser deslocadas somente ao longo de sua direção. Isso se deve ao fato de o movimento de rotação do corpo depender do local de aplicação da força, o que não acontece no caso de uma partícula, que, por não ter dimensão, não pode rodar.

AULA 35

As equações de equilíbrio

Objetivos

- Determinar as equações de equilíbrio para um corpo rígido;
- Aplicá-las ao caso de equilíbrio estático.

35.1 VETORES LIVRES E VETORES DESLIZANTES

Nesta aula serão estudadas as condições de equilíbrio mecânico de um corpo rígido. Antes de fazê-lo, é preciso lembrar que as forças que atuam em um corpo rígido não têm as mesmas características que as que atuam sobre uma partícula. No caso de uma partícula, as forças são **vetores livres**, podendo ser deslocadas paralelamente em qualquer direção. Já as forças que atuam sobre um corpo rígido são **vetores deslizantes** e podem ser deslocadas somente ao longo de sua direção. A razão disso é que o movimento de rotação do corpo depende de onde a força é aplicada, o que não ocorre na partícula, que não pode rodar, já que não possui dimensão.

35.2 EQUILÍBRIO ESTÁTICO DE CORPOS RÍGIDOS

Conforme estudado nas aulas anteriores, as equações que descrevem o movimento de um corpo rígido sob ação de uma resultante de forças externas $\vec{F}_e$ e de um torque externo resultante $\vec{\tau}$ (ou o torque da força externa resultante) são:

$$\vec{F}_e = m\vec{a}_{cm}, \tag{35.1}$$

$$\vec{\tau}_e = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{35.2}$$

A primeira delas se refere ao movimento de translação do centro de massa, enquanto a segunda, ao movimento de rotação do corpo em torno de um eixo que geralmente é fixo no espaço e/ou passa pelo centro de massa.

Diz-se que um corpo rígido está em equilíbrio mecânico quando, visto por um observador em um referencial inercial, são nulas tanto a aceleração linear de seu centro de massa, quanto a aceleração angular do corpo em torno de um eixo fixo nesse referencial inercial.

Essa definição não obriga que o corpo esteja em repouso em relação ao observador, mas apenas sem aceleração. Seu centro de massa pode estar se movendo com uma velocidade constante ou o corpo pode estar em rotação em torno de um eixo fixo com velocidade angular constante.

Quando o corpo está em repouso ($v_{cm} = 0$ e $\omega = 0$), o equilíbrio é chamado de **equilíbrio estático**. Nesse caso, as equações 35.1 e 35.2 ficam:

$$\vec{F}_e = 0, \tag{35.3}$$

$$\vec{\tau}_e = 0. \tag{35.4}$$

Note que o torque é sempre relativo a um ponto *O*. No caso do equilíbrio estático, a escolha desse ponto não é essencial, porque se o torque se anula para o ponto *O,* ele também se anula para qualquer outro ponto, pois a resultante de forças é nula (e seu torque, obviamente, também se anula).

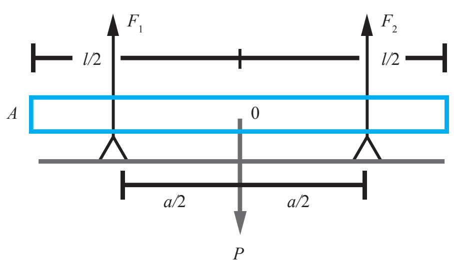


Figura 35.1 – Equlíbrio de uma tábua.

Exemplo 35.1

Para ilustrar a aplicação das equações 35.3 e 35.4, imaginemos uma tábua homogênea, de massa m e comprimento ℓ , apoiada sobre dois pontos separados entre si de uma distância a (Figura 35.1). As forças que atuam sobre ela são o seu peso $P = mg$, aplicado no seu centro de massa, e as forças F_1 e F_2 , reações dos apoios sobre a tábua. Calcule F_1 e F_2 .

Solução

Escolhendo um eixo vertical com sentido para cima, tem-se, da equação 35.3:

$$F_1 + F_2 - mg = 0. \tag{35.5}$$

Para aplicar a equação 35.4, você deve escolher primeiramente um ponto em relação ao qual você irá calcular o torque das forças. Como já foi visto, esse ponto pode ser qualquer e a sua escolha é feita de modo a simplificar o problema. Escolha o centro de massa (*O*) que, como a tábua é homogênea, está situado no seu ponto médio. Escolha um eixo com sentido positivo para dentro da folha de papel, tal que, projetando os vetores torque sobre esse eixo:

$$\left(\frac{a}{2}\right) \times F_1 + 0 \times mg - \left(\frac{a}{2}\right) \times F_2 = 0 \tag{35.6}$$

De 35.5 e 35.6, vem:

$$F_1 = F_2 = \frac{mg}{2}.$$

ATIVIDADE 35.1 – EQUILÍBRIO DE UMA TÁBUA

Calcule as reações do suporte da tábua do exemplo 35.1 tomando como origem o ponto A na extremidade esquerda da tábua.

Exemplo 35.2

Uma escada com peso $w = 30\ N$ e comprimento $c = 3{,}0\ m$ apoia-se sobre um ponto na parede a uma altura $a = 2{,}4\ m$ do solo. O centro de massa da escada está situado a $0{,}8\ m$ do solo. Um homem pesando $W = 80\ N$ sobe até a metade da escada. Supondo que não há atrito entre a parede e a escada, ache as forças que atuam sobre o conjunto homem + escada.

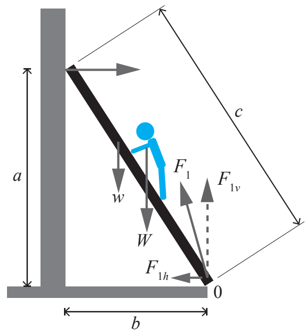


Figura 35.2 – Equlíbrio de uma escada.

Solução

As forças que atuam na escada são mostradas na figura. W é o peso do homem, w o da escada. A força F_1 é exercida pelo solo sobre a escada; suas componentes são F_{1h} (horizontal) e F_{1v} (vertical). F_{1h} é devida ao atrito entre o solo e a escada. A parede, sendo sem atrito, só pode exercer a força de reação normal F_2 sobre a escada.

A distância horizontal b do contato da escada com o solo até a parede é:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = 1{,}8\ m.$$

Seja um sistema de coordenadas com origem no ponto de contato da escada com o solo (ponto O). O eixo Oy é vertical e de sentido para cima, e o eixo Ox é paralelo ao solo com sentido positivo para a parede. A linha de ação de W intercepta os eixos x e y em dois pontos (x_0 e y_0), cujas distâncias ao ponto de contato com o solo podem ser calculadas da seguinte maneira: a inclinação (θ) da escada relativamente ao solo é:

$$tg\theta = \frac{a}{b} = tg\left(\frac{2,40\ m}{1,80\ m}\right) = 1,33 \qquad \rightarrow \qquad \theta = 53,^\circ 13.$$

Como o homem subiu até a metade da escada, percorreu uma distância $\ell = 1,5\ m$ sobre ela. Assim temos:

$$x_0 = \ell cos\theta = 1{,}5\ m \times cos(53,^\circ 13) = 0,90\ m,$$

$$y_0 = \ell sen\theta = 1{,}5\ m \times sen(53,^\circ 13) = 1,20\ m.$$

O centro de massa da escada está a 0,80 m do chão. Dessa forma o braço do torque (chamemos de b_0) causado pela escada será:

$$b_0 = 0{,}80\ m \times cos(53,^\circ 13) = 0,48\ m.$$

A equação 35.1 dá:

$$F_{1h} - F_2 = 0 \text{ (componente horizontal)}, \quad (35.7)$$

$$F_{1v} - W - w = 0 \text{ (componente vertical)}. \quad (35.8)$$

Para o equilíbrio rotacional, escolhendo a origem no ponto O e o eixo perpendicular ao plano do papel e com sentido positivo entrando nele, temos:

$$F_2 a - W x_0 - w b_0 = 0. \quad (35.9)$$

Com os dados, temos:

$$F_2 \times 2,4\ m - 80\ N \times 0,90\ m - 30\ N \times 0,48\ m = 0;$$

de onde vem que:

$$F_2 = 36\ N.$$

Das equações 35.7 e 35.8, obtemos:

$$F_{1h} = F_2 = 36\ N,$$

$$F_{1v} = 80\ N + 30\ N = 1,10 \times 10^2\ N.$$

ATIVIDADE 35.2 – ALTURA MÁXIMA NA ESCADA

Se o coeficiente de atrito estático entre a escada e o solo é $\mu = 0,40$, qual é a altura máxima que o homem pode subir antes que a escada deslize?

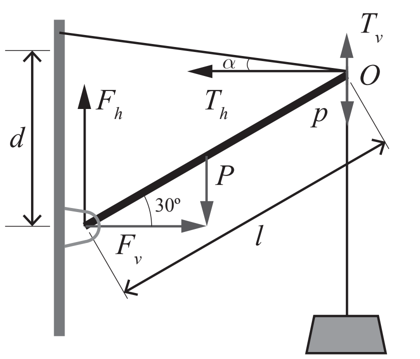


Figura 35.3 – Equlíbrio de um guindaste.

Exemplo 35.3

A Figura 35.3 mostra um guindaste constituído por uma barra de peso $W = 150\ N$ e comprimento $\ell = 3,3\ m$, preso a uma parede por um cabo de aço que, por sua vez, está preso a um ponto situado a uma distância vertical $d = 2,0\ m$ acima de uma dobradiça. A barra está inclinada a um ângulo de 30° e suporta um peso $w = 100\ N$. Calcule a tensão no cabo e a força que a dobradiça exerce sobre a barra.

Solução

As forças que atuam sobre a barra já estão mostradas na Figura 35.3. O cabo, ao puxar a barra, faz um ângulo α com a horizontal, de modo que a tensão nele tem componentes horizontal (T_h) e vertical (T_v). A força F que a dobradiça faz sobre a barra também tem componentes horizontal (F_h) e vertical (F_v). O peso W da barra está aplicado no centro de massa e o cabo transmite o peso w do bloco para a extremidade da barra.

Escolhendo um sistema de coordenadas com origem no ponto *O*, extremidade da barra não ligada à parede, com eixo *Ox* positivo para a direita e eixo *Oy* positivo para cima, temos para o equilíbrio de translação:

$$F_v + T_v - W - w = 0 \text{ (componente vertical),} \qquad (35.10)$$

$$F_h - T_h = 0 \text{ (componente horizontal).} \qquad (35.11)$$

Escolhendo um eixo passando por *O*, perpendicular ao plano do papel e entrando nele, temos, para o equilíbrio rotacional:

$$(\ell cos30^\circ)F_v - (\ell sen30^\circ)F_h - \frac{1}{2}(\ell cos30^\circ)W = 0.$$

Nossas incógnitas são T_h, T_v, F_h F_v. Da equacão 35.10 temos:

$$F_v + T_v = W + w = 250\ N. \qquad (35.12)$$

Da equação do equilíbrio rotacional vem:

$$(3,3\ m \times 0,866)F_v = (3,3\ m \times 0,500)F_h + 0,500 \times (3,3\ m \times 0,866) \times 250\ N,$$

ou:

$$F_v = 0,577F_h + 125\ N. \qquad (35.13)$$

Lembrando que temos quatro incógnitas, mas apenas três equações (duas para o equilíbrio translacional e uma para o equilíbrio rotacional), precisamos encontrar uma quarta equação para resolver o problema. Essa equação é consequência do fato de que $\vec{T}_h$ e $\vec{T}_v$ somam-se para dar o vetor $\vec{T}$, cuja direção é a do cabo. Assim, nossa quarta equação é:

$$T_v = T_h tg\alpha.$$

Mas:

$$tg\alpha = \frac{d - \ell sen30^\circ}{\ell cos30^\circ}.$$

Ou:

$$T_v = T_h\left(\frac{2,0\ m - (3,3\ m \times 0,500)}{3,3\ m \times 0,866}\right) = 0,122T_h.$$

Levando esse valor em 35.12, temos:

$$F_v = 250\ N - 0,122T_h. \qquad (35.14)$$

De 35.11 temos $F_h = T_h$. Substituindo em 35.13:

$$F_v = 0,577T_h + 125\ N. \qquad (35.15)$$

Resolvendo o sistema de equações 35.14 e 35.15, obtemos:

$$T_h = 179\ N \qquad\qquad F_v = 228\ N;$$

e, de 35.12:

$$T_v = 250\ N - F_v = 250\ N - 228\ N = 22\ N.$$

A tensão no cabo é, então:

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 180\ N,$$

e a força da dobradiça sobre a barra é:

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 290\ N.$$

Os exemplos discutidos até agora têm como característica o fato de que o número de equações é igual ao número de forças desconhecidas. Quando todas as forças atuam em um plano, há somente três equações de equilíbrio independentes (uma para a rotação e duas – componentes – para a translação).

Entretanto, esse não é o caso mais comum que encontramos. Por exemplo, no exemplo da escada, se há atrito entre a parede e a escada, obtemos quatro incógnitas, que são as componentes horizontal e vertical da força que a parede exerce sobre a escada e as componentes horizontal e vertical da força que o solo exerce sobre a escada. Como só há três equações, essas forças não podem ser determinadas, sendo necessário conhecer uma outra relação entre as quatro forças para resolver o problema.

A mesma coisa acontece quando queremos determinar as forças que o solo exerce sobre as rodas de um automóvel ou sobre os quatro pés de uma mesa. Se essas forças forem perpendiculares ao solo, teremos quatro incógnitas e somente três equações independentes para determiná-las, uma para o equilíbrio de rotação e duas para o de translação em torno de dois eixos mutuamente perpendiculares e paralelos ao plano horizontal.

A única maneira para solucionar o problema é determinar, através de uma base física, uma relação adicional entre as forças. Essa dificuldade pode ser removida porque as estruturas não são absolutamente rígidas como supusemos até agora. Por exemplo, os pneus do automóvel se deformam, assim como a escada. Então, as leis da elasticidade e as propriedades elásticas da estrutura, assim como a natureza da deformação, nos fornecem dados adicionais para encontrar a relação entre as forças e termos a quarta equação de que necessitamos.

35.3 CENTRO DE GRAVIDADE

A Lei de Gravitação Universal só pode ser aplicada a partículas ou corpos cujas dimensões sejam desprezíveis em relação a distância entre eles, ou seja, a forma dos corpos não deve interferir. A razão disso é que a distância entre dois corpos não pode ser definida precisamente, assim como não se pode determinar em que pontos dos corpos que interagem as forças gravitacionais que estão aplicadas e quais são as suas linhas de ação.

Considere agora um corpo rígido extenso de massa M e uma partícula de massa m em um ponto do espaço. Pode-se dividir o corpo em um grande número de elementos de massa m_i, cada um deles sendo atraído pela partícula com uma força F_i.

O sistema de forças F_i terá uma resultante aplicada em um ponto G do corpo, cuja linha de ação deve passar pela posição da partícula (Figura 35.4). O ponto G é denominado **centro de gravidade do corpo relativo ao ponto *P***. Ele em geral não coincide com o centro de massa e nem está sobre a linha que une o centro de massa ao ponto P. Além disso, a sua posição depende da posição do ponto P em relação ao corpo.

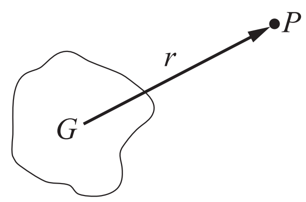


Figura 35.4 – O centro de gravidade.

A distinção entre centro de massa e centro de gravidade está no fato de que as partes do corpo mais próximas de P são atraídas com uma força maior que as mais distantes, e a distribuição de forças sobre o corpo afeta a posição do centro de gravidade. Já na determinação do centro de massa, essas partes são tratadas da mesma forma.

Quando P está situado a uma distância muito grande do corpo, se comparada com sua dimensão, a aceleração da gravidade devida à massa m será praticamente constante em todo o corpo e o centro de gravidade coincide com o centro de massa. Com efeito, seja $\vec{g}$ a aceleração da gravidade no corpo e seja $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$ a força que m exerce sobre um elemento de massa m_i do corpo. A força total é, então:

$$\vec{F} = \sum m_i \vec{g} = M\vec{g}.$$

Seja um ponto O, origem de um referencial inercial. A força $\vec{F}$ exerce um torque sobre o corpo em relação a O, que é a soma dos torques exercidos pelas forças $\vec{F}_i$ sobre os elementos de massa m_I. Se $\vec{r}_i$ é o vetor-posição desse elemento em relação a O, temos que:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{g}.$$

Mas, por definição, se $\vec{R}$ é o vetor-posição do centro de massa em relação a O, devemos ter:

$$M\vec{R} = \left(\sum m_i \vec{r}_i\right);$$

e, assim:

$$\vec{\tau} = M\vec{R} \times \vec{g}.$$

O torque total é, então, dado pela força $\vec{F} = M\vec{g}$ atuando no centro de massa do corpo, lembrando que o centro de gravidade coincide, nesse caso, com o centro de massa, fato que foi usado para se fazer o cálculo.

ATIVIDADE 35.3 – DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DO CENTRO DE GRAVIDADE

Como podemos determinar experimentalmente o centro de gravidade de uma placa fina de forma irregular?

35.4 ALAVANCAS

As equações 35.1 e 35.2 podem ser aplicadas para descrever um sistema mecânico muito importante: o da alavanca. Essa é uma peça rígida cuja finalidade é facilitar a realização de um trabalho através de uma rotação em torno de um eixo fixo que passa por ela. Tesoura, alicate, balança, remos, pedais de freio, guindastes são máquinas que funcionam com **o princípio da alavanca**.

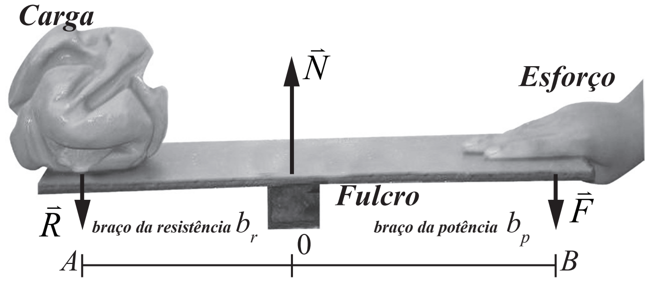


Figura 35.5 – O princípio da alavanca.

A Figura 35.5 mostra um esquema de uma alavanca, constituída por uma placa apoiada sobre um ponto *O* denominado **fulcro** ou **ponto de apoio**, podendo girar em torno de um eixo que passa por ele. Em uma das extremidades da alavanca, o operador aplica uma força $\vec{F}$ e ela é transferida para a outra extremidade, aparecendo como uma outra força a ser aplicada sobre uma carga. A figura mostra também os elementos da alavanca:

- o braço de potência (b_p), que é a distância *OB* do fulcro (*O*) até o ponto (*B*), onde se aplica a força $\vec{F}$ do operador, denominada força de potência;
- o braço de resistência (b_r), que é a distância *OA* do fulcro (*O*) até o ponto (*A*), onde se coloca a carga e onde atua a força de resistência $\vec{R}$.

Na situação ilustrada na figura, se o sistema está em equilíbrio, temos que:

$N = F + R$ (equilíbrio das forças),

$b_p F = b_r R$ (equilíbrio dos torques das forças em relação a *O*),

Quando a placa girar em torno de um eixo horizontal passando pelo fulcro, *A* e *B* descreverão arcos de círculo de raios b_p e b_r, respectivamente. Da equação do equilíbrio dos torques vem que:

$$\frac{R}{F} = \frac{b_p}{b_r}.$$

Portanto, se $b_p > b_r$, $R > F$. Isso significa que o efeito da força F é multiplicado pelo fator b_p/b_r. Portanto, a alavanca "transforma" uma força F em outra R maior.

A relação

$$V = \frac{b_p}{b_r}$$

é denominada **vantagem mecânica** da alavanca. Ela é tanto maior quanto menor for b_r, ou seja, quanto mais próxima do fulcro estiver o ponto de aplicação da força de resistência (ou a carga que se deseja deslocar).

As alavancas podem ser classificadas em três categorias (Figura 35.6):

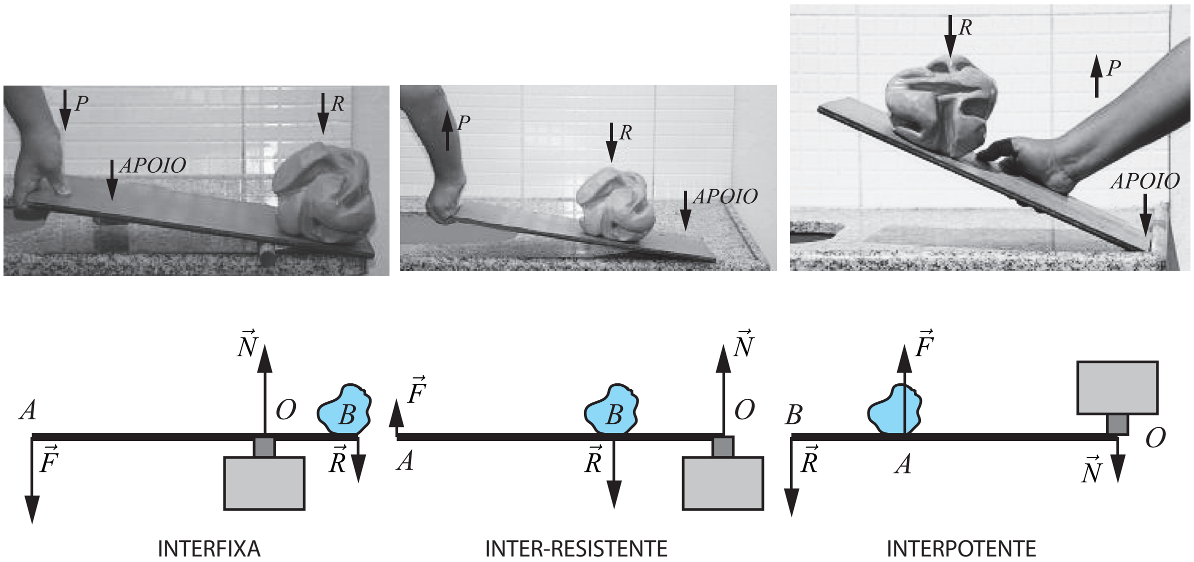


Figura 35.6 – Tipos de alavancas.

a) **interfixas**: em que o fulcro se localiza entre a força de potência e a de resistência. Alguns exemplos podem ser vistos na Figura 35.7;

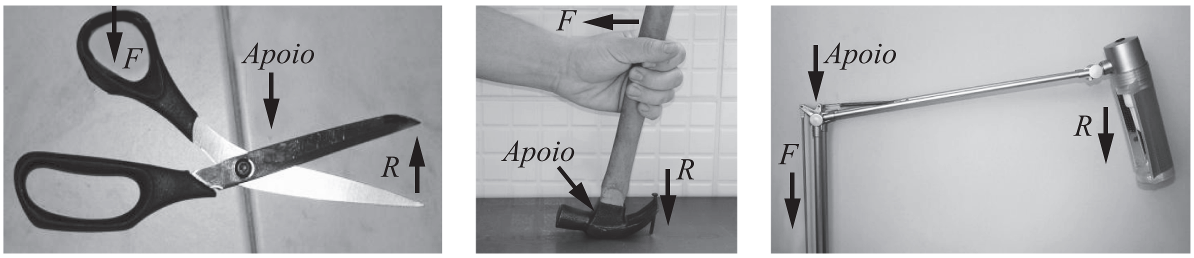


Figura 35.7 – Alavancas interfixas.

b) **inter-resistentes**: onde a força de resistência localiza-se entre o fulcro e a força de potência (Figura 35.8);

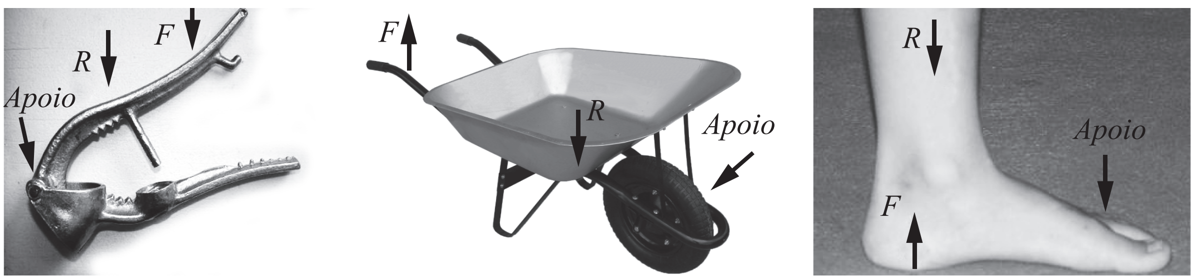


Figura 35.8 – Alavancas inter-resistentes.

c) **interpotentes**: onde a força de potência localiza-se entre o fulcro e a força de resistência (Figura 35.9).

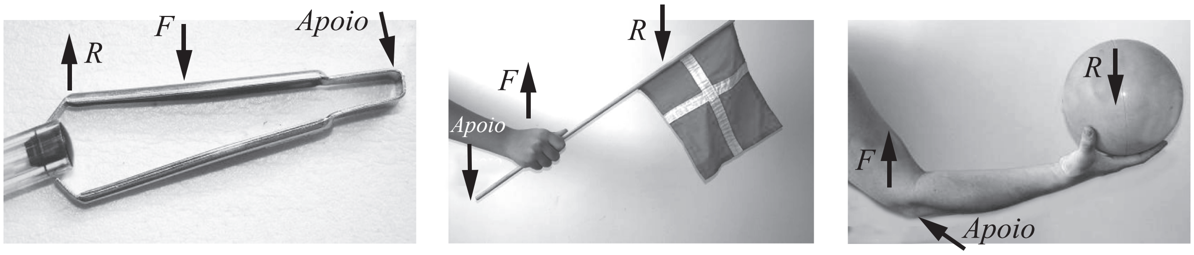


Figura 35.9 – Alavancas interpotentes.

Repare que as alavancas interpotentes possuem vantagem mecânica menor que um, pois $b_p < b_r$. Isso seguramente é uma desvantagem do ponto de vista de realização de força, pois a força de potência é maior que a de resistência. Entretanto, ao perder força ganha-se deslocamento ou velocidade. Por exemplo, o antebraço da Figura 35.9 é uma alavanca interpotente; o esforço realizado pelo músculo bíceps, que está aplicado entre o cotovelo (fulcro) e a mão (onde se localiza a carga) para levantar um peso é maior que o peso da carga, mas, em compensação, a carga pode ser levantada rapidamente. Interessante é que a maioria das alavancas do corpo humano são do tipo interpotente, pois, do contrário, teríamos movimentos extremamente lentos.

Nos exemplos dados até agora, as forças de potência e de resistência estavam sempre perpendiculares à alavanca, que, por sua vez, era sempre reta. Essa não é uma limitação; quando aplicamos forças que não são perpendiculares à linha que une a força ao fulcro ou quando a alavanca não é reta, as fórmulas estudadas ainda são aplicáveis: basta, para isso, considerar a componente da força perpendicular a essa reta.

ATIVIDADE 35.4 – VANTAGEM MECÂNICA DO PÉ DE CABRA

O pé de cabra consiste em uma barra de ferro ou aço, curvada em uma de suas extremidades. O braço de potência tem comprimento que pode chegar a 2,0 *m*; o braço de resistência em geral tem cerca de 2,0 *cm* de comprimento. Que tipo de alavanca é o pé de cabra e qual é sua vantagem mecânica?

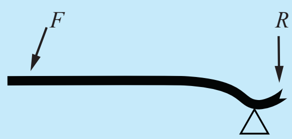


Figura 35.10 – O pé de cabra.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 35.1 – Equilíbrio de uma tábua

A equação 35.5 continua sendo válida. Com o eixo de coordenadas perpendicular à página e entrando nela, a equação do torque fica:

$$-\left(\frac{\ell}{2}-\frac{a}{2}\right)\times F_1-\left(\frac{\ell}{2}+\frac{a}{2}\right)\times F_2+mg\frac{\ell}{2}=0; \qquad (35.16)$$

ou:

$$F_1(\ell-a)+F_2(l+a)=mg\ell.$$

Da equação 35.5, temos que: $F_1 = mg - F_2$. Substituindo em 35.16, obtemos:

$$(mg - F_2)(l - a) + F_2(l + a) = mg\ell.$$

Simplificando:

$$mga = 2F_2 a;$$

de onde tiramos:

$$F_2 = \frac{mg}{2} \quad \text{e} \quad F_1 = \frac{mg}{2}.$$

Atividade 35.2 – Altura máxima na escada

Seja d o comprimento da escada que o homem pode percorrer sem que a escada deslize. Então, nessa posição do homem, a equação 35.10 fica:

$$F_2 a - W d\cos\theta - wb_0 = 0$$

Com os dados, temos:

$$F_2 \times 2,4\ m - 80\ N \times d\cos(53,^\circ 13)\ m - 30\ N \times 0,48\ m;$$

de onde tiramos F_2 em função de d:

$$F_2 = \frac{80\ N \times d(0,60)\ m + 30\ N \times 0,48\ m}{2,4\ m}.$$

A força de atrito é:

$$F_{1h} = \mu F_{1v} = \mu(W + w) = 0,40 \times (80\ N + 30\ N) = 44\ N.$$

Como $F_{1h} = F_2$ temos, igualando as expressões:

$$\frac{80\ N \times d(0,60)\ m + 30\ N \times 0,48\ m}{2,4\ m} = 44\ N,$$

de onde tiramos:

$$d = 1{,}9\ m.$$

A altura máxima é, então:

$$H = d\,sen(53,^\circ 13) = 1,83 \times 0,800 = 1,5\ m.$$

Atividade 35.3 – Determinação experimental do centro de gravidade

Consideremos a Figura 35.11. Para localizar o centro de gravidade da placa (e de qualquer outro corpo), vamos suspendê-lo com uma corda presa em um ponto A da placa. Quando ela ficar em repouso, o centro de gravidade deve ficar sobre a linha vertical Aa que passa pelo ponto A. Isso porque o peso do corpo (que é uma força vertical), não pode exercer torque sobre a placa quando ela está em equilíbrio. Em particular, ele não pode exercer torque em relação ao ponto de suspensão A, o que só pode acontecer se a linha de ação do peso passa por A.

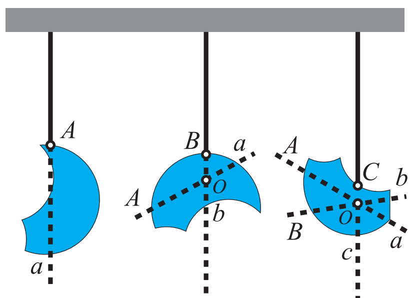


Figura 35.11 – Centro de gravidade de uma placa fina.

Marcando essa linha vertical, suspendemos o corpo por outro ponto B. Da mesma forma que antes, o centro de gravidade deve estar sobre a vertical que passa por Bb. Então, se ele pertence a Aa e a Bb, ele deve estar sobre a interseção das duas linhas. Pronto, o ponto O determina o centro de gravidades do corpo. Se tomarmos um terceiro ponto C e repetirmos o procedimento, veremos que a linha Cc realmente passa pelo centro de gravidade.

Esse método se baseia na suposição de que o campo gravitacional na região da placa é uniforme, pois, assim, a posição do centro de gravidade é a mesma, independente da distribuição de massa no corpo.

Atividade 35.4 – Vantagem mecânica do pé de cabra

O fulcro (apoio) está situado no fim da parte reta dele; a força de potência é aplicada na extremidade reta, enquanto que a de resistência, na curva. Ele é uma alavanca interfixa.

A vantagem mecânica é:

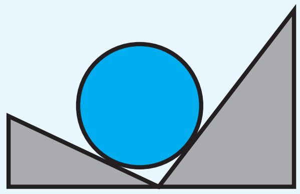
$$V = \frac{b_p}{b_r} = \frac{2.0\ m}{0.02\ m} = 100.$$

Se aplicarmos sobre a extremidade da alavanca um peso de 80 kgf (peso de um homem), ela exercerá uma força de resistência de 8.000 kgf, valor mais que suficiente para arrebentar o batente de uma porta.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

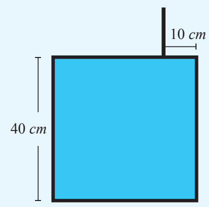
E1. Uma balança assimétrica é composta por uma barra fina AB de comprimento igual a 60,0 cm apoiada sobre um suporte situado a 15,0 cm da extremidade A. Se colocarmos em A um peso de 20,0 N, qual deve ser o peso a ser colocado em B para que a balança fique equilibrada?

E2. Um cilindro de peso P e raio R é colocado em repouso em uma calha formada pela junção de dois planos inclinados de 30° e 60° com a horizontal. Ache as forças que os planos exercem sobre o cilindro.



E3. Uma escada está apoiada em uma parede vertical sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre a escada e o solo é 0,03. Qual é o menor ângulo que a escada pode fazer com o solo para que fique equilibrada?

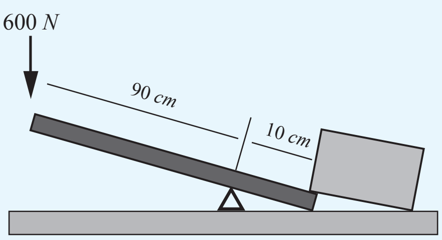
E1. Uma placa quadrada de lado igual a 40 cm é presa a um fio colocado a 10 cm de uma de suas extremidades. Em seguida, o fio é preso ao teto e deixa-se a placa ficar equilibrada. Qual é o ângulo que o lado da placa mais próximo do fio faz com a vertical?



E1. Um homem usa uma alavanca de 1,0 m para levantar um caixote pesado. O fulcro da alavanca está situado a 0,10 m de uma de suas extremidades.

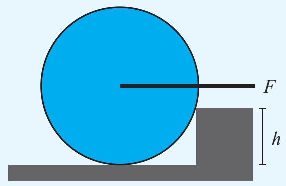
a) Se o homem exerce uma força de 600 N para baixo e perpendicular ao plano da alavanca, qual é a força que essa exerce sobre o caixote?

b) Qual é a vantagem mecânica dessa alavanca?

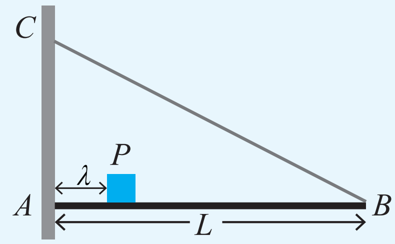


PROBLEMAS DA UNIDADE 13

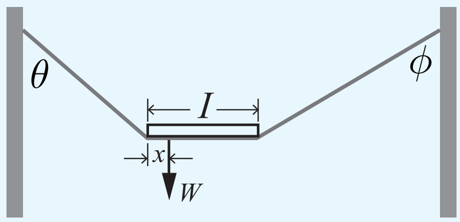
P1. Uma roda está encostada em um degrau. Qual é a força necessária para fazer a roda subir no degrau?



P2. Uma barra horizontal *AB* de peso desprezível e comprimento L é ligada a uma parede vertical por um pino *A* e um fio *BC* que faz um ângulo α com a horizontal. Pode-se mover um bloco *P* ao longo da barra e sua posição é dada pela distância λ à parede. Ache a tensão no fio em função de λ e as componentes da força exercida pela barra sobre o pino.



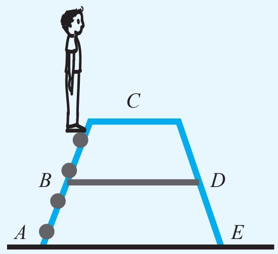
P3. Uma barra não uniforme de peso *P* está suspensa em repouso em uma posição horizontal por duas cordas finas, como mostrado na figura. Os ângulos que as cordas fazem com a vertical são $\theta = 29°$ e $\phi = 60$. Se o comprimento da barra é de 7,2 *m*, ache a distância *x* da extremidade esquerda ao centro de massa.



P4. Uma porta com 2,2 *m* de altura e 80 *cm* de largura está presa à parede por duas dobradiças, uma a 30 cm da parte superior e outra a 30 *cm* da parte inferior da porta. Suponha que o centro de massa da porta seja o seu centro geométrico e determine as componentes horizontal e vertical da força exercida por cada dobradiça sobre a porta.

P5. Um automóvel pesando 600 *N* tem rodas separadas por 2,60 *m*. Se o centro de massa está situado a 88 *cm* atrás do eixo das rodas da frente, determine a força exercida pelo solo sobre cada uma das rodas dianteiras e cada uma das rodas traseiras.

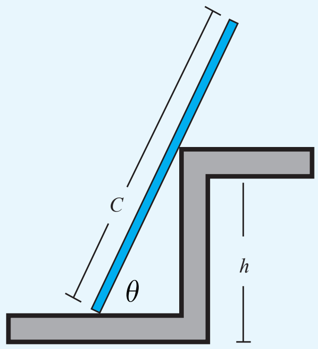
P6. Na escada mostrada na figura, AC e CE medem 2,40 m e estão ligadas em C. BD é uma barra de ligação com 76 cm de comprimento e está localizada na metade da altura da escada. Um homem com 60 kg sobe na escada até uma altura de 1,80 m. Supondo que o solo não possui atrito, ache a tensão na barra de ligação e as forças exercidas sobre a escada pelo solo.



P7. Uma tábua retangular com 10 N de peso e comprimento de 3,0 m está em repouso sobre o chão e sobre um degrau de altura h = 1,50. O centro de massa da tábua está situado no centro dela. A tábua permanece em equilíbrio para ângulos $\theta \geq 70°$, mas escorrega para $\theta < 70°$.

a) Faça um diagrama mostrando todas as forças atuando sobre a tábua.

b) Ache o coeficiente de atrito entre a tábua e o solo.



UNIDADE 14
Gravitação

A força gravitacional é uma das quatro forças fundamentais da Física, estando sempre presente em todos os fenômenos físicos e interações entre corpos materiais da natureza. O estudo de suas propriedades deve-se a Isaac Newton (1642-1727), que formulou a Lei de Gravitação Universal em seu livro *Philosophiae naturalis principia mathematica* publicado em 1686.

Até Newton, a atração gravitacional dos corpos pela Terra (tal como a chamamos atualmente) era aceita como uma propriedade natural dos corpos, que iam para o centro da Terra porque essa era o centro do Universo e o lugar natural de todas as coisas. Essa ideia, formulada por Aristóteles (384-322 a.C), foi considerada como uma verdade indiscutível durante aproximadamente dois mil anos, até que as ideias de Newton tiveram ampla aceitação.

A teoria de gravitação de Newton também permitiu resolver o problema do movimento dos astros conhecidos – Sol, Lua, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno –, dando uma teoria dinâmica para seus movimentos, que substituiu a descrição cinemática adotada até então.

AULA 36

Lei da gravitação

Objetivos

- Estabelecer a Lei de Gravitação Universal;
- Reconhecer as características da força gravitacional.

36.1 A LEI DE GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

De acordo com Newton, a força de interação gravitacional entre duas partículas de massas m_1 e m_2, separadas por uma distância r é:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{36.1}$$

em que $G = 6,673 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2$ é uma constante que tem o mesmo valor para qualquer partícula, independente de sua natureza; por isso, ela é denominada **constante universal da gravitação**.

A força gravitacional possui algumas propriedades importantes:

- é uma força que atua a distância; portanto, não é necessário que haja contato entre as partículas para ela atuar;
- independe do meio em que as partículas estão;
- obedece à terceira lei de Newton: a força que m_1 exerce sobre m_2 tem mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto à força que m_2 exerce sobre m_1. Mais ainda, as duas forças estão dirigidas ao longo da linha que une as partículas;
- a força que uma partícula exerce sobre a outra não depende da presença de outras partículas na sua vizinhança.

é muito fraca (pois a constante G é da ordem de $10^{-10}\, N.m^2/kg^2$), embora sempre esteja presente no Universo, pois decresce com o inverso do quadrado da distância à partícula que a exerce.

A Lei de Gravitação pode ser expressa na forma vetorial: sejam duas partículas de massas m_1 e m_2; seja $\vec{r}$ o vetor-posição da massa m_2 relativamente à massa m_1. Seja $\vec{F}_{12}$ a força exercida pela massa m_1 sobre m_2; seja $\vec{F}_{21}$ a força exercida pela massa m_2 sobre m_1 (Figura 36.1).

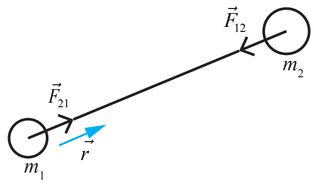


Figura 36.1 – As forças de interação gravitacional entre duas massas.

Se $\hat{r}$ é o vetor unitário sobre a reta que une as duas partículas, no sentido de m_1 para m_2, temos que:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}. \qquad (36.2)$$

Note que a força $\vec{F}_{12}$ tem o sentido oposto ao do unitário da direção. Notemos também que a força que m_2 exerce sobre m_1 é, de acordo com a terceira lei de Newton, $F_{21} = -F_{12}$. Portanto:

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r},$$

pois essa força tem o mesmo sentido que o unitário $\hat{r}$.

Exemplo 36.1 – Cálculo da força de atração gravitacional entre duas massas

Considere primeiramente duas massas $m = 100\ kg$, separadas pela distância de 1,00 m. De acordo com a equação 36.1,

$$F = 6,673\times10^{-11}\ N.m^2/kg^2 \times \frac{1,00\times10^2\ kg \times 1,00\times10^2\ kg}{(1,00\ m)^2} = 6,7\times10^{-7}\ N.$$

Esse valor é extremamente pequeno porque o valor de G é muito pequeno.

ATIVIDADE 36.1 – ATRAÇÃO GRAVITACIONAL ENTRE A TERRA E O SOL

Calcule a atração gravitacional entre a Terra e o Sol.

Quando várias partículas exercem forças gravitacionais sobre uma outra, a força resultante é a soma dessas forças.

Exemplo 36.2

Calcule a força gravitacional exercida sobre a partícula 1 (Figura 36.2) pelas outras partículas, sabendo que ela está no centro do quadrado que tem lado $a = 15\ cm$ e que $m_1 = 300\ g$, $m_2 = 400\ g$, $m_3 = 150\ g$, $m_4 = 100\ g$ e $m_5 = 100\ g$.

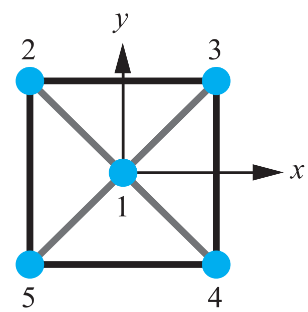


Figura 36.2 – Posições relativas das partículas cujas forças atuam sobre a partícula 1.

A Figura 36.3 (não desenhada em escala) mostra as forças exercidas pelas partículas sobre a partícula 1. Os ângulos entre as diagonais do quadrado valem $\pi/2$ e como as diagonais dele são perpendiculares entre si, os ângulos que os vetores fazem com o sentido positivo do eixo Ox é $\pi/4$. No sistema da figura, temos:

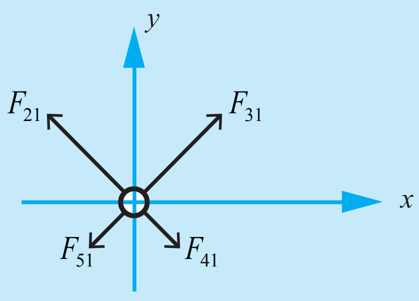


Figura 36.3 – As forças que atuam sobre a partícula 1 e o sistema de coordenadas adotado.

$$F_x = -F_{21}cos(\pi/4) + F_{31}cos(\pi/4) + F_{41}cos(\pi/4) - F_{51}cos(\pi/4),$$

$$F_y = F_{21}cos(\pi/4) + F_{31}cos(\pi/4) - F_{41}cos(\pi/4) - F_{51}cos(\pi/4).$$

Como a diagonal do quadrado vale $a\sqrt{2}$, a distância entre a massa m_1 e todas as outras é $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Então $r^2 = \frac{a^2}{2}$ e as equações acima ficam:

$$F_x = 2 \times G\frac{m_1}{a^2}cos\left(\frac{\pi}{4}\right)(-m_2 + m_3 + m_4 - m_5),$$

$$F_y = 2 \times G\frac{m_1}{a^2}cos\left(\frac{\pi}{4}\right)(m_2 + m_3 - m_4 - m_5);$$

ou, numericamente:

$$F_x = 2 \times 6,673 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \times \frac{0,300\,kg}{0,15^2\,m^2} \times 0,785 \times (-0,400 + 0,150 + 0,100 - 0,100)\,kg,$$

$$F_y = 2 \times 6,673 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \times \frac{0,300\,kg}{0,15^2\,m^2} \times 0,785 \times (0,400 + 0,150 - 0,100 - 0,100)\,kg;$$

ou:

$$F_x = -3,492 \times 10^{-10}\, N;$$

$$F_y = 4,889 \times 10^{-10}\, N.$$

Logo:

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 6,008 \times 10^{-10}\, N$ $\qquad$ $\theta = arctg\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = 125,^\circ 54,$

sendo θ o ângulo que a força resultante faz com o eixo Ox.

ATIVIDADE 36.2 – CÁLCULO DA FORÇA GRAVITACIONAL EXERCIDA SIMULTANEAMENTE POR OUTROS CORPOS

Sabendo que as massas da Figura 36.4 são, respectivamente, $m_1 = 2,0\,kg$, $m_2 = 5,0\,kg$, $m_3 = 1,0\,kg$ e que $a = 3,0\,m$, a que distância da massa m_1, sobre a linha das massas e entre m_1 e m_3, a massa m_2 deve ser colocada para ficar em equilíbrio?

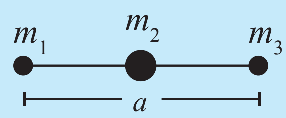


Figura 36.4 – Distribuição das massas da atividade 36.2

36.2 A MEDIDA DA CONSTANTE DE GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

A constante de gravitação G tem um valor muito pequeno. Por isso, somente em 1798 – um século depois de Newton apresentar sua teoria –, é que foi possível fazer a primeira medida precisa de G. O autor dessa medida foi Lord Henry Cavendish (1731-1810) que usou uma balança de torção para isso.

Uma balança de torção consiste em duas massas m iguais, presas às extremidades de uma barra de comprimento d. Essa barra é suspensa por um fio muito fino, de modo a ficar em equilíbrio com as massas no plano horizontal.

Tal como no caso de uma mola, quando torcemos o fio (deformando-o) de um ângulo θ em qualquer sentido, o fio reage a essa torção com um torque que é proporcional à torção e se opõe a ela, isto é, o torque tende a fazer o fio voltar a sua forma original. Ele vale:

$$\tau = -\kappa\theta, \tag{36.3}$$

em que o sinal negativo mostra que o torque tem sentido oposto ao deslocamento angular da balança. A constante κ é denominada constante de torção; ela é diretamente proporcional à área de seção transversal do fio e inversamente proporcional ao seu comprimento. Ela pode ser medida experimentalmente através da determinação do período de oscilação do sistema de massas: quando o fio, depois de torcido, é solto, o sistema de massas fica oscilando em torno da posição de equilíbrio, de modo que as massas descrevem pequenos arcos em torno do fio.

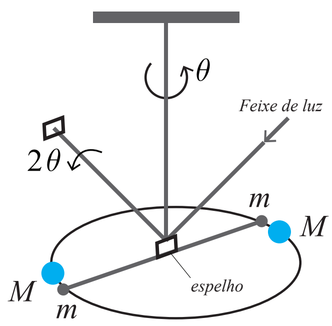


Figura 36.5 – A balança de torção e a experiência de Cavendish.

Pode-se demonstrar que o período de oscilação das massas é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}},$$

em que I é o momento de inércia do sistema constituído pelas massas e pela barra que as une. Quando essa barra tem massa desprezível em relação às massas, o momento de inércia vale $I = 2md^2$. A constante de torção é obtida substituindo o momento de inércia na equação do período, o que dá:

$$\kappa = \frac{4\pi^2(2md^2)}{T^2}. \qquad (36.4)$$

Na experiência de Cavendish (Figura 36.5), tendo sido determinada a constante de torção, colocam-se duas massas M de chumbo, cada uma delas próxima a cada massa m. A força gravitacional entre M e m provoca uma pequena torção na balança, medida pelo deslocamento angular θ, visto no espelho "E" pela deflexão de um feixe de luz refletido nele.

Cavendish pode determinar o valor de G com razoável precisão. Além disso, com base na medida da aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra, foi possível determinar a massa da Terra. Ainda com o valor de G, foi também possível determinar a massa dos planetas combinando a força gravitacional com as propriedades de seus movimentos e, também, a massa do Sol.

O valor mais preciso que temos para G foi determinado por P. R. Heyl e P. Chizanowski em 1942, no National Bureau of Standards (Estados Unidos):

$$G = (6,673 \pm 0,003) \times 10^{-11} N.m^2 / kg^2$$

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 36.1 – Atração gravitacional entre a Terra e o Sol

A massa da Terra é $M_T = 5,98 \times 10^{24}\, kg$ e a do Sol é $M_S = 1,99 \times 10^{30}\, kg$.A distância média entre os dois corpos é $r = 1,50 \times 10^{11}\, m$.

Temos:

$$F = 6,673 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \times \frac{1,99 \times 10^{30}\, kg \times 5,98 \times 10^{24} \times kg}{1,50 \times 10^{22}\, m^2} = 3,5 \times 10^{22}\, N.$$

Aqui, embora G seja pequeno e a distância muito grande, as massas são enormes e entram na fórmula como um produto; desse modo, a força gravitacional é grande.

Atividade 36.2 – Cálculo da força gravitacional exercida simultaneamente por outros corpos

A condição de equilíbrio para a massa m_2 é a soma das forças que atuam sobre ele seja nula. Seja x a distância à massa m_1 em que isso ocorre. Tomando um eixo com origem em m_1 e sentido positivo para m_3, temos, então:

$$-G\left(\frac{m_1 m_2}{x^2}\right)+G\left[\frac{m_3 m_2}{(a-x)^2}\right]=0;$$

ou:

$$-\frac{m_1}{x^2}+\frac{m_3}{(a-x)^2}=0,$$

que, com os valores das massas, dá a equação de segundo grau:

$$x^2-4ax+2a^2=0;$$

cujas soluções são:

$$x=2a\pm a\sqrt{6}.$$

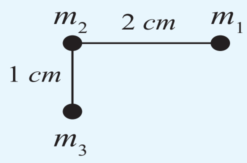
(É importante você completar a solução da equação do segundo grau até esse resultado). Com o valor de a, obtemos numericamente:

$$x_1=1,8\,m \qquad\qquad x_2=10,2\,m.$$

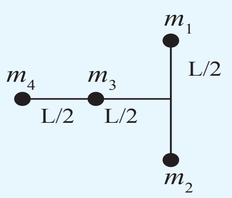
Logo, a solução que nos satisfaz (m_2 entre m_1 e m_3) é $x=1,8\ m$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Faça um desenho indicando o sentido e a direção da força resultante sobre m_1 na configuração ao lado. Sendo m_1 = 6 kg, m_2 = 3 kg e m_3 = 10 kg, encontre o módulo dessa força resultante sobre m_1.



E2. Qual deve ser o valor de m_4 na configuração ao lado para que a resultante sobre m_3 seja para direita? (Dados: m_1 = 2 kg, m_2 = 2 kg, m_3 = 5 kg e L = 30 cm.)



E3. Um satélite tem velocidade igual a 1.000 km/h. A qual altura ele está? Considere que toda a massa da Terra esteja em seu centro e que a resistência do ar é desprezível.

E4. Quais são as unidade de κ na equação 36.4? Considerando o resultado anterior, encontre as unidades na equação 36.3 e verifique se são as de torque.

E5. Consideremos a experiência de Cavendish. Seja M = 5 kg e m = 1 g. As distâncias entre as esferas de massa M e m são 3 cm.

a) Se as esferas de massa m estão separadas por uma distância de 15 cm, calcule o torque sobre o fio.

b) Se o período de uma oscilação é 1 s, calcule o deslocamento θ da balança.

AULA 37

A força da gravidade e a Terra

Objetivos

- Estudar as características da força gravitacional próxima à superfície da Terra;
- Calcular a força gravitacional para um conjunto de partículas;
- Definir e calcular o campo gravitacional;
- Entender o conceito de linhas de força.

37.1 A FORÇA GRAVITACIONAL EXERCIDA POR UMA CASCA ESFÉRICA

A equação 36.1 fornece a força gravitacional que atua entre duas partículas. Para determinar a força gravitacional que atua entre corpos de dimensão finita, deve-se considerar cada corpo como se fosse composto por partículas. A força exercida pelo corpo é a soma das forças exercidas por essas partículas. Um caso importante é a força gravitacional exercida por uma distribuição esférica de massa.

Considere, inicialmente, uma casca esférica homogênea de massa M, de raio r e espessura t pequena comparada com o raio r. Vamos calcular a força exercida por essa casca esférica sobre uma partícula de massa m situada a uma distância R do centro da casca (Figura 37.1).

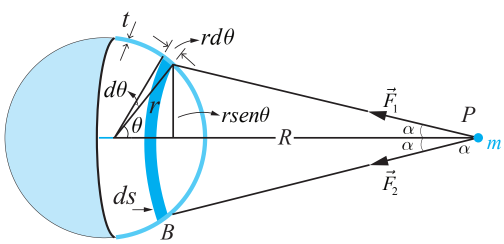


Figura 37.1 – A força gravitacional exercida por uma casca esférica sobre uma partícula fora dela.

Divida a casca em anéis infinitesimais, cada um de área dS. O perímetro de cada anel é $2\pi(rsen\theta)$, sua largura é $rd\theta$ e sua espessura, t. Então, seu volume é:

$$dV = 2\pi t r^2 sen\theta d\theta.$$

Se a densidade do material é ρ, a massa do anel é:

$$dM = \rho dV = 2\pi\rho t r^2 sen\theta d\theta. \tag{37.1}$$

A força que dM exerce na partícula m é calculada da seguinte maneira: a pequena parte do anel localizada em A atrai m com uma força $d\vec{F}_1$; a pequena parte do anel localizada em B atrai m com uma força $d\vec{F}_2$. A resultante dessas duas forças sobre m é a soma vetorial delas. Para calculá-la, tomemos dois eixos perpendiculares com origem em m, com o eixo Px com direção e sentido para o centro da casca, e Py para cima. Decompondo cada força em componentes segundo esses eixos, vemos que as componentes segundo Py são iguais e de sentidos opostos, anulando-se. As componentes segundo Px valem $dF_1 \cos\alpha$ e $dF_2 \cos\alpha$ e são iguais em módulo. Procedendo dessa forma para todos os pares de elementos do anel, podemos ver facilmente que a soma das componentes ao longo de Py vai se anular, sobrando apenas a soma das componentes ao longo de Px. Então:

$$F = \int F_x dV = \int G\frac{mdM}{x^2}cos\alpha = \int \frac{Gm}{x^2} 2\pi\rho t r^2 sen\theta d\theta cos\alpha, \tag{37.2}$$

em que a integral deve ser feita sobre todo o volume V da casca. Para efetuar essa integral, notemos que x, θ e α estão relacionados. Com efeito, no triângulo retângulo PAC, temos:

$$cos\alpha = \frac{R - rcos\theta}{x}. \tag{37.3}$$

No triângulo PAD temos:

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rrcos\theta \tag{37.4}$$

Então:

$$rcos\theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R} \tag{37.5}$$

Diferenciando implicitamente a equação 37.4 em relação a θ, obtemos:

$$2xdx = 2Rrsen\theta d\theta,$$

ou:

$$sen\theta d\theta = \frac{x}{Rr}dx. \tag{37.6}$$

Levando agora 37.5 em 37.3, obtemos:

$$cos\alpha = \frac{R^2 - r^2 - x^2}{2Rx}. \tag{37.7}$$

Levando 37.6 e 37.7 em 37.2, eliminamos θ e α, obtendo:

$$F = \frac{\pi G m \rho t r}{R^2}\int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} - 1\right)dx. \tag{37.8}$$

Como:

$$\int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} - 1\right)dx = 4r,$$

vem que:

$$F = G\frac{(4\pi r^2 \rho t)m}{R^2}.$$

Mas $4\pi r^2 \rho t = M$, massa da casca esférica. Então, a equação acima fica:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}. \qquad (37.9)$$

Esse resultado nos diz que uma casca esférica homogênea atrai uma partícula situada a uma distância $r > R$ do seu centro, como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro.

Uma esfera sólida e homogênea pode ser considerada como sendo composta de um grande número de cascas esféricas concêntricas. Portanto, podemos dizer também que **uma esfera homogênea atrai uma partícula situada a uma distância $R > r$ do seu centro, como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro**. Esse resultado vale também quando a esfera for composta por cascas esféricas de diferentes densidades.

Esse resultado é muito importante porque permite que tratemos corpos como o Sol, a Lua e planetas como se fossem partículas para interação com outros corpos (desde, é claro, que eles sejam supostos homogêneos e esféricos).

A força gravitacional exercida por uma casca esférica homogênea, sobre uma partícula situada dentro dela é nula. Para esferas sólidas, podemos combinar os dois resultados acima e dizer que **a força gravitacional exercida por uma distribuição esférica e homogênea de matéria sobre uma partícula é igual à força exercida por toda a matéria existente entre a partícula e o centro da esfera, estando a matéria concentrada neste centro**.

ATIVIDADE 37.1 – FORÇA GRAVITACIONAL DENTRO DE UMA CASCA ESFÉRICA

Calcule a força gravitacional sobre uma massa situada dentro de uma casca esférica.

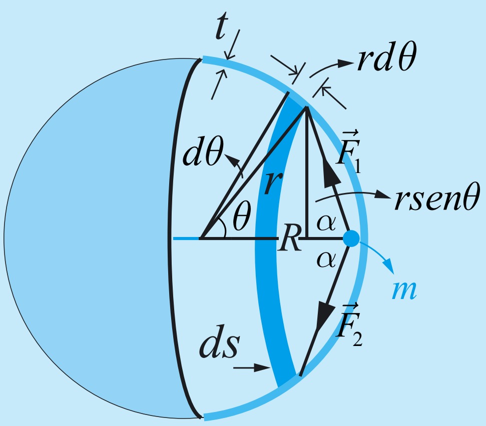


Figura 37.2 – A força gravitacional exercida por uma casca esférica sobre uma partícula dentro dela.

37.2 A FORÇA GRAVITACIONAL PRÓXIMO À SUPERFÍCIE DA TERRA

A força gravitacional exercida pela Terra sobre a massa m de um corpo situado a distância r de seu centro é:

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

em que R é o raio da Terra suposta esférica. Essa força pode ser escrita como:

$$P = mg,$$

em que g é a aceleração da gravidade no local. Dessas duas equações, obtemos:

$$g = \frac{GM}{r^2}, \tag{37.10}$$

que dá o módulo da aceleração da gravidade em função da distância ao centro da Terra. Calculemos a variação da aceleração da gravidade dg para uma variação dr da distância ao centro. Diferenciando a equação 37.10, temos:

$$dg = -2GM\frac{dr}{r^3}.$$

Dividindo essa equação pela equação 37.10, vem:

$$\frac{dg}{g} = -2\frac{dr}{r} = -2\frac{h}{R}, \tag{37.11}$$

em que $R = 6,4 \times 10^6\ m$ é o raio da Terra e h é a altura em relação à superfície da Terra. O sinal negativo mostra que a aceleração da gravidade é inversamente proporcional à distância ao centro da Terra (consequentemente, à distância à superfície dela). O último termo é obtido supondo que $dr = \Delta r = h$ e que $r = R$. A Tabela 37.1 mostra valores numéricos.

Tabela 37.1
Aceleração da gravidade em função da altitude

Altitude (*km*)	g (m/s^2)	Altitude (*m*)	g (m/s^2)
0	9,806	32	9,71
1	9,803	100	9,00
4	9,794	500	9,60
8	9,782	1.000 (a)	7,41
16	9,757	384.000 (b)	0,00271

(a) altitude típica da órbita de um satélite; (b) raio da órbita da Lua

Como dissemos, os números acima valem para uma Terra esférica. Entretanto, isso não é exato; a Terra tem uma forma que pode ser aproximada pela de um elipsoide de revolução (uma esfera achatada), com o eixo menor na direção do seu eixo de rotação. A diferença entre o raio equatorial e o polar desse elipsoide é de cerca de 21 *km*. Embora pequena – o raio equatorial da Terra é de $6378{,}14 \pm 0{,}01 km$ –, ela é importante, por causar variação na aceleração da gravidade. A Tabela 37.2 mostra valores dessa aceleração para pontos em várias latitudes terrestres.

Tabela 37.2
Variação da aceleração da gravidade em função da latitude

Latitude	g (m/s^2)	Latitude	g (m/s^2)
0º	9,78039	50º	9,81071
10º	9,78195	60º	9,81918
20º	9,78641	70º	9,82608
30º	9,79329	80º	9,83059
40º	9,80171	90º	9,83217

Além de a aceleração da gravidade apresentar diferenças com a altitude e com a latitude do lugar, ela também sofre o efeito da rotação da Terra. Com efeito, seja uma massa m em repouso relativamente à superfície da Terra e situada no Equador terrestre (Figura 37.3). Esse corpo não está em equlíbrio porque a Terra está em rotação em torno de um eixo perpendicular ao Equador. Assim, deve existir uma força resultante atuando sobre o corpo, dirigida para o centro da Terra. Escolhendo o sentido positivo do eixo Ox para dentro da Terra, temos, então, da segunda lei de Newton, que:

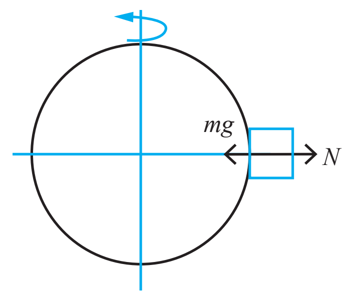


Figura 37.3 – Corpo sobre o Equador terrestre e a rotação da Terra.

$$G\frac{Mm}{R^2} - N = ma_c,$$

em que a_c é a aceleração centrípeta do corpo. Logo:

$$N = G\frac{Mm}{R^2} - ma_c.$$

Mas N é a reação normal da força que o bloco exerce sobre o solo, isto é, N é o peso aparente do bloco e vale $N = mg_e$, em que g_e é a aceleração da gravidade efetiva (**medida**) na superfície da Terra. Então:

$$g_e = G\frac{M}{R^2} - a_c \quad \text{(no Equador).}$$

A aceleração centrípeta é:

$$a_c = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \left(\frac{4\pi^2 R}{T^2}\right),$$

que ω é a velocidade angular e T é o período de rotação da Terra. Numericamente: $T = 8{,}64 \times 10^4 s$, $R = 6{,}37 \times 10^6 m$ e $a_c = 0{,}0336 m/s^2$.

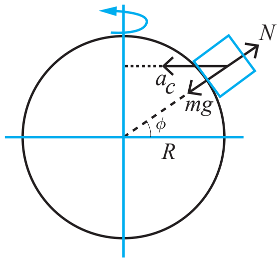


Figura 37.4 – Corpo sobre um ponto de Latitude ϕ.

Note que a aceleração centrípeta só fica dirigida para o centro da Terra no Equador; para qualquer outro ponto da superfície terrestre, ela é paralela ao Equador e aponta para um ponto sobre o eixo de rotação da Terra (Figura 37.4). O valor da aceleração efetiva passa a ser:

$$g_e = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R cos\phi,$$

e, à medida que a latitude aumenta, g_e se aproxima cada vez mais do valor que g teria se a Terra não tivesse rotação. Nos polos, temos:

$$g_e = \frac{GM}{R^2}.$$

37.3 O CAMPO GRAVITACIONAL

Considere uma massa M em um ponto P do espaço. Tome, então, uma massa m_0 e a coloque em vários pontos no entorno de M. Em cada um deles, m_0 fica sujeita a uma força gravitacional $\vec{F}$ exercida por M sobre ela. Portanto, a cada ponto Q do espaço (diferente de P) pode se associar uma força $\vec{F}$ que a massa M é capaz de exercer sobre qualquer outra massa em Q. A esse conjunto de vetores $\vec{F}$ damos o nome de **campo gravitacional**, gerado pela massa M no espaço que a circunda. Na física clássica ou newtoniana, o campo gravitacional da massa M é, portanto, um "mapa" dos vetores força gravitacional que M pode exercer sobre qualquer outra massa.

Como a força gravitacional em um ponto Q depende de M e da massa m_0 colocada nesse ponto (e que pode ser qualquer), para caracterizar o campo gravitacional gerado por M, definimos o vetor **intensidade do campo gravitacional** ($\vec{g}$) no ponto Q como sendo a força gravitacional por unidade de massa que atua nesse ponto:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0}. \tag{37.12}$$

Essa grandeza é idêntica à aceleração da gravidade associada à força gravitacional exercida por M no ponto considerado.

De acordo com a definição, a intensidade do campo gravitacional gerado por uma massa M, em um ponto P situado a uma distância r dela, é:

$$\vec{g} = -\frac{1}{m_0}\frac{GM m_0}{r^2}\hat{u}_r = -\frac{GM}{r^2}\hat{u}_r,$$

em que $\hat{u}_r$ é o vetor unitário da direção que une a massa M ao ponto P.

A intensidade do campo gravitacional gerado por uma distribuição de N massas m_i, em um ponto situado a distâncias r_i das massas é, então:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{N}\vec{g}_i = -G\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{r_i^2}\hat{u}_{r_i}. \tag{37.13}$$

Exemplo 37.1

Calcule a intensidade do campo gravitacional gerado por duas massas idênticas e separadas por uma distância $2a$, em um ponto do plano que contém as massas (Figura 37.5).

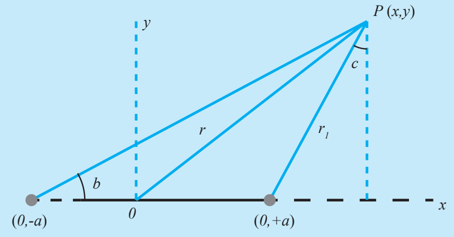


Figura 37.5 – Campo gravitacional devido a duas massas idênticas.

Temos que:

$$g_1 = \frac{Gm}{r_1^2} \qquad g_2 = \frac{Gm}{r_2^2} \qquad r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Então:

$$g_x = g_{1x} + g_{2x} = -g_1 senc - g_2 cosb,$$

$$g_y = g_{1y} + g_{2y} = -g_1 cosc - g_2 senb.$$

Mas:

$$senc = \frac{x-a}{r_1} \qquad cosc = \frac{y}{r_1} \qquad senb = \frac{y}{r_2} \qquad cosb = \frac{x+a}{r_2}.$$

Levando esses valores em g_x e g_y, obtemos:

$$g_x = -Gm\left\{\frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\},$$

$$g_y = -Gm\left\{\frac{y}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\},$$

A intensidade do campo gravitacional é, então:

$$\vec{g} = -Gm\left\{\frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}\hat{i} - Gm\left\{\frac{y}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}\hat{j}.$$

37.3.1 Linhas de força

Um campo gravitacional pode ser representado graficamente por “linhas de força”. Uma linha de força é a linha (reta ou curva), tal que, em cada ponto do campo por onde passe, é tangente ao vetor intensidade do campo gravitacional nesse ponto. As linhas de força são desenhadas de forma que a sua densidade em uma região seja proporcional à intensidade do campo naquela região. A Figura 37.6 mostra as linhas de força de um campo gravitacional gerado por uma massa m. Elas são radiais, pois o vetor $\vec{g}$ tem a mesma direção da força gravitacional em cada ponto do campo, a qual é uma força central. Além disso, a concentração de linhas de força aumenta à medida que nos aproximamos da massa, justamente porque a intensidade do campo gravitacional aumenta nesse sentido. Ainda na figura o sentido do vetor $\vec{g}$ é mostrado pelas flechas.

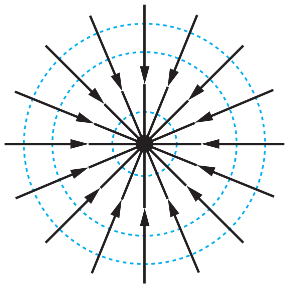


Figura 37.6 – Linhas de força de um campo gerado por uma massa.

A Figura 37.7 mostra de forma esquemática as linhas de força do campo gravitacional gerado pelo sistema Terra-Lua. Note a mudança da figura em relação à anterior pela presença da Lua, que modifica o campo gravitacional da Terra. Também o ponto *A* na figura é o ponto em que o campo gravitacional do sistema se anula; uma partícula colocada em *A* não fica sujeita a nenhuma força gravitacional resultante do sistema.

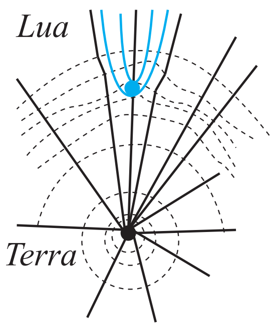


Figura 37.7 – Linhas de força do campo gravitacional do sistema Terra-Lua. Esse desenho é baseado na figura original de Scott (1965).

Na física clássica ou Newtoniana, o campo gravitacional não passa de um mapa da distribuição da força gravitacional que atua em cada ponto do espaço. Entretanto, na teoria da relatividade, ele passa a ter um significado muito diferente e uma existência muito concreta. De acordo com essa teoria, o campo gravitacional é o meio pelo qual se efetua a interação gravitacional entre duas massas; a ação à distância direta entre as massas deixa de existir: a massa m_1 deforma o espaço que a circunda, produzindo o campo gravitacional e este atua sobre a massa m_2 produzindo a atração gravitacional (obviamente o mesmo vale para a atração gravitacional da massa m_1 pela m_2).

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 37.1 – Força gravitacional dentro de uma casca esférica

Quando a partícula de massa m está situada dentro da casca esférica ($R < r$) (Figura 37.2), a integral da equação 37.8 passa a ter os limites de integração trocados, dando:

$$F = \frac{\pi G m \rho t r}{R^2} \int_{R+r}^{R-r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} - 1 \right) dx = 0.$$

(Faça a integral para comprovar o resultado). Portanto, a força gravitacional exercida por uma casca esférica homogênea sobre uma partícula situada dentro dela, é nula.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Considere uma esfera homogênea de massa M e raio r. Qual é o valor de $\vec{g}$ em um ponto que está a $R_i > r$ do centro da esfera. O campo ($\vec{g}$) se anula para $R_i < r$? Se não, calcule o seu valor.

E2. Calcule $\vec{g}$ para a cidade de Belo Horizonte, onde a latitude é $\phi = -19,°9208$. O quanto ficamos mais "leves" em relação a quem está na linha do Equador? Desconsidere a altitude da cidade, ou seja, considere a Terra como uma superfície esférica sem irregularidades.

E3. Considere a gravidade na superfície de Júpiter.

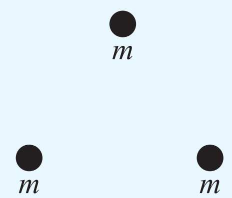
a) Qual é o seu valor?

b) Qual é a diferença de gravidade entre a cabeça e os pés de uma pessoa de 2 m que se encontra em Júpiter?

c) Faça o mesmo cálculo da letra b para essa pessoa na Terra.

d) Compare os resultados das letras a e b.

E4. Três esferas de massas idênticas se encontram nos vértices de um triângulo equilátero. Desenhe as linhas de campo para essa configuração.



AULA 38

O movimento planetário

Objetivos

- Discernir as características do movimento planetário;
- Enunciar e aplicar as leis de Kepler.

38.1 AS LEIS DE KEPLER

As primeiras teorias que tentaram explicar o sistema solar foram estabelecidas pelos gregos na Antiguidade. Platão (427-347 a.C.) e Eudóxio (c. 370 a.C.) introduziram a ideia de que os sete planetas então conhecidos (o Sol e a Lua eram considerados planetas) ocupavam esferas concêntricas com o centro da Terra, organizadas de acordo com a rapidez do movimento aparente do planeta no céu: o mais próximo era a Lua, seguido de Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. Essas esferas giravam em torno da Terra junto com a esfera das estrelas, situada além das dos planetas.

Aristóteles (384-222 a.C.) retomou essa ideia em seus escritos e, com isso, ela foi transmitida a gerações posteriores, tornando-se o modelo do Universo aceito por todos. Cláudio Ptolomeu (c. 150 a.C.), baseado em observações tanto dele quanto de outros astrônomos que o antecederam, refinou a ideia geocêntrica e publicou seus resultados em seu livro *O Almageste*. Ptolomeu observou que o movimento dos planetas não era circular e uniforme como havia pregado Aristóteles; para corrigir as diferenças do movimento real com relação ao circular uniforme, ele criou um sistema de epiciclos, nos quais o planeta descreveria um movimento circular e uniforme em torno de um ponto – o deferente – que, por sua vez, girava em torno da Terra com movimento circular uniforme (Figura 38.1).

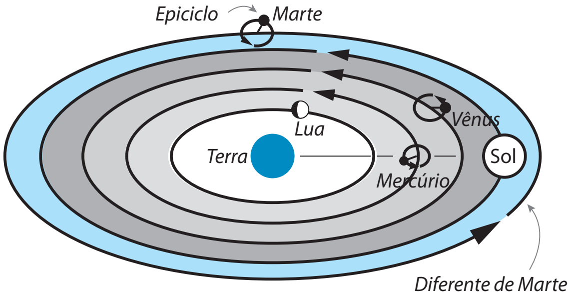


Figura 38.1 – O movimento geocêntrico dos planetas.

A teoria de Ptolomeu foi aceita durante quase quinze séculos. Durante esse intervalo de tempo, à medida que novos instrumentos eram anexados ao equipamento científico da época e as observações astronômicas tornavam-se mais precisas, o sistema de epiciclos tornava-se cada vez mais complexo para poder explicar as irregularidades que foram aparecendo com os novos dados observacionais.

Em 1543, Nicolau Copérnico (1473-1543) apresentou uma nova teoria sobre o movimento dos planetas em sua obra *De revolutionibus orbium caelestium*. Ele mostrou que o movimento dos corpos celestes poderia ser descrito de um modo mais simples se o Sol fosse considerado em repouso no centro do Universo; os planetas (inclusive a Terra) descreveriam, então, órbitas em torno do Sol (Figura 38.2).

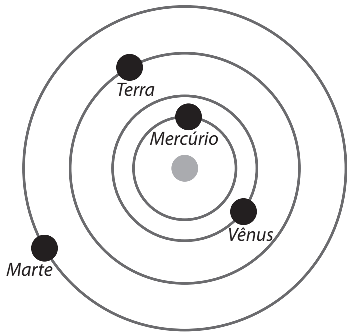


Figura 38.2 – O movimento heliocêntrico dos planetas.

Houve uma grande controvérsia sobre as duas teorias, que estimulou os astrônomos a obterem novos dados observacionais que permitissem decidir sobre a questão. O maior deles, e o último grande observador que trabalhava a olho nu, Tycho Brahe (1546-1601), construiu um observatório altamente sofisticado para a época e conseguiu aumentar a precisão das medidas da posição de estrelas para um minuto de arco e, de planetas, para quatro minutos de arco, dobrando assim a qualidade das melhores observações que haviam antes dele. Com a morte de Tycho Brahe, as observações da posição de planetas, sobretudo de Marte, ficaram com seu então colaborador Johannes Kepler (1546-1601), que, ao tentar explicar o movimento altamente irregular de Marte no céu, chegou às suas famosas leis.

As leis de Kepler descreviam o movimento dos planetas sem, entretanto, dar uma explicação sobre a causa desses movimentos. Essa explicação veio com Newton em seu livro *Principia*, com a teoria da gravitação universal. A grande vitória da teoria de gravitação de Newton foi, portanto, a de possibilitar uma descrição do movimento planetário através da força gravitacional entre o Sol e os planetas. O coroamento da teoria ocorreu quando E. Halley (1656-1742), depois de observar que os cometas de 1531, 1607 e 1682 tinham órbitas muito parecidas e que reapareciam a cada 76 anos, demonstrou, com a teoria de Newton, que eles eram o mesmo objeto e que deveria voltar a ser visto em 1758. Isso realmente ocorreu e foi a primeira grande vitória da teoria.

AS LEIS DE KEPLER SÃO ENUNCIADAS ATUALMENTE DA SEGUINTE MANEIRA:

1. Lei das órbitas: Os planetas se movem em torno do Sol descrevendo uma elipse, com o Sol ocupando um dos focos.

2. Leis das áreas: O raio-vetor do planeta relativo ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

3. Leis dos períodos: Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas em torno do Sol são proporcionais aos cubos dos semieixos maiores de suas órbitas.

Pode-se demonstrar que a primeira lei é uma consequência do fato de a força de atração gravitacional variar com o inverso do quadrado da distância. Além disso, que a trajetória de uma partícula sujeita a uma tal lei pode ser não só uma elipse, mas também uma parábola ou (mais raramente) uma hipérbole. Na época em que foi enunciada, não se sabia que havia outros corpos no sistema solar como os cometas (que possuem órbitas parabólicas ou hiperbólicas) e satélites de planetas (eram conhecidos apenas a Lua e os quatro maiores satélites de Júpiter).

Um enunciado moderno da primeira lei, mais apropriado pelos conhecimentos atuais, seria: "A trajetória dos corpos do sistema solar, sujeitos à atração gravitacional do Sol, é uma curva cônica (elipse, parábola ou hipérbole) com o Sol ocupando um dos focos."

PEQUENA DIGRESSÃO MATEMÁTICA: AS CURVAS CÔNICAS

Uma curva cônica (Figura 38.3a) é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano, tais que a razão da distância deles para um ponto fixo e para uma linha reta é constante. O ponto fixo é denominado **foco** da cônica; a linha reta, **diretriz**; a razão das distâncias, e , é chamada de **excentricidade** da curva, ou seja:

$$e = \frac{PF}{PQ}.$$

A excentricidade e é sempre um número não negativo. Se $e = 0$ a curva é um círculo; se $0 < e < 1$, a curva é uma elipse; se $e = 1$, uma parábola; finalmente, se $e > 1$, a curva é uma hipérbole.

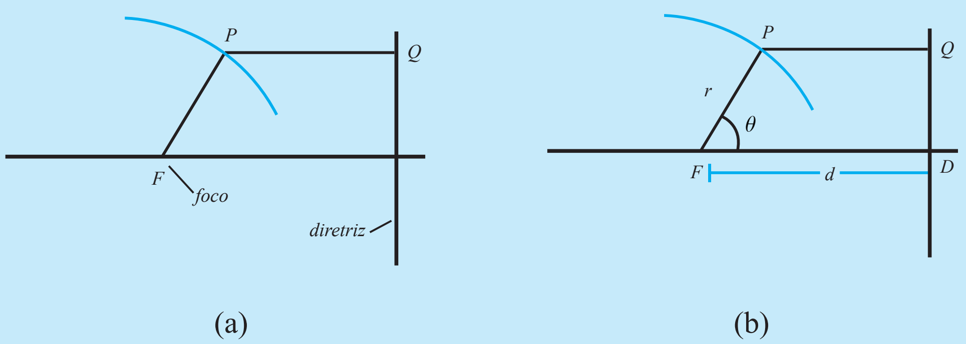


Figura 38.3 – (a) A curva cônica. (b) Definição de um sistema de coordenadas.

Seja um sistema de coordenadas polares (r,θ) com origem no foco F (Figura 38.3b). A coordenada r é a distância do ponto da curva ao foco e a coordenada θ é o ângulo que o raio-vetor $\vec{r}$ faz com a perpendicular (FD) à diretriz, traçada pelo foco. Da figura, temos então que: $PF = r$; $FD = d$. Então:

$$e = \frac{PF}{PQ} = \frac{r}{FD - PF\cos\theta} = \frac{r}{d - r\cos\theta},$$

que resolvida para r dá:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta},$$

que é a equação da cônica. O valor de d pode ser expresso em termos de outros parâmetros, característicos da curva.

No caso da elipse (Figura 38.4) há dois focos, e temos que: $CA = CA' = a$ é o semieixo maior, $CF = CF' = ae$; $b = a\sqrt{1-e^2}$ é o semieixo menor.

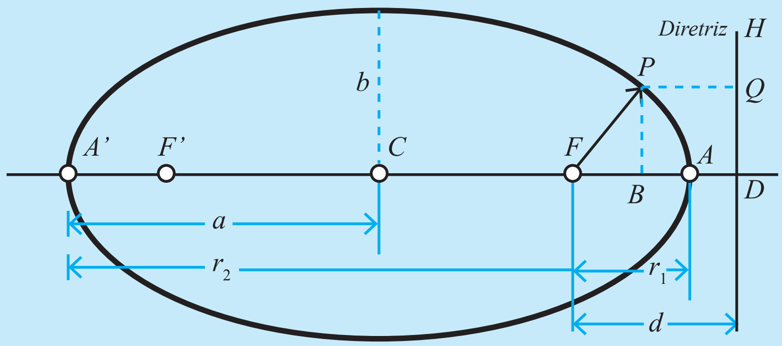


Figura 38.4 – A elipse.

Para o ponto A da elipse:

$$\theta = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{ed}{1+e},$$

que é a menor distância da curva ao foco F. No ponto A':

$$\theta = \pi \Rightarrow r_2 = \frac{ed}{1-e},$$

que é a maior distância da curva ao foco F. Como $CA = CA' = a$, vem que:

$$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{ed}{1-e^2} \Rightarrow ed = a(1-e^2).$$

Logo, a equação da cônica fica, para o caso da elipse:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}.$$

No caso da parábola (Figura 38.5), temos $e = 1$, e a equação da cônica fica:

$$r = \frac{d}{1 + cos\theta}.$$

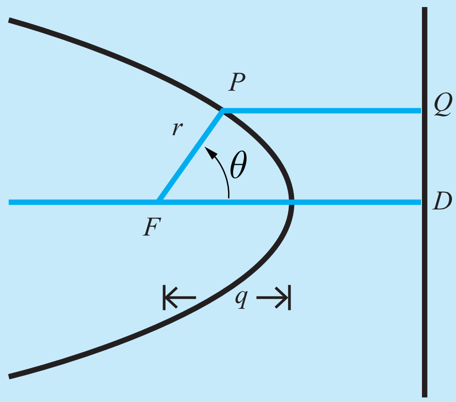


Figura 38.5 – A parábola.

Para $\theta = 0$, $r = q = \frac{d}{2}$. Logo $d = 2q$ e:

$$r = \frac{2q}{1 + cos\theta},$$

em que q é a distância do vértice da parábola ao foco. No caso da hipérbole, $e > 1$ e a equação da curva é:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + ecos\theta}.$$

A segunda lei de Kepler é uma consequência da conservação do momentum angular do planeta relativo ao Sol. Com efeito, seja um planeta de massa m cujo vetor-posição relativo ao Sol é $\vec{r}$. O seu momentum angular é:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \left(\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right),$$

em que $\vec{v}$ é a sua velocidade instantânea. A taxa de variação do momentum angular com o tempo é:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Como $\vec{F}$ é a força gravitacional do Sol sobre o planeta, podemos escrever:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \left[-G\frac{Mm}{r^2}\hat{u}\right] = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{r} \times \hat{u} = 0,$$

em que $\hat{u}$ é o vetor unitário da direção Sol-planeta, com sentido do Sol para o planeta. Como $\vec{r}$ e $\hat{u}$ têm a mesma direção, o produto vetorial se anula e o momentum angular é constante (sua derivada temporal é nula).

Analogamente:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Assim temos:

$$\vec{\tau}_{Fext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Como $\vec{r} \times \vec{F} = 0$, $\vec{L} = cte$.

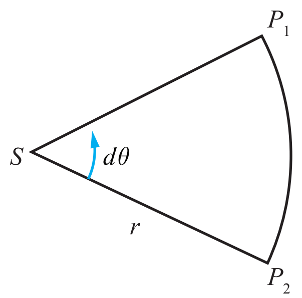


Figura 38.6 – A área descrita pelo raio-vetor do planeta entre duas posições P_1 e P_2.

Consideremos agora um planeta em sua órbita e suponhamos que no intervalo de tempo dt ele se desloque de P_1 para P_2 (Figura 38.6); a área descrita pelo seu raio-vetor, durante o intervalo de tempo dt, pode ser considerada como a do triângulo infinitesimal SP_1P_2 da figura:

$$dA = \frac{1}{2} r(r\,d\theta) = \frac{1}{2} r^2\,d\theta.$$

Mas:

$$L = rmv = r(m\omega r) = mr^2\omega = mr^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Logo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}. \tag{38.1}$$

Como L é constante, dA/dt também o é. Portanto, a área descrita pelo raio-vetor do planeta varia uniformemente com o tempo, e, em intervalos de tempo iguais, as áreas descritas pelo raio-vetor são iguais.

A terceira lei é obtida com a integração da equação 38.1 ao longo de toda a órbita descrita pelo planeta no seu movimento em torno do Sol. Entretanto, para chegar à expressão matemática da terceira lei, usaremos outro procedimento: suporemos que os planetas possuem órbitas circulares em torno do Sol e aplicaremos a segunda lei de Newton para seu movimento circular. A hipótese da órbita dos planetas ser circular é uma aproximação, mas, na realidade, as órbitas planetárias são muito próximas de círculos, de modo que essa aproximação nos dá um bom resultado e ajuda em muito a simplificar os cálculos.

De acordo com a segunda lei de Newton, a força gravitacional que atua no planeta deve ser igual à força centrípeta a que ele está sujeito em sua órbita circular; se m é a massa do planeta, M, a do Sol, e R, o raio da sua órbita, temos que:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R},$$

em que v é a velocidade (constante) do planeta. Como, no movimento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi R}{P},$$

em que P é o período do movimento e levando v na equação da segunda lei de Newton, obtemos:

$$G\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{P^2 R};$$

de onde tiramos:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3, \qquad (38.2)$$

que é a **expressão matemática da terceira lei de Kepler**.

As leis de Kepler não se aplicam apenas ao movimento de planetas e cometas do nosso sistema solar. Elas são válidas para movimento de satélites naturais e artificiais em torno de um planeta, de sondas espaciais, de estrelas duplas e de exoplanetas (planetas em outros sistemas solares).

Exemplo 38.1

A distância média de Marte ao Sol é 1,524 vezes maior que a da Terra ao Sol. Em quantos anos Marte perfaz uma revolução completa em torno do Sol?

Da equação 38.2, se P_M é o período de revolução de Marte em torno do Sol e P_T é o da Terra, tem-se que:

$$\frac{P_M}{P_T} = \left(\frac{R_M}{R_T}\right)^{3/2} = 1{,}524^{3/2} = 1{,}88.$$

Logo, se o período da Terra for dado em anos, o de Marte será 1,88 anos.

Exemplo 38.2

Um satélite de telecomunicações deve permanecer estacionário em relação à superfície da Terra. Para isso, ele deve ter uma órbita circular em relação ao centro da Terra, com seu plano coincidente com o do Equador terrestre; o período de seu movimento orbital deve ser igual ao da rotação da Terra em torno de seu eixo. Qual será o valor do raio de sua órbita?

De acordo com a equação 38.2, devemos ter:

$$R^3 = \frac{GM}{4\pi^2} P^2,$$

em que P é o período do movimento, R, o raio da órbita, e M, a massa da Terra ($M = 5{,}98 \times 10^{24}\,kg$). O período de rotação da Terra é de $23\,^h 56\,^m = 8{,}616 \times 10^4$ segundos. Então:

$$R = \left(\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\,N.m^2/kg^2 \times 5{,}98 \times 10^{24}\,kg}{4 \times 9{,}87}\right)^{1/3} \times (8{,}616 \times 10^4)^2\,s = 4{,}22 \times 10^7\,m$$

ATIVIDADE 38.1 – DETERMINAÇÃO DA MASSA DO SOL A PARTIR DA TERCEIRA LEI DE KEPLER

A Tabela 38.1 mostra os períodos (T) em anos siderais e os raios das órbitas dos planetas (R) em unidades de 1×10^{10} m, supostas circulares. Um ano sideral é o intervalo de tempo necessário para a Terra voltar a ter a mesma posição no espaço relativamente às estrelas e vale 365,25636 dias de 86.400 segundos ou 3,156 x 10^7 segundos. Determine a massa do Sol com esses dados. Note que Plutão agora é considerado um planeta anão.

Tabela 38.1
Períodos e raios das órbitas dos planetas do Sistema Solar

Planeta	R	T
Mercúrio	5,79	0,241
Vênus	10,8	0,615
Terra	15,0	1,00
Marte	22,8	1,88
Júpiter	77,8	11,9
Saturno	143,0	29,5
Urano	287,0	84,0
Netuno	450,0	165

RESPOSTA COMENTADA DA ATIVIDADE PROPOSTA

Atividade 38.1 – Determinação da massa do Sol a partir da terceira lei de Kepler

Para melhor precisão do resultado, faça uma regressão linear de R^3 em função de T^2. De acordo com a equação 38.2, deve-se obter uma reta, cujo coeficiente angular vale:

$$\alpha = \frac{GM}{4\pi^2},$$

de onde M pode ser calculado, pois se conhece o valor de G. Entretanto, é preciso ter cuidado com as unidades: os valores do período na tabela são dados em anos e têm que ser convertidos para segundos. Da mesma forma, não se pode esquecer do fator 1×10^{10} m. Após as conversões, obtêm-se os seguintes resultados:

Planeta	R^3	T^2
Mercúrio	1,941 x 10^{32}	5,785 x 10^{13}
Vênus	1,260 x 10^{33}	3,767 x 10^{13}
Terra	3,375 x 10^{33}	9,960 x 10^{14}
Marte	1,185 x 10^{34}	3,520 x 10^{15}
Júpiter	4,709 x 10^{35}	1,410 x 10^{17}
Saturno	2,924 x 10^{36}	8,688 x 10^{17}
Urano	2,364 x 10^{37}	7,028 x 10^{18}
Netuno	9,112 x 10^{37}	2,712 x 10^{19}

Os resultados da regressão linear da reta $R^3 = AT^2 + B$ são:

$A = \alpha = 3{,}361 \times 10^{18}$

$B = 3{,}657 \times 10^{33}$

R $(\textit{coeficiente de correlação}) = 0{,}99999993.$

Então:

$$M = \frac{4\pi^2\alpha}{G} = \frac{4 \times 9{,}870 \times 3{,}361 \times 10^{18}}{6{,}673 \times 10^{-11}} = 1{,}9885 \times 10^{30}\,kg.$$

O valor aceito da massa do Sol é $1{,}9891 \times 10^{30}\,kg$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. A distância média da Terra ao Sol é $d = 1,5 \times 10^{11}\ m$. Calcule a velocidade média tangencial da Terra em relação ao Sol. Por que falamos em velocidade (ou distância) média e não apenas em velocidade (ou distância)?

E2. Qual a área que o raio-vetor médio da Terra varre em um dia? (Dica: use os cálculos do exercício anterior.)

E3. Se vivêssemos em Marte, quantos dias teriam o ano?

E4. Consideremos o satétile do exemplo 38.2.

a) Calcule sua velocidade tangencial.

b) O satélite do exercício 36.3 pode ser estacionário?

c) Compare a altura de um satélite estacionário com a altura do satélite no exercício 36.3.

E5. Qual é o período e a velocidade tangencial de um objeto que se encontra em órbita a 2 *m* da superfície da Lua? É razoável que um astronauta consiga colocar uma pedra em órbita na Lua? (Dado: a atmosfera da Lua é desprezível.)

AULA 39

A energia gravitacional

Objetivos

- Relacionar potencial e intensidade do campo gravitacional;
- Aplicar a conservação da energia no movimento planetário;
- Definir energia gravitacional e potencial gravitacional;
- Calcular velocidade de escape.

39.1 A ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

A força gravitacional exercida por uma massa M sobre outra massa m está aplicada em m e sempre dirigida para a massa M. Um tipo de força como essa é conhecida na física como **força central**. Ela é uma força conservativa, como vamos mostrar a seguir.

Seja o trabalho realizado sobre m pela força exercida por M, no deslocamento de m de um ponto A para um ponto B do espaço, ao longo da reta que passa por A e B (Figura 39.1).

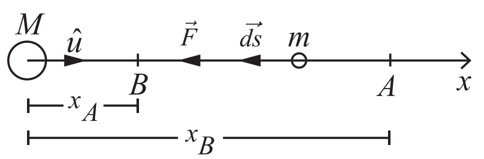


Figura 39.1 – A força gravitacional sobre m e o vetor deslocamento $\vec{ds}$.

Tomando a origem de coordenadas na massa M e o eixo Ox com o sentido do vetor unitário $\hat{u}$, temos $ds = -dx$:

$$W = \int_A^B G\frac{Mm}{x^2}\cos(0)(-dx) = -GMm\int_{x_A}^{x_B}\frac{dx}{x^2} = -GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_A}^{x_B},$$

ou:

$$W_{AB} = GMm\left(\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}\right).$$

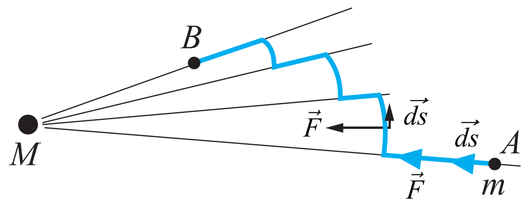


Figura 39.2 – O trabalho realizado pela força gravitacional entre *A* e *B*.

Vamos calcular agora o trabalho realizado pela força gravitacional no deslocamento de *A* para *B*, mas por outra trajetória. Por exemplo, a trajetória mostrada na Figura 39.2, composta por deslocamentos na direção radial, intercalados por deslocamentos na direção perpendicular à radial. Como nestes últimos a força gravitacional é sempre perpendicular ao deslocamento, seu trabalho é nulo; o trabalho no deslocamento de *A* para *B* é a soma dos trabalhos em cada deslocamento radial que, somados, dão a distância radial *AB*. Logo, o trabalho realizado pela força gravitacional no deslocamento de m, do ponto *A* ao ponto *B*, é o mesmo em qualquer das duas trajetórias (a radial e a quebrada). Portanto a força gravitacional é conservativa.

Podemos associar à força gravitacional uma função matemática denominada energia potencial gravitacional, de modo que sua variação entre dois pontos *A* e *B* é definida como sendo o negativo do trabalho que a força gravitacional exercida pela massa M sobre m realiza no deslocamento desta massa entre dois pontos *A* e *B*:

$$U(B) - U(A) = -W_{AB} = -GMm\left(\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}\right). \qquad (39.1)$$

A energia potencial gravitacional em um ponto é a diferença entre as energias potenciais desse ponto e de outro de referência, no qual, **arbitrariamente**, escolhemos o valor zero para a energia potencial. Normalmente, esse ponto de referência é tomado como aquele em que a força é nula. No caso da força gravitacional, que se anula no infinito, consideramos então o **nível zero de energia potencial** (aquele em que definimos como nula a energia potencial) o ponto situado no infinito.

A energia potencial gravitacional em um ponto P situado a uma distância r de um sistema de duas massas M e m é, então:

$$U(r) = -\int_r^{\infty} \frac{GMm}{r^2} dr = -GMm\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (39.2)$$

A energia potencial dada por essa equação é uma propriedade das duas massas e não de uma delas apenas. Não há meio de dividir a energia potencial entre elas e dizer quanto cabe a cada uma delas. Entretanto, quando $M >> m$, como, por exemplo, a Terra e uma bola ou outro corpo, falamos em “energia potencial da bola” porque, no momento em que essa se move próximo à superfície da Terra, as mudanças de energia potencial do sistema Terra + bola aparecem quase inteiramente como variações de energia cinética da bola, pois as da Terra são muito menores e mais difíceis de serem medidas.

A energia potencial é uma grandeza escalar. Portanto, tomando como referência uma massa m_o de um sistema de várias massas m_i, a energia potencial em um ponto do espaço é a soma das energias potenciais associadas a cada par de massas m_i e m_o do sistema:

$$U = \sum_{n=1}^{N} U_i = -\sum_{n=1}^{N} G\frac{m_i m_o}{r_i}, \tag{39.3}$$

em que r_i é módulo do vetor-posição da massa m_i relativamente à massa m_o.

Para uma distribuição contínua de matéria, a energia potencial no ponto P do campo é:

$$U = -\int_r^\infty G\frac{\rho(\vec{r}\,')dV}{r},$$

em que $\rho(\vec{r}\,')$ é a densidade volumétrica de massa no ponto da distribuição cujo vetor-posição, relativo um sistema de referência, é $\vec{r}\,'$; já o r que aparece no denominador é a distância do elemento de volume dV ao ponto P.

A energia potencial é um trabalho realizado pela força gravitacional. Portanto, suas unidades são as mesmas que a de trabalho, o Joule (1 Joule = 1 $N.m$).

39.2 A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA GRAVITACIONAL

Podemos aplicar a conservação da energia para sistemas sob ação de forças gravitacionais. Temos que a energia mecânica total (E) do sistema de uma partícula de massa m sob ação da força gravitacional de outra partícula de massa M é a soma da energia cinética da partícula (K) e da potencial gravitacional (U):

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}. \tag{39.4}$$

Exemplo 39.1

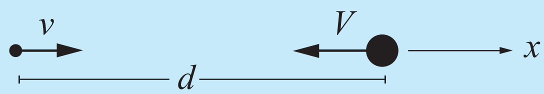
Duas massas m e M estão em repouso e separadas por uma distância muito grande. Deixadas então sob a ação da força gravitacional mútua, elas se aproximam uma da outra. Se d é a distância entre elas em um instante qualquer, qual é a velocidade relativa de aproximação das massas?

Solução

Sejam, respectivamente, v e V as velocidades de m e M, ambas relativas a um dado referencial inercial, quando a separação das massas é d. A velocidade relativa das massas é:

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{V},$$

e como as massas se movem em sentidos opostos temos, com o sentido positivo do eixo como na Figura 39.3:



(39.5)

Figura 39.3 – Velocidade relativa de massas sob ação da força gravitacional.

A relação entre as velocidades e a distância *d* pode ser obtida da conservação da energia. A energia cinética do sistema é:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2,$$

e a energia potencial gravitacional da configuração das partículas (em relação ao infinito), quando a separação entre elas for d é:

$$U = \frac{-GMm}{d}.$$

Da conservação da energia, temos que $\Delta U + \Delta K = 0$. Supondo que as massas partem do repouso separadas de uma distância muito grande, que pode ser tomada como infinita, temos que a energia total inicial é nula. Então:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \frac{GMm}{d} = 0. \qquad (39.6)$$

Para escrever u em termos de d temos que combinar 39.5 e 39.6. Entretanto, essas duas equações possuem três incógnitas: v, V e d; precisamos então de mais uma equação para resolver o problema. Essa equação é a da conservação do momentum linear do sistema de massas, pois supusemos que as únicas forças que atuam nelas são as de atração gravitacional mútua. Como essas forças são internas ao sistema, o momentum linear total se conserva.

O momentum linear inicial é nulo, pois as massas estão inicialmente em repouso. Quando separadas pela distância d, o momentum linear total do sistema é:

$$\vec{P} = m\vec{v} + M\vec{V},$$

ou, projetando sobre o eixo *Ox* da figura:

$$P = mv - MV.$$

A conservação do momentum fica, então:

$$mv - MV = 0,$$

o que nos dá:

$$V = \frac{m}{M}v \quad \text{e} \quad u = v + V = v + \frac{m}{M}v = \frac{m+M}{M}v.$$

Substituindo V na equação da conservação da energia, obtemos:

$$\frac{GMm}{d}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\right)^2v^2;$$

ou:

$$\frac{GMm}{d}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m}{M}\right);$$

ou, ainda:

$$\frac{GMm}{d}=\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{m}{M}\right)=\frac{1}{2}m\left(\frac{m+M}{M}\right)v^2.$$

Substituindo v por u nessa equação, obtemos:

$$\frac{GMm}{d}=\frac{1}{2}m\left(\frac{m+M}{M}\right)\left(\frac{M}{m+M}\right)^2u^2;$$

ou:

$$\frac{GMm}{d}=\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}u^2,$$

de onde tiramos:

$$u=\sqrt{\frac{2G(m+M)}{d}}.$$

39.3 A ENERGIA NO MOVIMENTO PLANETÁRIO

Seja o movimento de uma partícula de massa m em uma trajetória circular em torno de outra, de massa M. No sistema de referência em repouso em relação a M, a energia potencial do sistema em relação ao infinito é:

$$U=-G\frac{Mm}{r},$$

em que r é o raio do círculo descrito por m em torno de M.

A energia cinética de m é:

$$K=\frac{1}{2}mv^2.$$

A força de atração gravitacional de M sobre m é a força centrípeta que obriga essa partícula a ter uma órbita circular em torno de M. Então:

$$\frac{mv^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2},$$

de onde tiramos:

$$v^2 = \frac{GM}{r}.$$

Levando esse valor de v na expressão da energia cinética, temos:

$$K = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r},$$

de modo que a energia total da partícula de massa m é:

$$E = K + U = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - G\frac{Mm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \tag{39.7}$$

A energia total é negativa. A energia cinética nunca pode ser negativa, mas, da última equação, podemos ver que, quando a distância entre M e m tende para infinito, a energia cinética tende a zero. Da mesma forma, a energia potencial também se anula quando a separação entre as partículas tende a infinito. O significado da energia total ser negativa é que o sistema das duas partículas é ligado, isto é, elas são sempre obrigadas a permanecerem ligadas pela atração gravitacional mútua.

Essa é a situação dos planetas que descrevem órbitas em torno do Sol e de satélites de planetas no nosso sistema solar. É o caso também de estrelas duplas e múltiplas, em que duas ou mais estrelas permanecem ligadas gravitacionalmente. Mesmo quando consideramos órbitas elípticas, em que tanto a separação entre as partículas e as velocidades variam, a energia total é negativa. Há exemplos, entretanto, de cometas que possuem órbitas parabólicas ou hiperbólicas; nesses casos, eles não permanecem no sistema solar.

ATIVIDADE 39.1

Considere um satélite lançado horizontalmente por um ônibus espacial a 1.600 *km* acima da superfície da Terra. Qual deve ser a sua velocidade (horizontal) para que o satélite tenha uma órbita circular em torno da Terra? Qual é o período de seu movimento orbital?

39. 4 VELOCIDADE DE ESCAPE

Quando atiramos alguma coisa para o alto, geralmente ela retorna à superfície da Terra por causa da atração gravitacional de nosso planeta. Existe, entretanto, uma velocidade inicial mínima que o nosso projétil pode ter para que, pelo menos teoricamente, escape à atração gravitacional da Terra e só atinja o repouso no infinito. Essa velocidade é denominada **velocidade de escape**. Ela pode ser calculada com o princípio de conservação da energia. Se v_0 é a velocidade inicial do projétil, sua energia mecânica total é:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R},$$

em que R é o raio da Terra, suposta esférica. A condição para que o projétil chegue no infinito com velocidade nula é que $E = 0$ e, portanto,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = 0,$$

que, resolvida para a velocidade inicial, nos dá a velocidade de escape v_e:

$$v_e = v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{39.8}$$

Devemos notar que a velocidade de escape não depende da massa do projétil nem da direção segundo a qual o projétil é lançado.

Exemplo 39.2

Calcule a velocidade de escape para o caso da Terra.

No caso da Terra, temos $M = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$; $R = 6{,}38 \times 10^{6}\ m$. Então:

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}673 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2 \times 5{,}98 \times 10^{24}\ kg}{6{,}38 \times 10^{6}\ m}} = 1{,}12 \times 10^{3}\ m/s = 11{,}2\ km/s.$$

39.5 O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Na Aula 37 vimos que o campo gravitacional pode ser especificado pelo vetor intensidade do campo gravitacional $\vec{g}$, que dá as características do campo em cada ponto do espaço. O vetor $\vec{g}$ não é o único meio para caracterizar o campo gravitacional; ele pode ser também especificado por uma grandeza escalar, denominada **potencial gravitacional**. Por definição, a diferença de potencial gravitacional entre dois pontos *A* e *B* do espaço é a diferença de energia potencial por unidade de massa entre esses dois pontos:

$$V(A) - V(B) = \frac{U(A) - U(B)}{m}. \tag{39.9}$$

As unidades de potencial são, no Sistema Internacional, *Joule/kg*.

Da mesma forma que a energia potencial, não podemos falar de potencial em termos absolutos; quando falamos em potencial em um ponto *P* do espaço, queremos dizer a diferença de potencial entre esse ponto e outro ponto no qual **arbitrariamente** tomamos o valor zero para o potencial. No caso do potencial gravitacional, tal como para a energia potencial, o nível zero é geralmente o infinito:

$$V(A) = \frac{U(A) - U(\infty)}{m} = \frac{U(A)}{m}. \tag{39.10}$$

A energia potencial gravitacional em um ponto *P* do campo gerado por uma massa M foi calculada acima. O potencial no ponto *P* (**relativo ao infinito**), do campo gravitacional gerado pela massa M, situado à distância r dela é, então:

$$V = -\frac{GM}{r}.$$

39.5.1 Superfícies equipotenciais

O lugar geométrico de todos os pontos do campo em que o potencial gravitacional tem o mesmo valor é uma superfície denominada **superfície equipotencial**. Para uma massa isolada, ela é uma superfície esférica. A Figura 37.6 mostra as linhas de força do campo gravitacional da Terra, com algumas superfícies equipotenciais, que são as linhas pontilhadas da figura.

39.5.2 Cálculo do potencial

O potencial em um ponto *P* do espaço, devido a um sistema de várias massas m_i, é a soma dos potenciais associados a cada massa m_i do sistema:

$$U = \sum_{n=1}^{N} U_i = -\sum_{n=1}^{N} G\frac{m_i}{r_i}, \tag{39.11}$$

em que r_i é a distância de P à massa m_i.

Exemplo 39.3

Calcule o potencial associado ao campo gravitacional gerado por duas massas idênticas e separadas por uma distância $2a$, em um ponto do plano que contém as massas (veja a Figura 37.5).

Temos, da Figura 37.5 que:

$$V = -Gm\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

e também que:

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Então:

$$V = -Gm\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}\right\}.$$

Para uma distribuição contínua de matéria, o potencial no ponto *P* do campo é:

$$U = \int_{\infty}^{r} G\frac{\rho(\vec{r}')dV}{r},$$

em que $\rho(\vec{r}\,')$ é a densidade volumétrica de massa no ponto da distribuição cujo vetor-posição, relativo a um sistema de referência, é $\vec{r}\,'$; já o r que aparece no denominador é a distância do elemento de volume dV ao ponto P.

Exemplo 39.4

Calcule o potencial gerado por uma barra homogênea de comprimento L e massa M em um ponto P situado a uma distância d de uma das extremidades da barra (Figura 39.4).

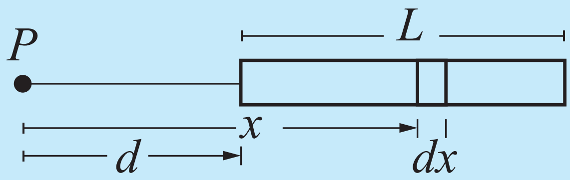


Figura 39.4 – Potencial gravitacional devido à barra homogênea.

A densidade linear da barra é $\lambda = M/L$ e é constante porque a barra é homogênea. Seja dx um elemento de comprimento da barra situado à distância x do ponto P. Temos, então:

$$V = -G\int_d^{d+L}\frac{\lambda dx}{x} = -G\frac{M}{L}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x} = -G\frac{M}{L}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$$

39.5.3 Relação entre o potencial e a intensidade do campo gravitacional

O potencial possui uma relação importante com a intensidade do campo, que pode ser usada para determinar uma grandeza, conhecida a outra. Com efeito, da definição de potencial, temos:

$$V = \frac{U}{m} = -\frac{1}{m}\int_\infty^r \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{m}\int_\infty^r m\vec{g}\cdot d\vec{s} = -\int_\infty^r \vec{g}\cdot d\vec{s}. \qquad (39.12)$$

Exemplo 39.5

Calcule o potencial gravitacional em um ponto P de um campo gerado por uma massa M.

Da intensidade do campo gravitacional em um ponto P situado à distância r da massa M, temos:

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM}{r^2}\hat{u}_r,$$

em que $\hat{u}_r$ é o vetor unitário da direção que liga a massa M ao ponto P. Da equação acima, temos, então, com $ds = -dr$:

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{g}\cdot\vec{ds} = -\int_\infty^r g\hat{u}_r\cdot\vec{ds} = -GM\int_\infty^r\frac{-dr}{r^2} = -\frac{GM}{r}.$$

A relação inversa é obtida derivando-se a equação 39.12. O resultado, de acordo com a regras do cálculo vetorial, é:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} V \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ g_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ g_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} . \qquad (39.13)$$

ou seja, a intensidade do campo gravitacional no ponto dado é o gradiente do potencial nesse ponto do campo.

Exemplo 39.6

Calcule a intensidade do campo gravitacional gerado por uma barra homogênea de comprimento L e massa M em um ponto *P* situado a uma distância r de uma das extremidades da barra (veja a Figura 39.4).

Pelo exemplo 39.4, o potencial gravitacional em P era dado por:

$$V = -G\frac{M}{L}\ln\left(\frac{r+L}{r}\right).$$

Então:

$$g = -\frac{dV}{dr} = \frac{GM}{L}\frac{r}{L+r}\frac{1}{r^2} = \frac{GM}{r}\frac{1}{L+r}.$$

ATIVIDADE 39.2

Calcule a intensidade do campo gravitacional em um ponto *P* de um campo gerado por duas massas idênticas e separadas por uma distância $2a$. (Você deve fazer essas derivadas para treinar sua álgebra.)

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 39.1

Podemos obter a velocidade v do satélite substituindo a sua energia mecânica total, dada pela equação 39.7, na expressão da conservação da energia, dada por 39.4. Obtemos, então:

$$-G\frac{Mm}{2r} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r},$$

de onde vem, com $M = 5.98\times10^{24}\ kg$ (massa da Terra), $R = 6,38\times10^{6}\ km$ (raio da Terra) e $h = 1,60\times10^{6}\ m$, que:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{3,99\times10^{14}\ m^3 s^{-2}}{6,38\times10^{6} + 1,60\times10^{6}\ m}} = 7,07\times10^{3}\ m/s.$$

O período do movimento é obtido da terceira lei de Kepler com $r = R+h$:

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}r^3} = \sqrt{\frac{4\times9,870}{3,99\times10^{14}\ m^3 s^{-2}}\times5,08\times10^{20}\ m^3} = 7,09\times10^{3}\ s = 1h\ 58\min 11s.$$

Atividade 39.2

No exemplo 39.3 vimos que o potencial gravitacional V no ponto P da Figura 37.5 era dado por:

$$V = -Gm\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\right\}.$$

Então, de acordo com a equação 39.13, temos:

$$g_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Gm\left\{\frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\},$$

e:

$$g_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -Gm\left\{\frac{y}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}.$$

(Novamente: você deve fazer essas derivadas para treinar sua álgebra.)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E1. Qual deve ser a separação entre uma massa de $5{,}4\ kg$ e outra de $2{,}4\ kg$ para que a energia do sistema seja de $10\ J$?

E2. Uma massa M é dividida em duas, m e $M-m$, e separadas de uma distância d. Qual deve ser a razão das massas para que a energia do sistema seja máxima?

E3. Quatro esferas de massas $m_1 = 400\ kg$, $m_2 = 350\ kg$, $m_1 = 2.000\ kg$ e $m_4 = 500\ kg$ têm, respectivamente, coordenadas (0,50), (0,0), (-80,0) e (40,0) em unidades de cm. Qual é o potencial gravitacional na posição da massa m_2, devido às outras massas? Da resposta anterior, calcule a força gravitacional sobre m_2.

E4. Em que altitude acima da superfície da Terra a aceleração da gravidade vale 4,9 m/s^2?

E5. Um projétil é lançado verticalmente da superfície da Terra com velocidade de 10 *km/s*. Desprezando o atrito do ar na atmosfera, a que altitude o projétil chegará?

PROBLEMAS DA UNIDADE 14

P1. Uma massa m puntual está situada a uma distância d da extremidade A de uma barra fina e homogênea AB de massa M e comprimento L. Calcule a força gravitacional que a barra exerce sobre a massa m.

P2. Uma estrela de nêutrons tem massa igual à do Sol e raio de 10 *km*. Qual é a aceleração da gravidade na sua superfície?

P3. Os diâmetros médios da Terra e de Marte são $1{,}3 \times 10^4$ *km* e $6{,}9 \times 10^3$ *km*. A massa de Marte é 0,11 vezes menor que a da Terra.

a) Qual é a razão das densidades médias de Marte para a Terra?

b) Qual é o valor de g em Marte?

c) Qual é a velocidade de escape em Marte?

P4. Dois satélites vão ser lançados em órbitas circulares em torno do centro da Terra. O satélite A terá um raio orbital de 6.400 *km* acima da superfície da Terra, enquanto o satélite B, um raio orbital de 19.200 *km* acima da superfície terrestre. O raio da Terra é 6.400 *km*.

a) Qual é a razão das energias potenciais dos dois satélites?

b) Qual é a razão das energias cinéticas de B para A?

P5. Uma estrela dupla é constituída por duas estrelas, de massas M e m, com $M = 2\,m$. Os seus centros estão a uma distância d, que é muito maior que o diâmetro das estrelas.

a) Ache uma expressão do período de revolução das estrelas em torno de seu centro de massa do sistema em termos de m, G e d.

b) Compare as suas energias cinéticas calculando a razão K_M/K_m.

P6. Um dos satélites de Júpiter, chamado Io, tem uma órbita circular em torno do planeta, cujo raio é $4{,}22 \times 10^6$ *m*. O seu período de revolução é de $1{,}53 \times 10^6$ s.

a) Determine o raio da órbita de outro satélite de Júpiter, Calisto, cujo período de revolução em torno do planeta é de$1{,}44 \times 10^6$ *s*.

b) Calcule a massa de Júpiter.

P7. Duas massas de 200 *g* e 800 *g* são separadas por uma distância de 12 *cm*.

a) Ache a energia potencial gravitacional por unidade de massa em um ponto situado a 4 *cm* da massa de 200 *g* e sobre a linha que une as massas.

b) Ache a força gravitacional por unidade de massa que atua nesse ponto.

c) Qual é o trabalho necessário para mover uma massa unitária desse ponto até um ponto situado a 4 *cm* da massa de 800 *g*?

P8. Escreva uma expressão para a energia potencial gravitacional de um corpo de massa m sob ação das forças gravitacionais da Terra e da Lua. Se M_t é a massa da Terra, a da Lua é $M_\ell = M_t/81$. R é a distância da massa ao centro da Terra e r, a distância da massa ao centro da Lua. A distância da Terra à Lua é aproximadamente de $3{,}80 \times 10^5$ *km*. Em que ponto, ou pontos, a força gravitacional da Terra é igual à da Lua?

REFERÊNCIAS

ALONSO, M.; FINN, E. J. *Física*. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

BLAU, P. J. *Friction Science and Tecnology*. 2. ed. New York: CRC Press, 2008.

CHAVES, Alaor S. *Física*. Rio de Janeiro: Reichmann & Affonso Editores, 2001.

EISBERG, Robert M; LERNER, Lawrence S. *Física*: fundamentos e aplicações. São Paulo: McGraw Hill do Brasil, 1982.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics*. Reading: Addison Wesley Publishing Co., 1963.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Fundamentos de física*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1993.

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física*. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1999.

NUSSENZVEIG, Moysés H. *Curso de física básica*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1997.

POZZANI, Luciano; TALAVERA, Álvaro Csapo. *Física*: mecânica II. São Paulo: Editora Nova Geração, 2002. Módulo 2 – Ensino Médio. (Coleção Nova Geração).

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. *Física*. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1996.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. *Física*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 2003.

SCOTT, William T. Potential and field diagram for the Earth-Moon System neglecting the effect of the Sun. *Am.J.Phys*., 33, 712, 1965.

SEARS & ZEMANSKY; YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física*. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

SERWAY, R. A. *Física*. 3. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda., 2004.

TIPLER, P. A. *Física para cientistas e engenheiros*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ed. Guanabara, 2000.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Sistema Internacional de Unidades (SI)

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo	
	Unidades fundamentais		
Comprimento	metro	m	
Massa	quilograma	kg	
Tempo	segundo	s	
Corrente	ampère	A	
Temperatura	kelvin	K	
Intensidade luminosa	candela	cd	
Quantidade de substância	mole	mol	
	Unidades derivadas		Unidades equivalentes
Área	metro quadrado	m^2	
Volume	metro cúbico	m^3	
Frequência	hertz	Hz	s^{-1}
Velocidade	metro por segundo	m/s	
Velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
Aceleração	metro por segundo quadrado	m/s^2	
Aceleração angular	radiano por segundo quadrado	rad/s^2	
Força	newton	N	$kg.m/s^2$
Pressão	pascal	Pa	N/m^2
Trabalho, energia	joule	J	N.m
Potência	watt	W	J/s
Carga elétrica	coulomb	C	A.s
Potencial elétrico	volt	V	J/C
Intensidade de campo elétrico	newton por coulomb	N/C	V/m
Resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
Capacitância	farad	F	C/V
Fluxo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
Campo magnético	tesla	T	Wb/m^2
Indutância	henry	H	Wb/A

Definições de unidades do SI

Metro (*m*)	O **metro** é a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299.792.458 *s*.
Quilograma (*kg*)	O **quilograma** é a massa do corpo padrão internacional preservado em Sèvres, na França.
Segundo (*s*)	O **segundo** é a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de ^{133}Cs.
Ampère (*A*)	O **ampère** é a corrente que em dois fios paralelos de comprimento infinito, separados de 1 m, provoca uma força magnética por unidade de comprimento de 2×10^{-7} *N/m*.
Kelvin (*K*)	O **kelvin** é igual a 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água.
Candela (*cd*)	A **candela** é a intensidade luminosa na direção perpendicular da superfície de um corpo negro cuja área é de 1/600.000 m^2 na temperatura de solidificação da platina a uma pressão de 1 *atm*.
Mole (*mol*)	O **mole** é a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos átomos de carbono em 0,012 *kg* de carbono-12.

APÊNDICE B

Constantes numéricas

Constantes físicas*

Constante de gravitação	G	$6{,}673(10) \times 10^{-11}$ $N\text{-}m^2/kg^2$
Velocidade da luz	c	$2{,}99792458 \times 10^{8}$ m/s
Carga do elétron	e	$1{,}602176462(63) \times 10^{-19}$ C
Número de Avogadro	N_A	$6{,}02214199(47) \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante dos gases perfeitos	R	$8{,}314472(15)$ $J/(mol \times K)$
Constante de Boltzman	$k = R/N_A$	$1{,}3806503(24) \times 10^{-23}$ J/K
		$8{,}617342(15) \times 10^{-5}$ eV/K
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = (\pi^2/60)\, k^4/(\hbar^3 c^2)$	$5{,}670400(40) \times 10^{-8}$ $W/(m^2k^4)$
Constante de massa atômica	m_u	$1{,}66053873(13) \times 10\text{-}^{27}$ $kg = 1u$
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$	$8{,}987551788 \ldots \times 10^{9}$ $N\text{-}m^2/C^2$
Permissividade elétrica do vácuo	ε_0	$8{,}854187817 \ldots \times 10^{-12}$ $C^2/(N\text{-}m^2)$
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$4\,\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
		$1{,}256637 \times 10^{-6}$ N/A^2
Constante de Planck	h	$6{,}62606876(52) \times 10^{-34}$ $J\text{-}s$
		$4{,}13566727(16) \times 10^{-15}$ $eV\text{-}s$
	$\hbar = h/2\pi$	$1{,}054571596(82) \times 10^{-34}$ $J\text{-}s$
		$6{,}58211889(26) \times 10^{-16}$ $eV\text{-}s$
Massa do elétron	m_e	$9{,}10938188(72) \times 10^{-31}$ kg
Massa do próton	m_p	$1{,}67262158(13) \times 10^{-27}$ kg
Massa do nêutron	m_n	$1{,}67492716(13) \times 10^{-27}$ kg
Comprimento de onda de Compton	$l_C = h/m_e c$	$2{,}426310215(18) \times 10^{-12}$ m
Constante de Rydberg	R_H	$1{,}0973731568549(83) \times 10^{7}$ m^{-1}
Magnéton de Bohr	$m_B = eh/2m_e$	$9{,}274000899(37) \times 10^{-24}$ J/T
		$5{,}788381749(43) \times 10^{-5}$ eV/T
Magnéton nuclear	$m_n = eh/2m_p$	$5{,}05078317(20) \times 10^{-27}$ J/T
		$3{,}152451238(24) \times 10^{-8}$ eV/T

Quantum do fluxo magnético	$\Phi_0 = h/2e$	$2{,}067833636(81) \times 10^{-15}\ T\text{-}m^2$
Resistência Hall quantizada	$R_K = h/e^2$	$2{,}5812807572(95) \times 10^4\ \Omega$

* Os números entre parênteses indicam as incertezas dos últimos dois dígitos; por exemplo, o número 1,4585(34) significa 1,4585 ± 0,0034. Os valores que não possuem incertezas são exatos.

Dados terrestres

Aceleração média da gravidade g (valor padrão ao nível do mar a uma latitude de 45°)	$9{,}80665\ m/s^2$
Massa da Terra, M_T	$5{,}98 \times 10^{24}\ kg$
Raio médio da Terra, R_T	$6{,}37 \times 10^6\ m$
Velocidade de escape	$1{,}12 \times 10^4\ m/s$
Constante solar*	$1{,}35\ kW/m^2$
Condições normais de temperatura e pressão (CNTP):	
Temperatura	$273{,}15\ K$
Pressão	$101{,}325\ kPa = 1\ atm$
Massa molar do ar	$28{,}97\ g/mol$
Massa específica do ar (CNTP), ρ_{ar}	$1{,}293\ kg/m^3$
Velocidade do som (CNTP)	$331\ m/s$
Calor de fusão da água (a 0°C e 1 atm)	$333{,}5\ kJ/kg$
Calor de vaporização da água (a 100°C e 1 atm)	$2{,}257\ MJ/kg$

*Potência média incidente em uma área de 1 m^2 perpendicular aos raios solares, fora da atmosfera terrestre a uma distância média entre a Terra e o Sol.

Dados astronômicos

Terra	
Distância à Lua*	$3{,}844 \times 10^8\ m$
Distância ao Sol*	$1{,}496 \times 10^{11}\ m$
Velocidade orbital média	$2{,}98 \times 10^4\ m/s$
Lua	
Massa	$7{,}35 \times 10^{22}\ kg$
Raio	$1{,}738 \times 10^6\ m$
Período	27,32 dias
Aceleração da gravidade na superfície	$1{,}62\ m/s^2$
Sol	
Massa	$1{,}99 \times 10^{30}\ kg$
Raio	$6{,}96 \times 10^8\ m$

*De centro a centro.

APÊNDICE C

Fatores de conversão de unidades

Comprimento

1 km = 0,6215 mi

1 mi = 1,609 km

1 m = 1,0936 $jarda$ = 3,281 ft = 39,37 in

1 in = 2,54 cm

1 ft = 12 in = 30,48 cm

1 $jarda$ = 3 ft = 91,44 cm

1 $ano\text{-}luz$ = 1 $c \cdot ano$ = 9,461 × 10^{15} m

1 Å = 0,1 nm

Área

1 m^2 = 10^4 cm^2

1 km^2 = 0,3861 mi^2 = 247,1 $acres$

1 in^2 = 6,4516 cm^2

1 ft^2 = 9,29 × 10^{-2} m^2

1 m^2 = 10,76 ft^2

1 $acre$ = 43.560 ft^2

1 mi^2 = 640 $acres$ = 2,590 km^2

Volume

1 m^3 = 10^6 cm^3

1 L = 1.000 cm^3 = 10^{-3} m^3

1 gal = 3,786 L

1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 in^3

1 in^3 = 16,39 cm^3

1 ft^3 = 1728 in^3 = 28,32 L

= 2,832 × 10^4 cm^3

Tempo

1h = 60 min = 3,6 ks

1 dia = 24h = 1440 min = 86,4 ks

1 ano = 365,24 dias = 3,156 × $10^7 s$

Velocidade

1 m/s = 3,6 km/h

1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6215 mi/h

1 mi/h = 0,4470 m/s = 1,609 km/h

1 mi/h = 1,467 ft/s

Ângulo e Velocidade Angular

π rad = 180º

1 rad = 57,30º

1º = 1,745 × 10^{-2} rad

1 rpm = 0,1047 rad/s

1 rad/s = 9,549 rpm

Massa

1 kg = 1000 g

1 t = 1.000 kg = 1 Mg

1 u = 1,6606 × 10^{-27} kg

1 kg = 6,022 × 10^{26} u

1 $slug$ = 14,59 kg

1 kg = 6,852 × 10^{-2} $slug$

1 u = 931,50 MeV/c^2

Massa específica

1 g/cm^3 = 1.000 kg/m^3 = 1 kg/L

(1 g/cm^3)g = 62,4 lb/ft^3

Força

1 N = 0,2248 lb = 10^5 dyn

1 lb = 4,448222 N

(1 kg)g = 2,2046 lb

Pressão

1 Pa = 1 N/m^2

1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bar

1 atm = 14,7 lb/in^2 = 760 $mmHg$

= 29,9 in Hg = 33,8 ftH_2O

1 lb/in^2 = 6,895 kPa

1 $torr$ = 1 $mmHg$ = 133,32 Pa

1 bar = 100 kPa

Energia

1 kWh = 3,6 MJ

1 cal = 4,1840 J

1 $ft \cdot lb$ = 1,356 J = $1{,}286 \times 10^{-3}$ Btu

1 $L \cdot atm$ = 101,325 J

1 $L \cdot atm$ = 24,217 cal

1 Btu = 778 $ft \cdot lb$ = 252 cal = 1054,35 J

1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J

1 $u \cdot c^2$ = 931,50 MeV

1 erg = 10^{-7} J

Potência

1 HP = 550 $ft \cdot lb/s$ = 745,7 W

1 Btu/h = 1,055 kW

1 W = $1{,}341 \times 10^{-3}$ HP = 0,7376 $ft \cdot lb/s$

APÊNDICE D

Relações matemáticas

Álgebra

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{(x+y)} = a^x a^y \qquad a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}$$

Logaritmos: Se $log\ a = x$, então $a = 10^x$. Se $ln\ a = x$, então $a = e^x$.

$log\ a + log\ b = log\ (ab)$ $\qquad$ $ln\ a + ln\ b = ln\ (ab)$

$log\ a - log\ b = log\ (a/b)$ $\qquad$ $ln\ a - ln\ b = ln\ (a/b)$

$log\ (a^n) = n\ log\ a$ $\qquad$ $ln\ (a^n) = n\ ln\ a$

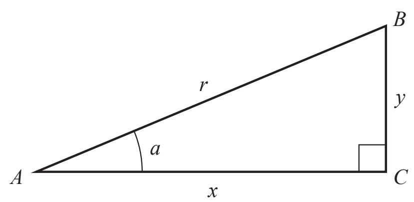
Equação do segundo grau: Se $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Série binomial

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots$$

Trigonometria

No triângulo retângulo ABC, $x^2 + y^2 = r^2$.



Definição das funções trigonométricas:

$sen\ a = y/r$ $\qquad$ $cos\ a = x/r$

$tan\ a = y/x$ $\qquad$ $cot\ a = x/y$

$sec\ a = r/x$ $\qquad$ $csec\ a = r/y$

Identidades

$$sen^2a + cos^2a = 1$$

$$sen2a = 2sena\ cosa$$

$$sen\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-cosa}{2}}$$

$$sen(-a) = -sena$$

$$cos(-a) = cosa$$

$$sen(a \pm \pi/2) = \pm cosa$$

$$cos(a \pm \pi/2) = \mp sena$$

$$tana = \frac{sena}{cosa}$$

$$cos2a = cos^2a - sen^2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sen^2a$$

$$cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+cosa}{2}}$$

$$sen(a \pm b) = sena\ cosb \pm cosa\ senb$$

$$cos(a \pm b) = cosa\ cosb \mp sena\ senb$$

$$sena + senb = 2sen\frac{1}{2}(a+b)cos\frac{1}{2}(a-b)$$

$$cosa + cosb = 2cos\frac{1}{2}(a+b)cos\frac{1}{2}(a-b)$$

Geometria

Comprimento de uma circunferência de raio r: $C = 2\pi r$.

Área de um círculo de raio r:	$A = \pi r^2$.
Volume de uma esfera de raio r:	$V = 4\pi r^3/3$.
Área da superfície de uma esfera de raio r:	$A = 4\pi r^2$.
Volume de um cilindro de raio r e altura h:	$V = \pi r^2 h$.

Séries de potências

Convergentes para os valores de x indicados.

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots \quad (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} + \cdots \quad (x^2 < 1)$$

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{todo valor de } x)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{todo valor de } x)$$

$$tanx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{todo valor de } x)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

Derivadas e integrais

Nas fórmulas que se seguem, u e v representam quaisquer funções de x, sendo a e m constantes. A cada uma das integrais indefinidas deve ser adicionada uma constante de integração arbitrária.

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$$

$$\frac{d}{dx}lnx = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}senx = cosx$$

$$\frac{d}{dx}cosx = -senx$$

$$\frac{d}{dx}tanx = sec^2x$$

$$\frac{d}{dx}cotx = -csec^2x$$

$$\frac{d}{dx}secx = tanx\ secx$$

$$\frac{d}{dx}csecx = -cotx\ csecx$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

$$\int dx = x$$

$$\int au\ dx = a\int u\ dx$$

$$\int (u+v)\ dx = \int u\,dx + \int v\ dx$$

$$\int x^m\ dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x|$$

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$$

$$\int e^x\ dx = e^x$$

$$\int senx\ dx = -cosx$$

$$\int cosx\ dx = senx$$

$$\int tanx\ dx = ln|secx|$$

$$\int sen^2x\ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen2x$$

$$\int e^{-ax}\ dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

$$\int xe^{-ax}\ dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$$

$$\int x^2e^{-ax}\ dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)e^{-ax}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\ dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\ dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Sinais e símbolos matemáticos

$=$	é igual a
$\equiv$	é definido por
$\neq$	é diferente de
$\approx$	é aproximadamente igual a
$\sim$	é da ordem de
$\propto$	é proporcional a
$>$	é maior que
$\geq$	é maior ou igual a
$>>$	é muito maior que
$<$	é menor que
$\leq$	é menor ou igual a
$<<$	é muito menor que
$\pm$	mais ou menos
Δx	variação de x
dx	variação diferencial de x
$\bar{x}$	valor médio de x
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
$\lvert \vec{v} \rvert$	intensidade ou módulo de $\vec{v}$
$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots 1$
Σ	somatório
lim	limite
$\Delta t \to 0$	Δt tende a zero
$\dfrac{dx}{dt}$	derivada de x em relação a t
$\dfrac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x em relação a t
$\int$	integral

Alfabeto grego

Nome	Maiúscula	Minúscula	Nome	Maiúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Nu	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ε	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Ômega	Ω	ω

APÊNDICE E

Tabela periódica

Z — Número atômico
E
A — Massa atômica

1 1A	2 2A	3 3B	4 4B	5 5B	6 6B	7 7B	8	9 8B	10	11 1B	12 2B	13 3A	14 4A	15 5A	16 6A	17 7A	18 0
1 H 1,0																	2 He 4
3 Li 6,9	4 Be 9											5 B 10,8	6 C 12	7 N 14	8 O 16	9 F 19	10 Ne 20,2
11 Na 23	12 Mg 24,3											13 Al 27	14 Si 28,1	15 P 31	16 S 32,1	17 Cl 35,5	18 Ar 39,9
19 K 39,1	20 Ca 40,1	21 Sc 45	22 Ti 47,9	23 V 50,9	24 Cr 52	25 Mn 54,9	26 Fe 55,8	27 Co 58,9	28 Ni 58,7	29 Cu 63,5	30 Zn 65,4	31 Ga 69,7	32 Ge 72,6	33 As 74,9	34 Se 79	35 Br 79,9	36 Kr 83,8
37 Rb 85,5	38 Sr 87,6	39 Y 88,9	40 Zr 91,2	41 Nb 92,9	42 Mo 95,9	43 Tc 97	44 Ru 101,1	45 Rh 102,9	46 Pd 106,4	47 Ag 107,9	48 Cd 112,4	49 In 114,8	50 Sn 118,7	51 Sb 121,8	52 Te 127,6	53 I 126,9	54 Xe 131,3
55 Cs 132,9	56 Ba 137,3	57 La 138,9	72 Hf 178,5	73 Ta 180,9	74 W 183,8	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,1	78 Pt 195,1	79 Au 197	80 Hg 200,6	81 Tl 204,4	82 Pb 207,2	83 Bi 209	84 Po 209	85 At 210	86 Rn 222
87 Fr 223	88 Ra 226	89 Ac 227															

58 Ce 140,1	59 Pr 140,9	60 Nd 144,2	61 Pm 145	62 Sm 150,4	63 Eu 152	64 Gd 157,3	65 Tb 158,9	66 Dy 162,5	67 Ho 164,9	68 Er 167,3	69 Tm 168,9	70 Yb 173	71 Lu 175
90 Th 232	91 Pa 231	92 U 238	93 Np 237	94 Pu 242	95 Am 247	96 Cm 247	97 Bk 247	98 Cf 251	99 Es 252	100 Fm 257	101 Md 258	102 No 259	103 Lr 260

A presente edição foi composta pela Editora UFMG, em caracteres Chaparral Pro e Optima Std, e impressa pela Imprensa Universitária da UFMG, em sistema offset 90g (miolo) e cartão supremo 250g (capa), em 2010.