1. Danilo foi à padaria, mas percebeu que só tinha dinheiro para comprar 15 pães de sal ou 10 pães doces, não sobrando troco nos dois casos. Sendo assim, Danilo resolveu comprar quantidades iguais de pães dos dois tipos gastando todo o seu dinheiro.

   Quantos pães de cada tipo ele comprou?

   Solução:

   A razão entre o número de pães de sal e pães doce que podem ser comprados com o dinheiro de Danilo é $\frac{15}{10}$ ou $\frac{3}{2}$. Ou seja, o preço do pão doce é 1,5 vezes o do pão de sal.

   Como ele comprou quantidades iguais de cada pão, para cada dupla de pão de sal e pão doce comprada, ele gasta o equivalente a 2,5 pães de sal.

   Logo, dividindo-se 15 por 2,5 obtém-se 6, que é o número de pães de cada tipo que Danilo comprou.

2. Prove que, se m e n são números inteiros positivos, então $mn(m+n)$ é sempre um número par.

Solução:

Sabe-se que um número par multiplicado por um número qualquer resulta em um número par.

Dividiremos este problema em 3 casos:

- Com m e n pares, será o produto de dois números pares, multiplicando uma soma de dois pares, que resulta em um número par.
- Com apenas m par ou apenas n par, o produto $m \times n$ será par, portanto o resultado final também será par.
- Com m e n ímpares, a soma $m + n$ será par, portanto o resultado final também será par.

Dessa forma fica provado que $mn(m + n)$ é sempre um número par.

3. Em um certo ano bissexto (isto é, um ano que tem 366 dias) o número de sábados foi maior do que o número de domingos.

   Em que dia da semana caiu o dia 20 de janeiro desse ano? Justifique a sua resposta.

   Solução:

   O número de semanas que este ano terá é dado pelo quociente da divisão de 366 por 7. Como $366 = 52 \times 7 + 2$, o ano terá 52 semanas e dois dias. Podemos então considerar apenas se há algum sábado ou domingo nos dois primeiros dias do ano, pois em cada uma das semanas subsequentes há um sábado e um domingo. Observamos que:

   1) Se 01/01 for um sábado, 02/01 será domingo e por isso haverá exatamente 53 sábados e 53 domingos no ano.
   2) Se 02/01 for um sábado, haverá exatamente 53 sábados e 52 domingos.
   3) Se nem 01/01 nem 02/01 for sábado, então haverá exatamente 52 sábados no ano e o número de domingos será 52 ou 53, dependendo de o dia 01/01 ser domingo ou não.

   Sendo assim, para garantir que o número de sábados deste ano será maior que o número de domingos, devemos ter um sábado no dia 02/01. Mas então, os dias 09/01 e 16/01 também serão sábados e portanto o dia 20/01 cairá na quarta-feira.

4. Qual é o menor número de 12 algarismos que pode ser formado de modo que a soma de seus algarismos seja igual a 80?

Solução:

Buscamos o menor número natural que satisfaz às condições do enunciado.

Primeiramente, o número deve iniciar com o algarismo 1.

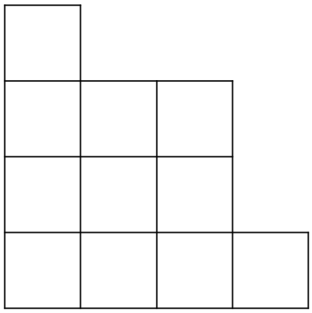
Queremos que a soma de 11 algarismos dê 79 usando a maior quantidade de zeros possível, pois assim o número final será menor. Com um zero depois do 1, restam 10 algarismos cuja soma deve dar 79. Com dois zeros depois do 1, restam 9 algarismos cuja soma deve dar 79. Mas com três zeros não é possível somar 8 algarismos cuja soma dê 79, portanto o número que buscamos possui 100 como seus três primeiros algarismos.

Agora basta encontrar o menor número de 9 algarismos cuja soma dê 79, e esse número é o 799999999

Logo, o menor número natural de 12 algarismos cuja soma deles é 80 é o número 100799999999.

OBS: O enunciado desta questão não deixou claro a qual o conjunto numérico o número deveria pertencer. A solução acima foi com base no conjunto $\mathbb{N}$. Para os números $\mathbb{Z}$ a resposta seria -999999998000. Apesar dessa dúvida, nenhum aluno apresentou raciocínio que envolvesse números inteiros.

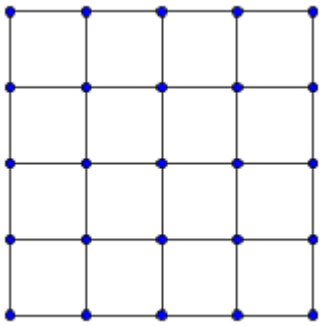
5. Uma pilha de caixas cúbicas foi montada de modo que se enxergue uma mesma imagem ao observá-la de frente, de lado, ou por cima. A figura abaixo representa essa imagem:



Sabe-se que a pilha foi construída empilhando-se exatamente 18 caixas.

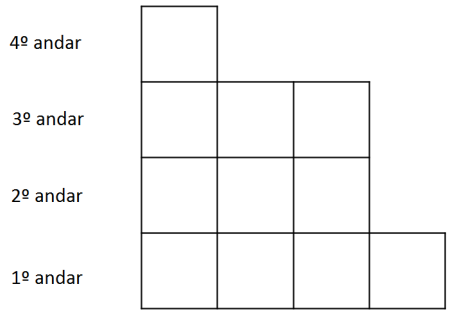
(a) Quantos andares possui a pilha de caixas?

(b) Monte uma configuração em andares para a pilha de caixas, usando exatamente 18 caixas. Para isso, faça desenhos que representem o empilhamento. Represente como ficou cada andar colorindo os quadrados no diagrama abaixo. É necessário um diagrama por andar.



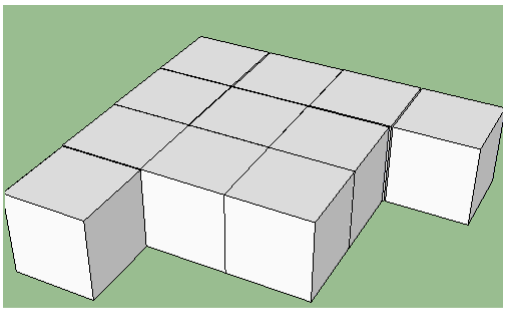
1^o andar

Solução:



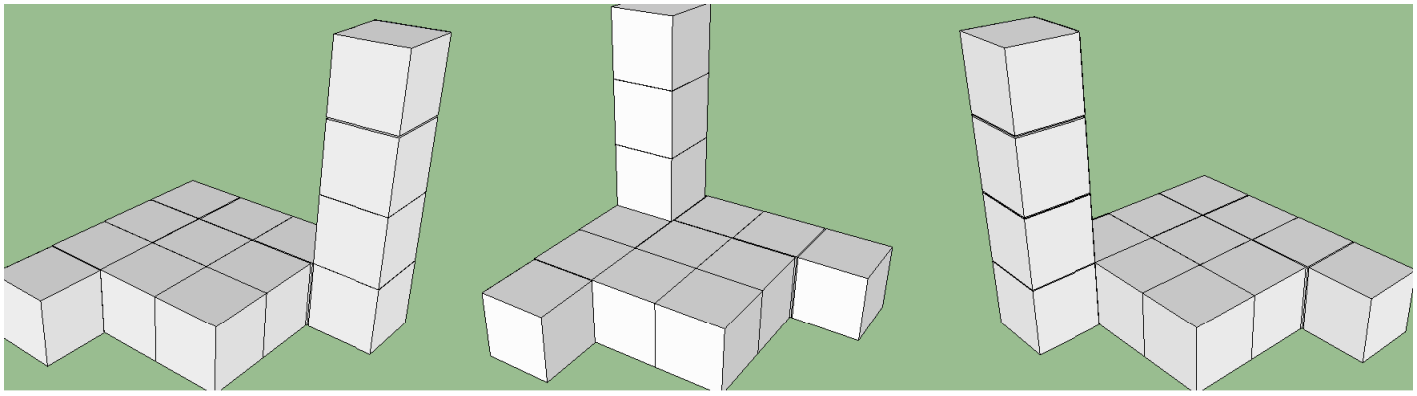
(a) Considerando-se a imagem acima como a pilha de caixas observada de frente, conclui-se que ela possui 4 andares.

(b) Considerando-se agora a imagem dada como a vista por cima da pilha, nota-se que ela representa a configuração do primeiro andar da mesma, já que as caixas não podem flutuar.



1º andar

Dessa forma foram utilizadas 11 caixas para se montar o 1^o andar. Voltando a considerar a vista frontal da pilha, observa-se que em uma das extremidades da fileira com quatro caixas, existem três caixas empilhadas, uma em cima da outra, para formar o 4^o andar, que podem ser feitas de três maneiras diferentes.

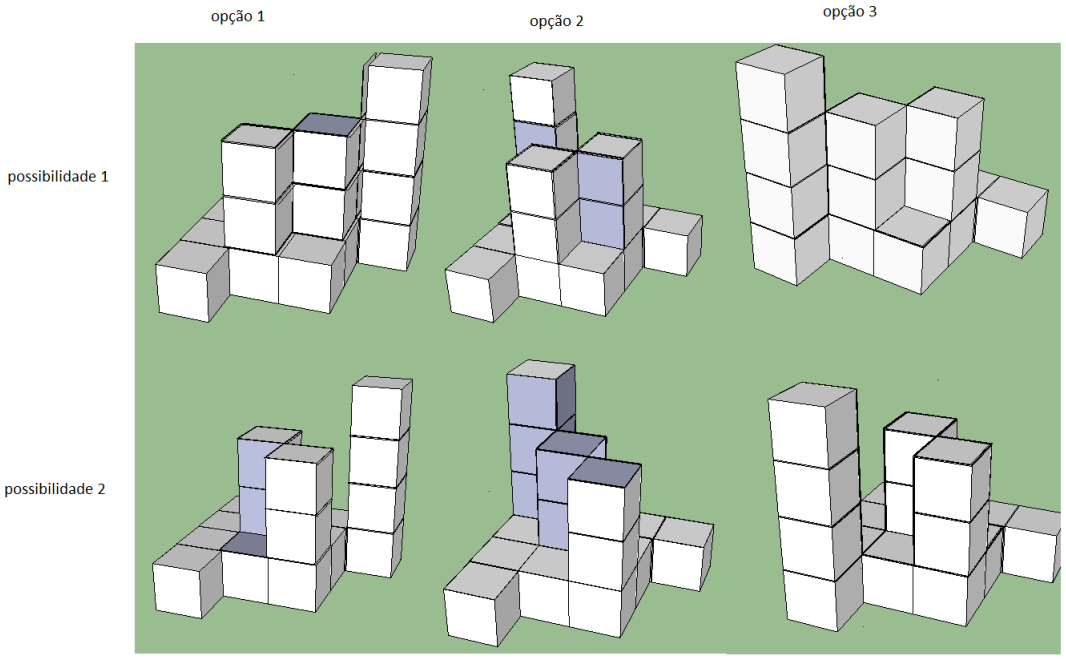


opção 1 opção 2 opção 3

Dessa forma foram utilizadas mais três caixas, totalizando 14, das 18 que podem ser usadas.

Analisando-se mais uma vez a vista frontal da pilha, observa-se que as duas caixas do meio, pertencentes a fileira com quatro caixas, possuem cada uma, mais duas caixas acima delas. Com mais essas quatro caixas, o limite de 18 é alcançado.

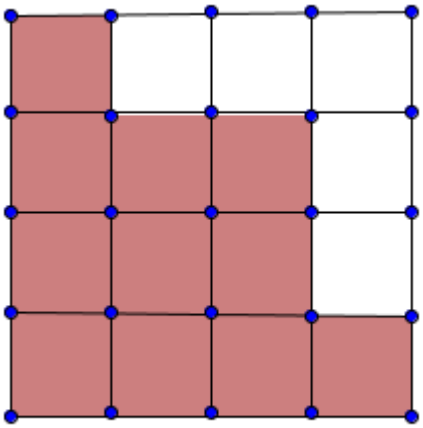
A partir deste ponto da resolução, existem duas possibilidades para se solucionar o problema para cada opção escolhida no passo anterior. São as seguintes:



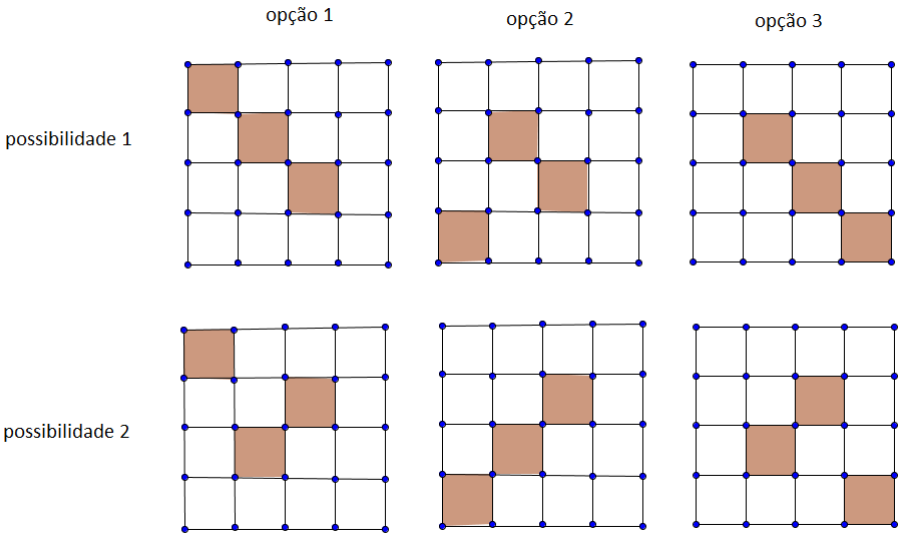
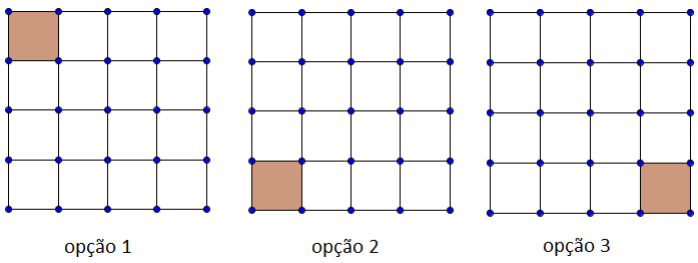
Essas seis pilhas de caixas representadas tridimensionalmente acima são as únicas que obedecem às condições do enunciado.

As soluções em diagrama de pontinhos, correspondentes a cada andar, estão dispostas abaixo:

Primeiro andar:



Segundo e terceiro andares:



Quarto andar: