1. Um número inteiro positivo é dito *maneiro* se a soma de seus dígitos divide o próprio número.

   (a) Quantos números maneiros são primos? (Lembre-se de que 1 não é primo)

   (b) Quantos são os números maneiros n, $0 < n < 1000$, tais que o produto dos algarismos de n é um número primo?

2. O grupo A da Copa do Mundo de futebol 2010 terminou com os seguintes resultados:

País	Pontos	GM	GS
Uruguai	7	4	0
México	4	3	2
África do Sul	4	3	?
França	1	1	4

   (GM = gols marcados, GS = gols sofridos)

   (a) Quantos gols a África do Sul sofreu?

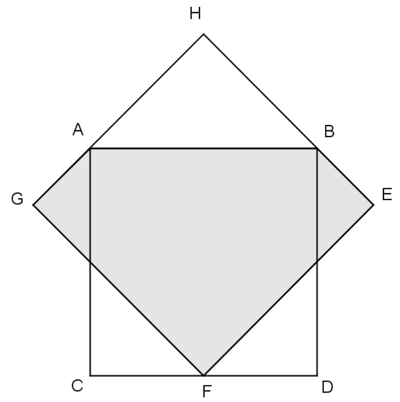
   (b) Sabe-se que:

   - o Uruguai não marcou nenhum gol em sua partida contra a França e não ganhou duas partidas pelo mesmo placar;
   - a França fez um gol contra a África do Sul e não tomou três gols numa mesma partida.

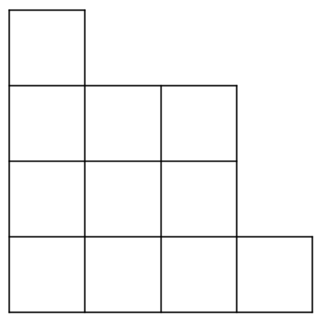
   Determine o placar da partida África do Sul contra México.

   Obs: cada seleção jogou contra as demais exatamente uma vez. Em cada partida, o time vencedor ganhou três pontos e o perdedor nenhum ou, em caso de empate, cada time ganhou um ponto.

3. Na figura abaixo, $ABDC$ e $EFGH$ são quadrados, $A \in \overline{GH}, B \in \overline{HE}, F$ é ponto médio de DC e a diagonal FH é perpendicular a DC. Qual área é maior, a do quadrado $ABDC$ ou a do pentágono $ABEFG$? Justifique.



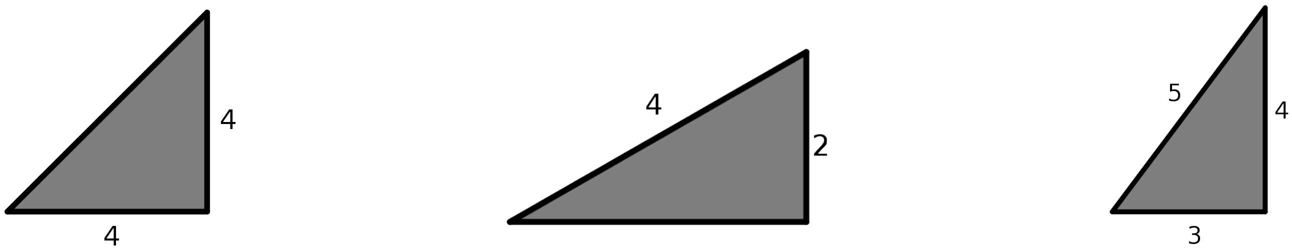
4. Uma pilha de caixas cúbicas foi montada de modo que se enxergue uma mesma imagem ao observá-la de frente, de lado, ou por cima. A figura abaixo representa essa imagem:



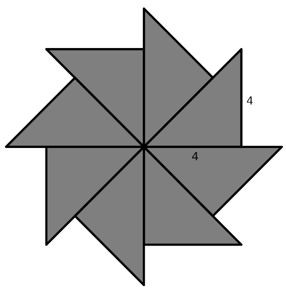
(a) Qual o número máximo de caixas que podem ser utilizadas na construção dessa pilha, de forma que ela satisfaça a condição do enunciado?

(b) Qual o número mínimo de caixas necessárias para a construção dessa pilha, de forma que ela satisfaça a condição do enunciado?

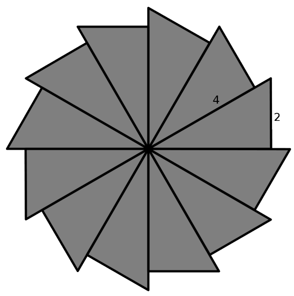
5. Othon dispunha de triângulos retângulos de papelão de três tipos diferentes, esquematizados a seguir:



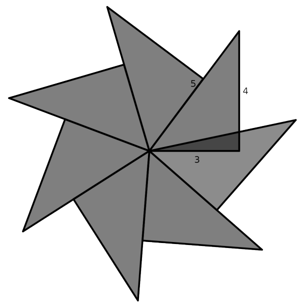
Justapondo um cateto de um triângulo à hipotenusa de outro do mesmo tipo de forma sucessiva, conforme as figuras abaixo, o primeiro e o segundo tipos formam "cataventos", enquanto o terceiro não.



Catavento de 1 volta



Catavento de 1 volta

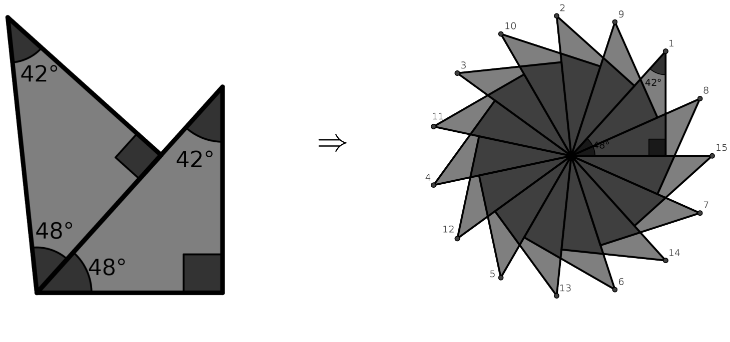


Não se formou um catavento

(a) Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que seja possível formar com ele um catavento. Aplique essa condição e verifique que os dois primeiros triângulos realmente formam cataventos.

Dica: analise o ângulo do vértice comum aos triângulos justapostos.

(b) Othon percebeu que, justapondo triângulos como o abaixo, não se gerava um catavento; mas caso continuasse a justaposição após completada a primeira volta, a segunda volta terminava onde a primeira havia começado.



Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que o final da p-ésima volta coincida com o início da primeira volta. Aplique essa condição e verifique que no triângulo acima isso ocorre ao final da segunda volta.

OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2010

Nível II

Nome:
Endereço:
Escola: Série:
Cidade: Telefone:
e-mail:

Instruções:

- A duração da prova é de 2h30.
- É proibido o uso de calculadoras.
- Ao preencher as informações acima, use letra legível e deixe pelo menos um telefone de contato ou recado.
- Para garantir o sigilo da prova seu professor recolherá os enunciados.
- A interpretação dos enunciados faz parte das questões, portanto seu professor não poderá responder perguntas durante a prova.
- Anexe **TODAS** as folhas usadas para a resolução a esta prova. Seu rascunho unicamente será usado a seu favor e nunca contra.
- Respostas sem justificativa não serão consideradas.
- A organização da OMM se reserva o direito de anular a prova com suspeita de fraude.

Para uso exclusivo do corretor

1	2	3	4	5	Total