1. Um número inteiro positivo é dito *maneiro* se a soma de seus dígitos divide o próprio número.

   (a) Quantos números maneiros são primos? (Lembre-se de que 1 não é primo)

   (b) Quantos são os números maneiros n, $0 < n < 1000$, tais que o produto dos algarismos de n é um número primo?

Solução:

(a) Os únicos divisores de um número primo são o 1 e o próprio número. Então, a soma dos algarismos de um número como pedido deverá valer 1 ou o próprio número. Entretanto, só têm soma de algarismos igual a 1 os números da forma $10^n, n \in \mathbb{N}$, e nenhum deles é primo. Então, a soma dos algarismos deve ser igual ao próprio número.

Sabe-se que para um número com dois ou mais algarismos a soma deles é sempre menor que o próprio número. (Demonstração no final da solução)

Portanto somente os 4 números primos de um algarismo são solução para o problema.

S = 2, 3, 5, 7

(b) Os algarismos dos números pedidos devem ser os divisores de números primos, que só podem ser o 1 ou o próprio número primo (e este só pode aparecer uma vez). Portanto, devemos formar números de um, dois ou três algarismos todos iguais a 1 ou com um algarismo pertencente ao conjunto $\{2, 3, 5, 7\}$ e os restantes iguais a 1.

São eles:

- Com 1 algarismo: 2, 3, 5, 7 = 4 números.
- Com 2 algarismos: $1\square + \square 1 = 8$ números.
- Com 3 algarismos: $11\square + 1\square 1 + \square 11 = 12$ números.

Com $\square \in \{2, 3, 5, 7\}$

Obtemos então 4+8+12 = 24 números cujo produto é um número primo.

Porém, desses somente 11 são maneiros, ou seja, aqueles cuja soma dos algarismos divide o próprio número: $\{2, 3, 5, 7, 12, 21, 112, 117, 171, 511, 711\}$

Demonstração

Um número $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0$ com n algarismos se escreve na forma

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0$$

Portanto a diferença entre o número e a soma de seus algarismos se escreve

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0 - a_n - a_{n-1} - ... - a_1 - a_0$$
$$a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + ... + a_1(10 - 1)$$

O resultado da conta acima, visivelmente é positivo.

Com isso está provado que a soma dos algarismos de um número é sempre menor que o próprio número.

2. O grupo A da Copa do Mundo de futebol 2010 terminou com os seguintes resultados:

País	Pontos	GM	GS
Uruguai	7	4	0
México	4	3	2
África do Sul	4	3	?
França	1	1	4

(GM = gols marcados, GS = gols sofridos)

(a) Quantos gols a África do Sul sofreu?

(b) Sabe-se que:

- o Uruguai não marcou nenhum gol em sua partida contra a França e não ganhou duas partidas pelo mesmo placar;
- a França fez um gol contra a África do Sul e não tomou três gols numa mesma partida.

Determine o placar da partida África do Sul contra México.

Obs: cada seleção jogou contra as demais exatamente uma vez. Em cada partida, o time vencedor ganhou três pontos e o perdedor nenhum ou, em caso de empate, cada time ganhou um ponto.

Solução:

(a) Todo gol que foi marcado por um time, foi sofrido por algum outro time, e portanto o total de gols marcados é igual ao total de gols sofridos. Equacionando, temos:

$$4 + 3 + 3 + 1 = 0 + 2 + ? + 4$$

$$? = 5$$

Resposta: 5

(b) Considere a tabela abaixo com os placares de cada partida. O número subscrito aos valores da tabela indicam, na lista abaixo dela, o argumento que faz com que tal valor seja o único possível para aquela posição.

Uruguai	1_{iv}	0_{iii}	México
Uruguai	3_{iv}	0_{iii}	África do Sul
Uruguai	0_{i}	0_{ii}	França
México	1_{v}	1_{vi}	África do Sul
México		0_{ii}	França
África do Sul		1_{i}	França

i. Dados do problema.

ii. Como a França só fez um gol, que foi contra a África do Sul, nos outros jogos ela não fez gols.

iii. O Uruguai não sofreu nenhum gol.

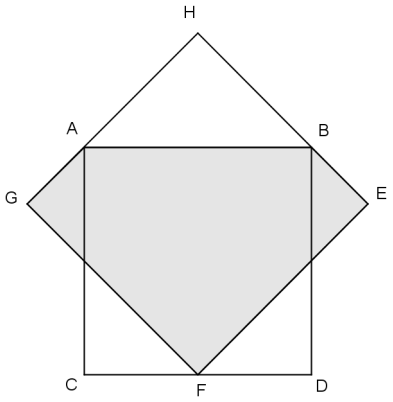
iv. Como o Uruguai marcou 7 pontos, ele teve duas vitórias e um empate por 0 x 0 (contra a França, como já vimos), e então ele marcou 4 gols em suas duas vitórias. Como o problema diz que o Uruguai não ganhou duas partidas pelo mesmo placar, ele tem que ter ganho uma por 3 x 0 e outra por 1 x 0. Como o México não sofreu 3 gols nem em toda a fase, o jogo em que o Uruguai marcou três gols foi contra a África do Sul.

v. Como a África do Sul sofreu 5 gols e 4 deles já foram "localizados"em duas partidas, ela tem que ter sofrido um gol do México.

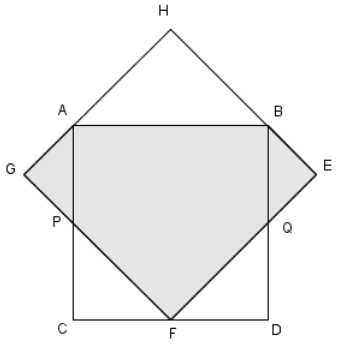
vi. Como o México sofreu 2 gols e 1 já foi "localizado"em duas partidas, ele tem que ter sofrido um gol da África do Sul.

Resposta: México 1 x 1 África do Sul

3. Na figura abaixo, $ABDC$ e $EFGH$ são quadrados, $A \in \overline{GH}, B \in \overline{HE}, F$ é ponto médio de DC e a diagonal FH é perpendicular a DC. Qual área é maior, a do quadrado $ABDC$ ou a do pentágono $ABEFG$? Justifique.



Solução:

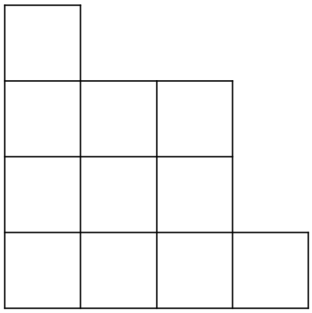


Note que a área do pentágono é igual à área do quadrado ABDC, menos as dos triângulos CPF e DQF, mais a dos triângulos GPA e EQB. Portanto, basta comparar as áreas do ΔCPF e do ΔGPA.

Sejam $P = \overline{AC} \cap \overline{FG}$ e $Q = \overline{BD} \cap \overline{EF}$. Como $\overline{FH}$, diagonal do quadrado, é bissetriz de $\angle GFE = 45°$; e como $\angle CFH = 90°$, temos que $\angle CFP = 45°$, e então ΔCPF é retângulo isósceles. Analogamente, $\angle DFQ = 45°$, e $\Delta CPF \overset{\text{ALA}}{\approx} \Delta DQF$. Como o $\angle CPF$ é O.P.V. ao $\angle GPA$ e $\angle AGP = 90°$, então $\Delta CPF \overset{\text{AAA}}{\sim} \Delta GPA$. Analogamente, $\Delta DQF \overset{\text{AAA}}{\sim} \Delta EQB$; e mais, como $\overline{GP} = \overline{GF} - \overline{PF}$, e $\overline{GF} = \overline{EF}$ (lados do quadrado) e $\overline{PF} = \overline{QF}$, pela congruência de ΔCPF e ΔDQF, temos que $\overline{GP} = \overline{EQ}$, e então $\Delta GPA \overset{\text{LAL}}{\approx} \Delta EQB$.

Como ΔCPF e ΔDQF são semelhantes, pelo caso AAA, basta comparar lados correspondentes. Sendo ℓ o lado do quadrado, temos que a hipotenusa do ΔCPF mede $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$. A hipotenusa do ΔGPA é igual a ℓ menos $\overline{PC}$. Entretanto, como ΔCPF é isósceles, $\overline{PC} = \overline{CF} = \frac{\ell}{2}$, e então a hipotenusa do ΔGPA mede $\frac{\ell}{2}$. Como a hipotenusa do ΔCPF é maior, sua área também é maior, e então a área do quadrado é maior que a do pentágono.

4. Uma pilha de caixas cúbicas foi montada de modo que se enxergue uma mesma imagem ao observá-la de frente, de lado, ou por cima. A figura abaixo representa essa imagem:



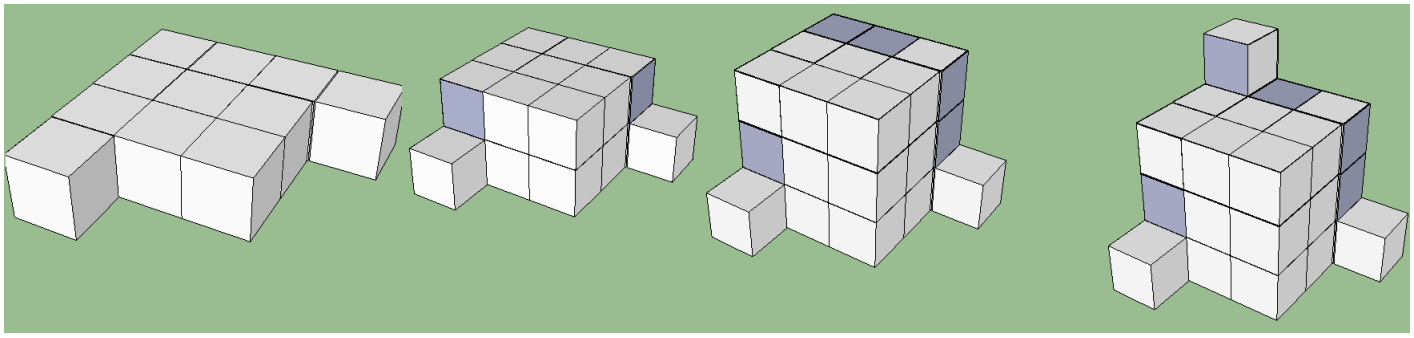
(a) Qual o número máximo de caixas que podem ser utilizadas na construção dessa pilha, de forma que ela satisfaça a condição do enunciado?

(b) Qual o número mínimo de caixas necessárias para a construção dessa pilha, de forma que ela satisfaça a condição do enunciado?

Solução:

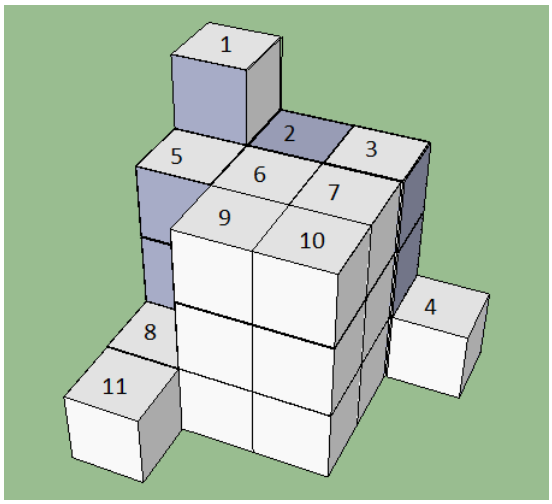
Nota: Chamaremos a pilha que possui uma mesma vista ao ser observada de frente, de lado, ou por cima, e igual à figura do enunciado, de **pilha-solução**.

(a) A pilha-solução que permite o uso do número máximo de caixas é uma pilha maciça, ou seja, que não possui "buracos"em sua estrutura. O único modo de se construir um sólido, a partir de cubinhos, dessa forma é da seguinte maneira:



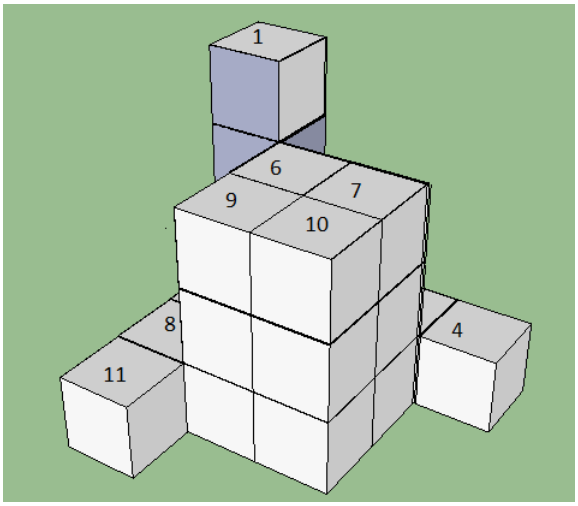
Portanto o número máximo de caixas que podem ser utilizadas na construção de uma pilha-solução é 30.

(b) Para se determinar o número mínimo de caixas necessárias na construção de uma pilha-solução, basta retirar todas as caixas do sólido construído no item a), que não façam diferença na imagem observada pelos diferentes pontos de vista já mencionados. Por exemplo, ao se retirar dois cubos, conforme a figura abaixo, as vistas não se alteram.



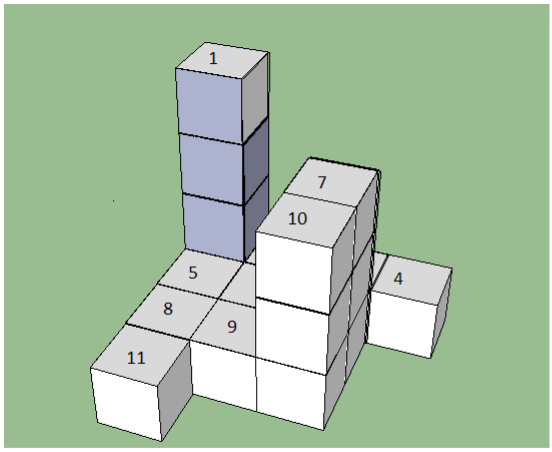
Para um melhor entendimento, numeramos as colunas da pilha de 1 a 11. Note que no 1^o e 4^o andares da pilha, nenhuma caixa pode ser retirada, com isso nos preocuparemos apenas com o 2^o e 3^o andares.

A coluna 1 não pode ser retirada, caso contrário não existiria 4^o andar. Já que ela é uma coluna essencial, as de número 2, 3, 5 e 8 não são necessárias e podem ser retiradas.

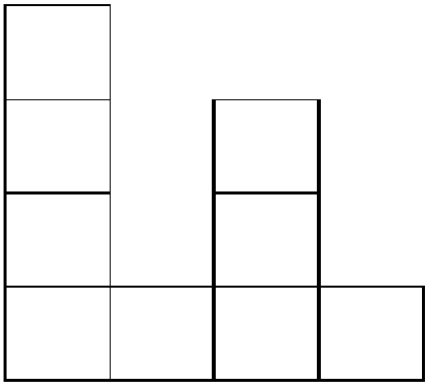


Entre as colunas 6, 7, 9 e 10, duas ainda podem ser retiradas, mas deve-se tomar cuidado. Caso se retire a coluna 6, deve-se retirar, obrigatoria-

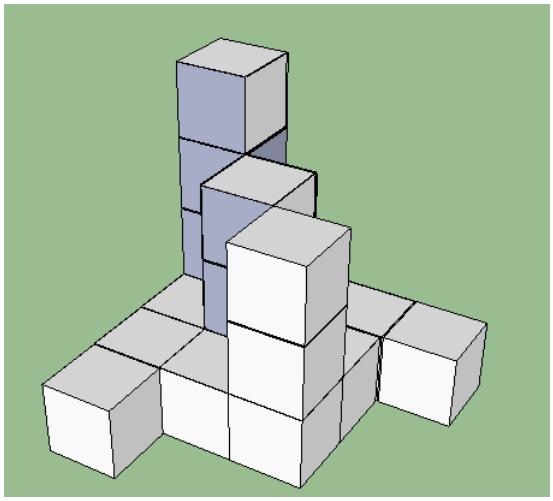
mente, a coluna 10, e caso se retire a 7 deve-se retirar, obrigatoriamente, a 9. Ou seja, das 4 colunas em questão, deve-se manter apenas duas e em diagonal. Caso sejam mantidas duas colunas numa mesma linha horizontal, como 6 e 7 por exemplo, ou numa mesma linha vertical, como 6 e 9 por exemplo, uma das vistas, frontal ou lateral, será afetada e a pilha deixará de ser uma pilha-solução. As figuras abaixo ilustram esse caso.



vista tridimensional


vista frontal

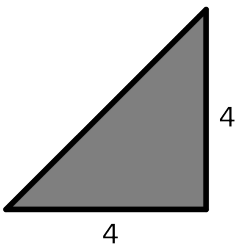
Portanto, uma das pilhas-solução do problema é:

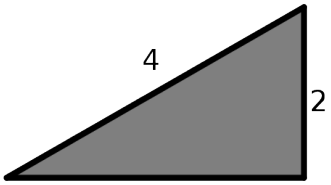


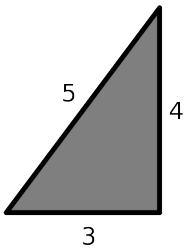
que possui 18 caixas em sua estrutura.

OBS: Existem outras pilhas-solução para este problema, porém todas elas utilizam pelo menos 18 caixas.

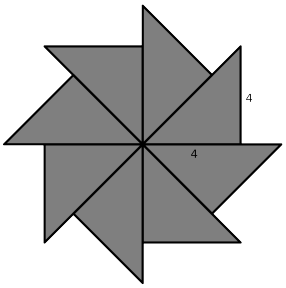
5. Othon dispunha de triângulos retângulos de papelão de três tipos diferentes, esquematizados a seguir:



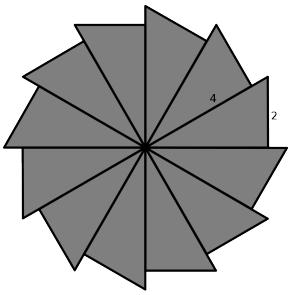




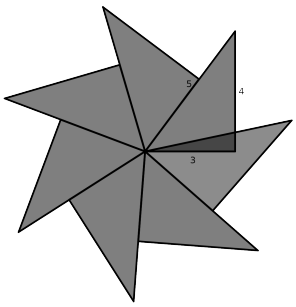
Justapondo um cateto de um triângulo à hipotenusa de outro do mesmo tipo de forma sucessiva, conforme as figuras abaixo, o primeiro e o segundo tipos formam "cataventos", enquanto o terceiro não.



Catavento de 1 volta



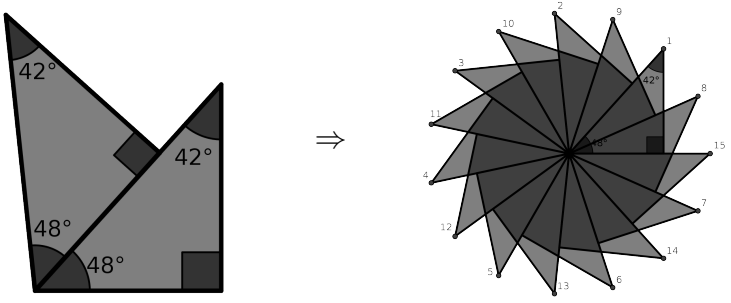
Catavento de 1 volta



Não se formou um catavento

(a) Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que seja possível formar com ele um catavento. Aplique essa condição e verifique que os dois primeiros triângulos realmente formam cataventos.
Dica: analise o ângulo do vértice comum aos triângulos justapostos.

(b) Othon percebeu que, justapondo triângulos como o abaixo, não se gerava um catavento; mas caso continuasse a justaposição após completada a primeira volta, a segunda volta terminava onde a primeira havia começado.



Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que o final da p-ésima volta coincida com o início da primeira volta. Aplique essa

condição e verifique que no triângulo acima isso ocorre ao final da segunda volta.

Solução:

(a) Seja α o ângulo do vértice comum aos triângulos justapostos. Para que se forme um catavento, a justaposição de um número natural n de triângulos deve fechar uma volta, ou seja, ao se somar n vezes o ângulo α deve-se obter $360°$. Então devemos ter $n.\alpha = 360°, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = \frac{360°}{\alpha}$ deve ser natural.

No primeiro triângulo, temos $\alpha = 45°$, e então $\frac{360°}{\alpha} = \frac{360°}{45°} = 8 \in \mathbb{N}^*$. No segundo triângulo, temos $\alpha = 30°$, e então $\frac{360°}{\alpha} = \frac{360°}{30°} = 12 \in \mathbb{N}^*$.

(b) Seja α como definido. Para que a justaposição de uma quantidade q de triângulos complete p voltas, devemos ter $q.\alpha = p.360°, \{p, q\} \subset \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{360°}{\alpha}$ deve ser racional.

No triângulo dado, temos $\alpha = 48°$, e então $\frac{360°}{\alpha} = \frac{360°}{48°} = \frac{15}{2} \in \mathbb{Q}^*$.