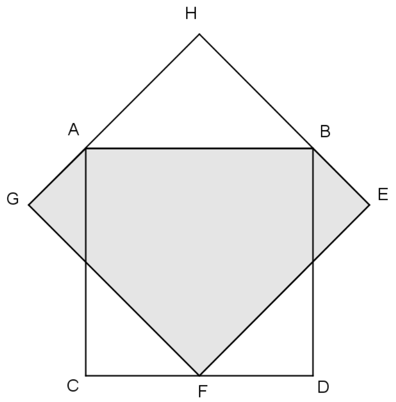
1. Na figura abaixo, $ABDC$ e $EFGH$ são quadrados, $A \in \overline{GH}, B \in \overline{HE}, F$ é ponto médio de DC e a diagonal FH é perpendicular a DC. Qual área é maior, a do quadrado $ABDC$ ou a do pentágono $ABEFG$? Justifique.



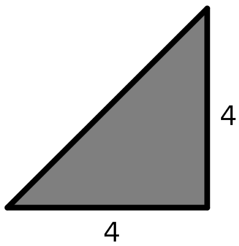
2. Seja $\{a_1, a_2, a_3, 5, a_5, a_6, a_7, 2, ...\}$ uma sequência na qual a soma de 3 números consecutivos é igual a 17, isto é, $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 17$ para todo $i \in \mathbb{N}$

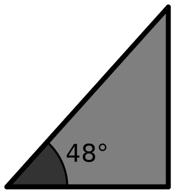
   (a) Encontre o valor de a_{2010}.

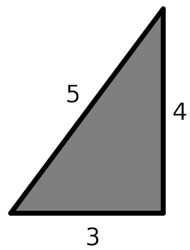
   (b) 100 bolas, identificadas com os 100 primeiros números da sequência acima, são colocadas em uma urna. Qual é a probabilidade de se retirar duas bolas, sem reposição, de modo que a soma de seus números seja igual a 7?

   (c) Qual é o número mínimo de bolas que devem ser retiradas, sem reposição, para que se possa garantir que pelo menos uma delas tenha o número 2?

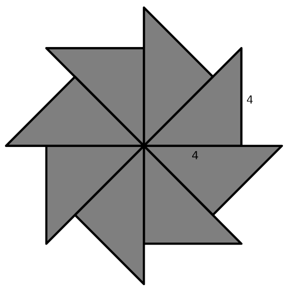
3. Othon dispunha de triângulos retângulos de papelão de três tipos diferentes, esquematizados a seguir:



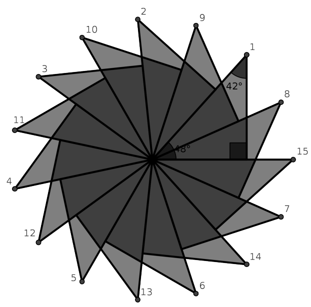




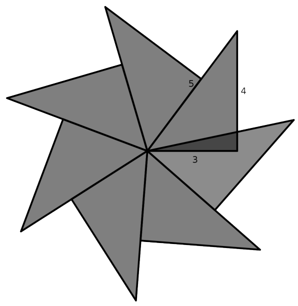
Justapondo um cateto de um triângulo à hipotenusa de outro do mesmo tipo, de forma sucessiva, conforme a figura abaixo, o primeiro e o segundo tipos formam "catavento", enquanto o terceiro não.



Catavento de 1 volta



Catavento de 2 voltas



Não se formou um catavento

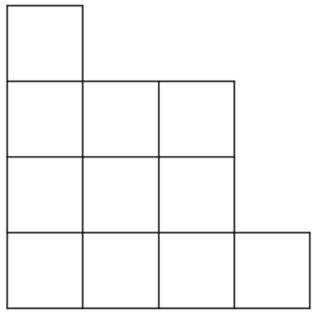
(a) Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que seja possível formar com ele um catavento de uma volta. Aplique essa condição e verifique que o primeiro tipo de triângulo realmente forma um catavento de uma volta.

(b) Encontre a condição que um triângulo retângulo deve respeitar para que, após qualquer número de voltas, jamais a hipotenusa de um triângulo coincida com o cateto do triângulo inicial. Aplique essa condição e verifique que o terceiro tipo de triângulo nunca formará um catavento.

4. (a) Mostre que, se a, b e c são números reais tais que $a+b+c=0$, então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(b) Determine todos os pares (m,n) de números inteiros tais que $670^3+n^3=2010mn-m^3$.

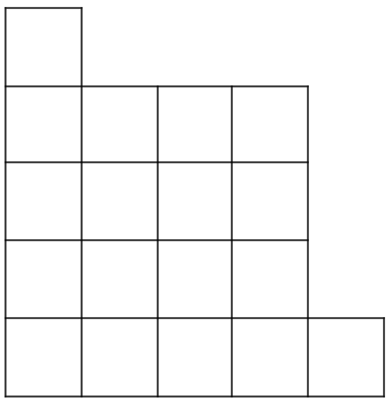
5. A figura abaixo mostra as vistas frontal, lateral e por cima de um sólido formado a partir do empilhamento de caixas cúbicas.

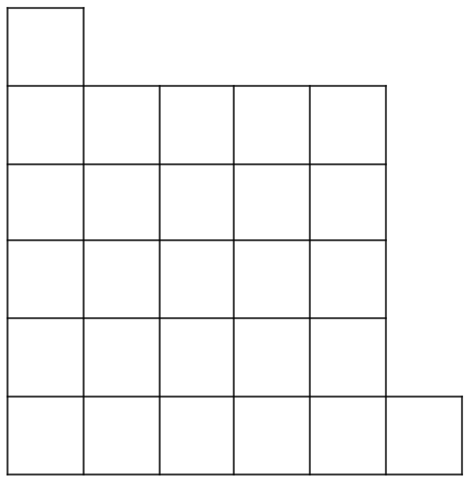


(a) Qual o número máximo de caixas que podem ser utilizadas na construção desse sólido, de forma que ele satisfaça a condição do enunciado?

(b) Qual o número mínimo de caixas necessárias para a construção desse sólido, de forma que ele satisfaça a condição do enunciado?

(c) Considere que o sólido correspondente à figura acima seja de ordem 4, e que os correspondentes às figuras abaixo sejam de ordem 5 e 6 respectivamente.





Deduza uma fórmula para se calcular o número mínimo de caixas utilizadas na construção de um sólido de ordem n que obedeça à condição do enunciado.

OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2010

Nível III

Nome:
Endereço:
Escola: Série:
Cidade: Telefone:
e-mail:

Instruções:

- A duração da prova é de 2h30.
- É proibido o uso de calculadoras.
- Ao preencher as informações acima, use letra legível e deixe pelo menos um telefone de contato ou recado.
- Para garantir o sigilo da prova seu professor recolherá os enunciados.
- A interpretação dos enunciados faz parte das questões, portanto seu professor não poderá responder perguntas durante a prova.
- Anexe **TODAS** as folhas usadas para a resolução a esta prova. Seu rascunho unicamente será usado a seu favor e nunca contra.
- Respostas sem justificativa não serão consideradas.
- A organização da OMM se reserva o direito de anular a prova com suspeita de fraude.

Para uso exclusivo do corretor

1	2	3	4	5	Total