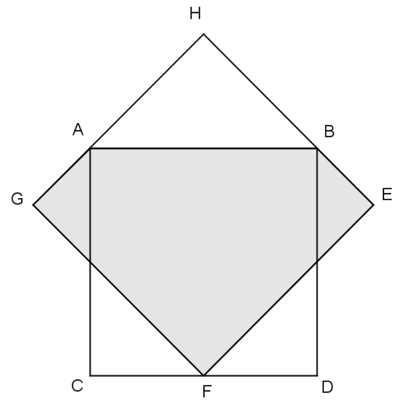
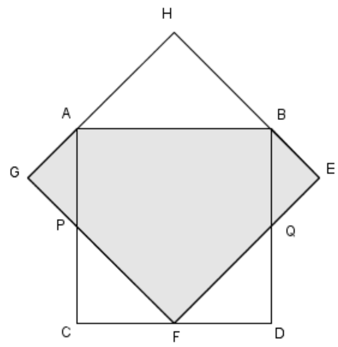
1. Na figura abaixo, $ABDC$ e $EFGH$ são quadrados, $A \in \overline{GH}, B \in \overline{HE}, F$ é ponto médio de DC e a diagonal FH é perpendicular a DC. Qual área é maior, a do quadrado $ABDC$ ou a do pentágono $ABEFG$? Justifique.



Solução:



Note que a área do pentágono é igual à área do quadrado ABDC, menos as dos triângulos CPF e DQF, mais a dos triângulos GPA e EQB. Portanto, basta comparar as áreas do ΔCPF e do ΔGPA.

Sejam $P = \overline{AC} \cap \overline{FG}$ e $Q = \overline{BD} \cap \overline{EF}$. Como $\overline{FH}$, diagonal do quadrado, é bissetriz de $\angle GFE = 45°$; e como $\angle CFH = 90°$, temos que $\angle CFP = 45°$, e então ΔCPF é retângulo isósceles. Analogamente, $\angle DFQ = 45°$, e $\Delta CPF \overset{\text{ALA}}{\approx} \Delta DQF$. Como o $\angle CPF$ é O.P.V. ao $\angle GPA$ e $\angle AGP = 90°$, então $\Delta CPF \overset{\text{AAA}}{\sim} \Delta GPA$. Analogamente, $\Delta DQF \overset{\text{AAA}}{\sim} \Delta EQB$; e mais, como $\overline{GP} = \overline{GF} - \overline{PF}$, e $\overline{GF} = \overline{EF}$ (lados do quadrado) e $\overline{PF} = \overline{QF}$, pela congruência de ΔCPF e ΔDQF, temos que $\overline{GP} = \overline{EQ}$, e então $\Delta GPA \overset{\text{LAL}}{\approx} \Delta EQB$.

Como ΔCPF e ΔDQF são semelhantes, pelo caso AAA, basta comparar lados correspondentes. Sendo ℓ o lado do quadrado, temos que a hipotenusa do ΔCPF mede $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$. A hipotenusa do ΔGPA é igual a ℓ menos $\overline{PC}$. Entretanto, como ΔCPF é isósceles, $\overline{PC} = \overline{CF} = \frac{\ell}{2}$, e então a hipotenusa do ΔGPA mede $\frac{\ell}{2}$. Como a hipotenusa do ΔCPF é maior, sua área também é maior, e então a área do quadrado é maior que a do pentágono.

2. Seja $\{a_1, a_2, a_3, 5, a_5, a_6, a_7, 2, ...\}$ uma sequência na qual a soma de 3 números consecutivos é igual a 17, isto é, $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 17$ para todo $i \in \mathbb{N}$

   (a) Encontre o valor de a_{2010}.

   (b) 100 bolas, identificadas com os 100 primeiros números da sequência acima, são colocadas em uma urna. Qual é a probabilidade de se retirar duas bolas, sem reposição, de modo que a soma de seus números seja igual a 7?

   (c) Qual é o número mínimo de bolas que devem ser retiradas, sem reposição, para que se possa garantir que pelo menos uma delas tenha o número 2?

Solução:

Como a soma de 3 elementos consecutivos é sempre igual a 17, efetuando algumas operações poderemos distinguir os elementos da sequência apresentada.

(a) $a_2 + a_3 + a_4 = 17 \Rightarrow a_2 + a_3 = 12$
$a_1 + a_2 + a_3 = 17 \Rightarrow a_1 = 5$
$5 + a_5 + a_6 = 17 \Rightarrow a_5 + a_6 = 12$
$a_5 + a_6 + a_7 = 17 \Rightarrow a_7 = 5$
$a_6 + a_7 + a_8 = 17 \Rightarrow a_6 = 10$

De posse dessas informações podemos concluir que a sequência se comporta da seguinte maneira:

$$\{5, a_2, a_3, 5, a_5, 10, 5, 2, \ldots\}$$

Concluímos facilmente os valores de a_2, a_3 e a_5. Logo a sequência será dada por:

$$\{5, 2, 10, 5, 2, 10, 5, 2, \ldots\}$$

Vimos que são 3 os números possíveis para a sequência, 5,2,10 nessa ordem. Assim se a divisão do índice n por 3 deixa resto:

- $\ast$ 1 $\rightarrow$ a_n=a_1
- $\ast$ 2 $\rightarrow$ a_n=a_2
- $\ast$ 0 $\rightarrow$ a_n=a_3

Temos a_{2010} com índice 2010, que divido por 3 deixa resto 0. Podemos concluir assim, que $a_{2010}= a_3$. Então $a_{2010}=$**10**.

(b) Como 100 é um número que dividido por 3 nos dá resto 1, $a_{100}=5$. Logo teríamos:

* 34 bolas numeradas com o número 5;
* 33 bolas numeradas com o número 2;
* 33 bolas numeradas com o número 10.

Para que a soma dê 7 deve-se retirar as bolas 2 e 5. Há duas possibilidades para a retirada dessas bolas:

<u>1ª possibilidade:</u> Retirar primeiro a bola 2 e depois a bola 5

$\frac{33}{100}.\frac{34}{99}=\frac{17}{150}$

<u>2ª possibilidade:</u> Retirar primeiro a bola 5 e depois a bola 2

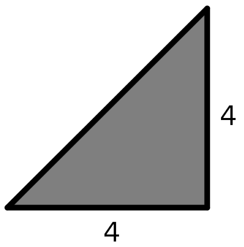
$\frac{34}{100}.\frac{33}{99}=\frac{17}{150}$

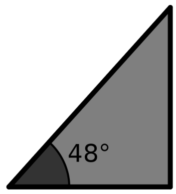
Como acontece uma **ou** outra, a probabilidade será dada então pela soma: $\frac{17}{150}+\frac{17}{150}=\frac{17}{75}$

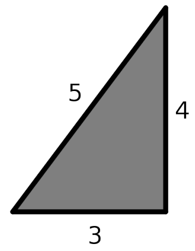
c) Para garantir que pelo menos uma bola retirada tenha o número 2 deve-se retirar, na pior das hipóteses, todas as bolas com número 10 e todas as bolas com número 5. Assim, a próxima bola com certeza seria uma bola com número 2. Como vimos no **item b** temos 34 bolas numeradas com o número 5 e 33 bolas numeradas com o número 10. Logo deve-se retirar:

$$34(\text{número } 5)+33\ (\text{número } 10) + 1 = \textbf{68 bolas}.$$

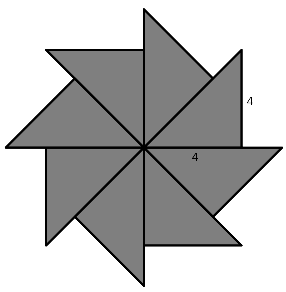
3. Othon dispunha de triângulos retângulos de papelão de três tipos diferentes, esquematizados a seguir:



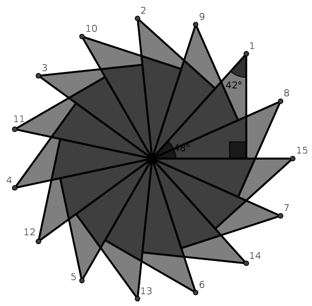




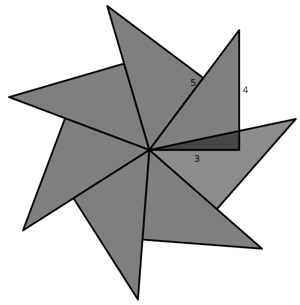
Justapondo um cateto de um triângulo à hipotenusa de outro do mesmo tipo, de forma sucessiva, conforme a figura abaixo, o primeiro e o segundo tipos formam "catavento", enquanto o terceiro não.



Catavento de 1 volta



Catavento de 2 voltas



Não se formou um catavento

(a) Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que seja possível formar com ele um catavento de uma volta. Aplique essa condição e verifique que o primeiro tipo de triângulo realmente forma um catavento de uma volta.

(b) Encontre a condição que um triângulo retângulo deve respeitar para que, após qualquer número de voltas, jamais a hipotenusa de um triângulo coincida com o cateto do triângulo inicial. Aplique essa condição e verifique que o terceiro tipo de triângulo nunca formará um catavento.

Solução:

(a) Seja α o ângulo do vértice comum aos triângulos justapostos. Para que se forme um catavento, a justaposição de um número natural n de triângulos deve fechar uma volta, ou seja, ao se somar n vezes o ângulo α deve-se obter 360°. Então devemos ter $n.\alpha = 360°, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = \frac{360°}{\alpha}$ deve ser natural.
No primeiro triângulo, temos $\alpha = 45°$, e então $\frac{360°}{\alpha} = \frac{360°}{45°} = 8 \in \mathbb{N}^*$.

(b) Desejamos que para qualquer número (natural) q de triângulos justapostos, nunca se complete uma quantidade (natural) p de voltas, ou seja, desejamos que, $\forall p, q \subset \mathbb{N}^*, p.\alpha \neq q.360° \Rightarrow \frac{360°}{\alpha}$ deve ser irracional.

4. (a) Mostre que, se a, b e c são números reais tais que $a+b+c=0$, então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

   (b) Determine todos os pares (m,n) de números inteiros tais que $670^3+n^3=2010mn-m^3$.

Solução:

(a) Observe que:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Solução sugerida pelo aluno Lucas Dionísio Toledo da cidade de Cachoeira de Minas :

Tem-se que $a+b+c=0$, portanto as seguintes igualdades são verdadeiras:

$a+b+c=0 \quad (1)$

$b+c+a=0 \quad (2)$

$c+a+b=0 \quad (3)$

Com elas monta-se a seguinte matriz 3×3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Como essa matriz possui as três linhas idênticas, apenas em ordem trocada, seu determinante é nulo.

Calculando-se seu determinante pela regra de Sarrus, tem-se que:

$3abc=a^3+b^3+c^3$

que é a equação do enunciado.

(b) Usando o item **a** e o fato de que $2010 = 3 \cdot 670$, escrevemos:

$$m^3+n^3+670^3-3.670mn = (m+n+670)(m^2+n^2+670^2-mn-670m-670n)$$

Portanto, $m^3 + n^3 + 670^3 - 3.670mn = 0$ se e somente se, $m + n + 670 = 0$ ou $m^2 + n^2 + 670^2 - mn - 670m - 670n = 0$

A primeira equação nos fornece infinitas soluções inteiras:
$m = 670 - n \ \forall$ n $\in \mathbb{Z}$

Para a segunda equação, observe que completando quadrados teremos:

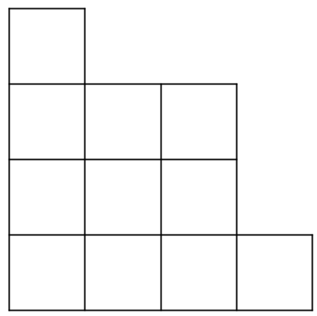
$$m^2 + n^2 + 670^2 - mn - 670m - 670n = \frac{(m-n)^2 + (m-670)^2 + (n-670)^2}{2}$$

Logo, $m^2 + n^2 + 670^2 - mn - 670m - 670n = 0$ se e somente se,

$$(m-n)^2 + (m-670)^2 + (n-670)^2 = 0$$

Mas a soma de quadrados é zero se e somente se, cada parcela é igual a 0, isto é, $m = n = 670$.

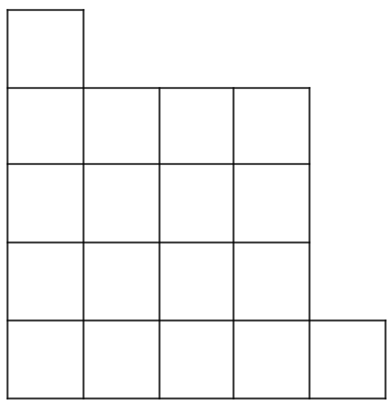
5. A figura abaixo mostra as vistas frontal, lateral e por cima de um sólido formado a partir do empilhamento de caixas cúbicas.

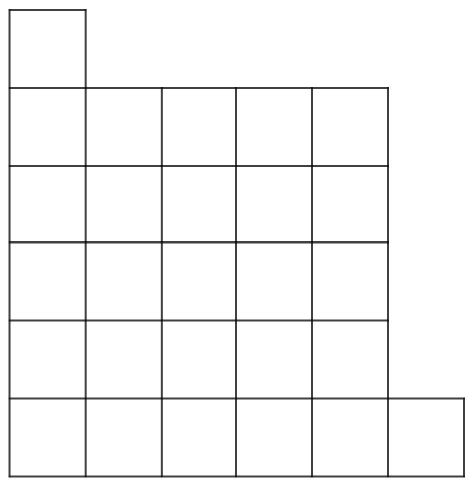


(a) Qual o número máximo de caixas que podem ser utilizadas na construção desse sólido, de forma que ele satisfaça a condição do enunciado?

(b) Qual o número mínimo de caixas necessárias para a construção desse sólido, de forma que ele satisfaça a condição do enunciado?

(c) Considere que o sólido correspondente à figura acima seja de ordem 4, e que os correspondentes às figuras abaixo sejam de ordem 5 e 6 respectivamente.



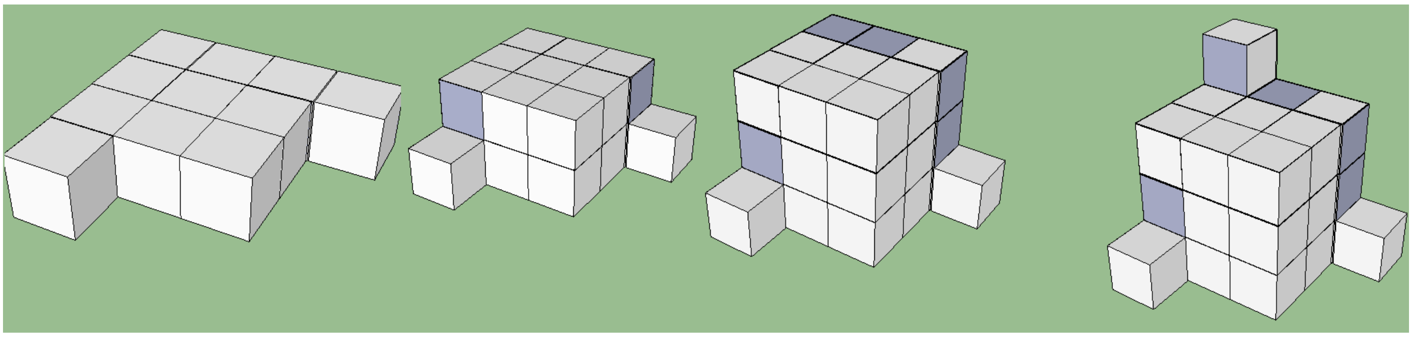


Deduza uma fórmula para se calcular o número mínimo de caixas utilizadas na construção de um sólido de ordem n que obedeça à condição do enunciado.

Solução:

Nota: Chamaremos a pilha que possui uma mesma vista ao ser observada de frente, de lado, ou por cima, e igual à figura do enunciado, de **pilha-solução**.

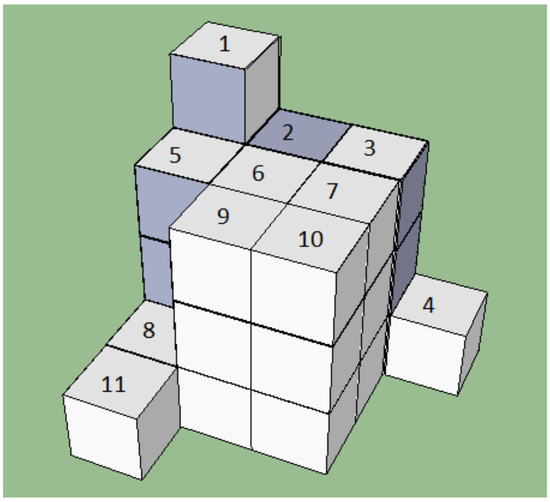
(a) A pilha-solução que permite o uso do número máximo de caixas é uma pilha maciça, ou seja, que não possui ”buracos”em sua estrutura. O único modo de se construir um sólido, a partir de cubinhos, dessa forma é da seguinte maneira:



1º andar 2º andar 3º andar 4º andar

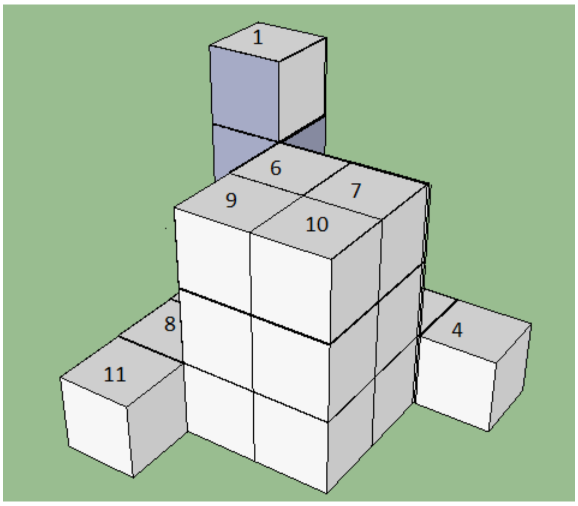
Portanto o número máximo de caixas que podem ser utilizadas na construção de uma pilha-solução é 30.

(b) Para se determinar o número mínimo de caixas necessárias na construção de uma pilha-solução, basta retirar todas as caixas do sólido construído no item a), que não façam diferença na imagem observada pelos diferentes pontos de vista já mencionados. Por exemplo, ao se retirar dois cubos, conforme a figura abaixo, as vistas não se alteram.

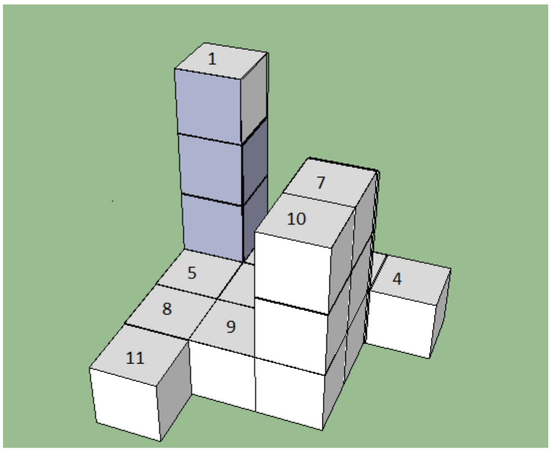


Para um melhor entendimento, numeramos as colunas da pilha de 1 a 11. Note que no 1^o e 4^o andares da pilha, nenhuma caixa pode ser retirada, com isso nos preocuparemos apenas com o 2^o e 3^o andares.

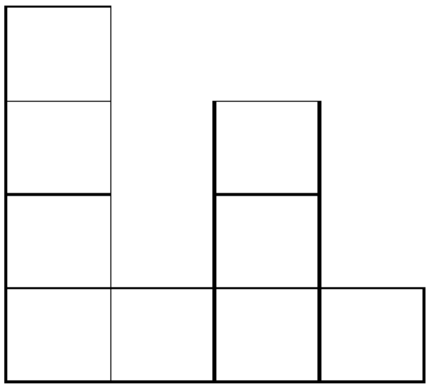
A coluna 1 não pode ser retirada, caso contrário não existiria 4^o andar. Já que ela é uma coluna essencial, as de número 2, 3, 5 e 8 não são necessárias e podem ser retiradas.



Entre as colunas 6, 7, 9 e 10, duas ainda podem ser retiradas, mas deve-se tomar cuidado. Caso se retire a coluna 6, deve-se retirar, obrigatoriamente, a coluna 10, e caso se retire a 7 deve-se retirar, obrigatoriamente, a 9. Ou seja, das 4 colunas em questão, deve-se manter apenas duas e em diagonal. Caso sejam mantidas duas colunas numa mesma linha horizontal, como 6 e 7 por exemplo, ou numa mesma linha vertical, como 6 e 9 por exemplo, uma das vistas, frontal ou lateral, será afetada e a pilha deixará de ser uma pilha-solução. As figuras abaixo ilustram esse caso.

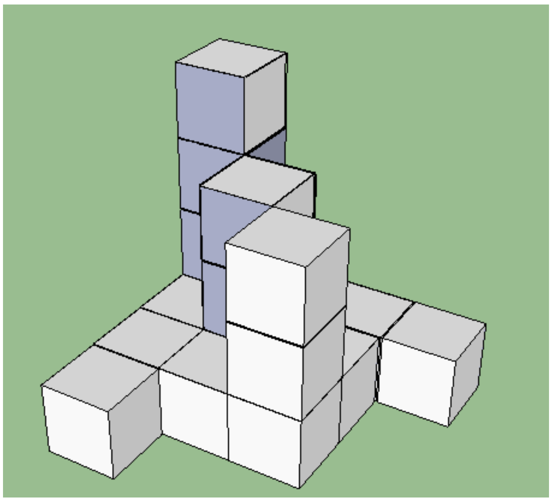


vista tridimensional



vista frontal

Portanto, uma das pilhas-solução do problema é:



que possui 18 caixas em sua estrutura.

OBS: Existem outros sólidos-solução para este problema, porém todos eles utilizam pelo menos 18 caixas.

(c) Como observado no item b), um sólido-solução genérico de ordem n, que utilize um número mínimo de caixas, possui uma configuração em andares da forma descrita abaixo:

i. $1^o andar$:
- Uma fileira com n caixas.
- $(n-2)$ fileiras com $(n-1)$ caixas.
- Uma fileira com uma caixa.

em que n é o número de andares do sólido.

Logo o número de caixas no $1^o andar$ é: $n + (n-2)(n-1) + 1 = n^2 - 2n + 3$

ii. Do 2^o andar ao de número $(n-1)$:
- $(n-1)$ fileiras com apenas uma caixa em cada.

Do 2^o andar ao de número $(n-1)$ são exatamente $(n-2)$ andares. Portanto o número de caixas utilizadas neles é $(n-2)(n-1) = n^2 - 3n + 2$

iii. n-ésimo andar:
   - Apenas uma caixa.

Somando-se as três expressões acima encontra-se o número mínimo de caixas necessárias para a construção de um sólido-solução de ordem n.

Que é:

$(n^2 - 2n + 3) + (n^2 - 3n + 2) + 1 = 2n^2 - 5n + 6$

Essa fórmula é válida para $n \geq 2$