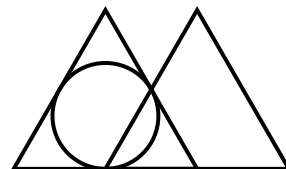


OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2011

Nível III Folha de questões



1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que a distância entre as imagens $f(x)$ e $f(y)$ no contradomínio é igual à distância entre os pontos x e y no domínio, quaisquer que sejam x e y . Considere o conjunto $G = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = x\}$.
 - (a) Mostre que, se G possui mais que um elemento, então $G = \mathbb{R}$.
 - (b) Determine todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a propriedade acima, isto é, que as distâncias entre as imagens sejam iguais às distâncias no domínio.
2. Seja a um número real positivo. Determine o número de soluções inteiras da inequação $3 < na < 5$ sabendo-se que $1 < na < 3$ tem 4 soluções inteiras.
3. Num quadro estão escritos os números $2, 3, 4, \dots, 2012$. Uma *jogada* consiste em escolher dois números a e b , com $a \geq b$, e substituí-los por $\frac{4a + 3b}{5}$ e $\frac{24a - 7b}{25}$, respectivamente. É possível que, após um certo número de jogadas, estejam escritos os números $1, 2, 3, \dots, 2011$?
4.
 - (a) Em um triângulo ABC a circunferência inscrita é tangente ao lado AB em P . Se $AP = 10$, $PB = 7$ e $AC = 13$, determine o comprimento do lado BC .
 - (b) Um hexágono está circunscrito a uma circunferência, isto é, seus lados são tangentes à circunferência. Sabemos que os comprimentos de cinco de seus lados são 3, 4, 5, 7 e 9, em alguma ordem. Quais são os possíveis comprimentos do sexto lado?
5. Evaristo tem um baralho com 52 cartas de quatro cores, cada uma das cores com as cartas numeradas de 1 a 13. Ele retira cartas ao acaso até que ele tenha em suas mãos três cartas de uma mesma cor, consecutivamente numeradas. Qual é o maior número de cartas que Evaristo pode retirar?