Olimpíada Mineira de Matemática 2012

Gabarito Nível I

1. (a) Observemos que todo número que é divisível por 2, 5, 9 e 11 é divisível por seu produto, isto é, divisível por 990. Por outro lado, o maior múltiplo de 990 de quatro algarismos é 9900, que possui algarismos distintos e o anterior múltiplo é $9900 - 990 = 8910$, que tem todos seus algarismos distintos.

   (b) Contar quantos números números de cinco algarismos distintos múltiplos de 990 existem, equivale a encontrar quantos números múltiplos de 99 de quatro algarismos distintos e não nulos existem.

   Observe que o primeiro número múltiplo de 99 de quatro algarismo é 1089, que vamos separar em dois blocos 10 e 89. Para obter o seguinte múltiplo é necessário somar $99 = 100 - 1$, isto é, somar 1 ao primeiro bloco e tirar 1 ao segundo, obtendo 11 e 88, e assim sucessivamente, como mostrado na seguinte lista de múltiplos de 99.

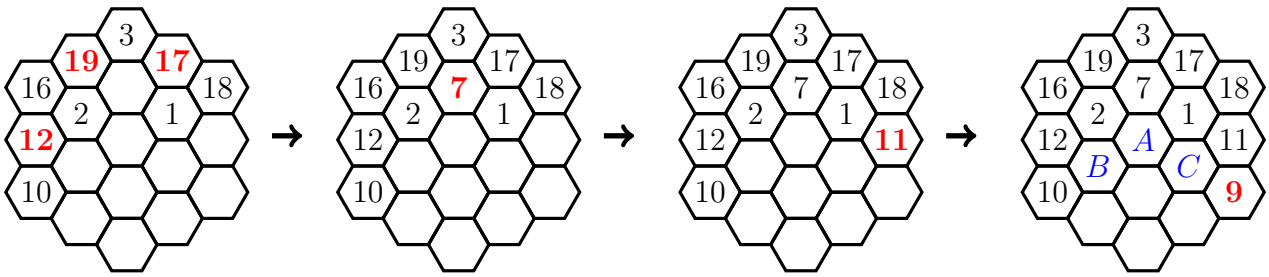
   $$1089, 1188, 1287, 1386, 1485, \cdots$$

   Assim, todos os múltiplos de 99 menores que 9900 cumprem que soma dos dois blocos se mantém constante e igual a 99. Portanto, o primeiro e o terceiro algoritmo somam 9 e o segundo e o quarto também somam 9, logo eles não podem ser iguais. Daqui que nenhum algarismo pode ser igual a 9. Se fixamos o quarto algarismo igual a A, temos que o terceiro não pode ser igual a 0, 9, A ou $9 - A$, portanto tem seis possibilidades para o terceiro algarismo, e estes dois algarismos determinam os dois primeiros. Assim, o número de números procurado é igual ao número de possibilidades para o quarto algarismo multiplicado pelo número de possibilidades para o terceiro algarismo, isto é, $8 \times 6 = 48$.

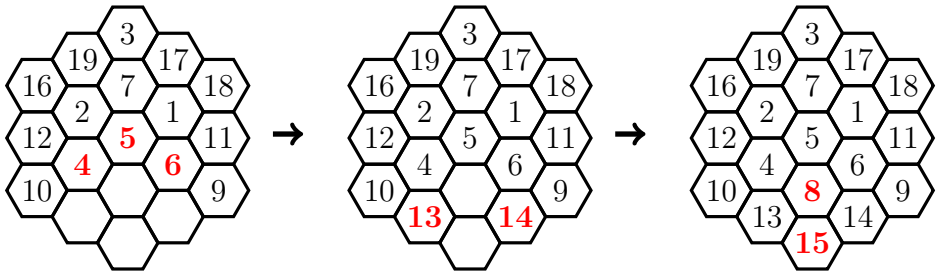
   Outra forma de solucionar o problema é explicitar os 48 números:

12870	13860	14850	15840	16830	17820
21780	23760	24750	25740	26730	28710
31680	32670	34650	35640	37620	38610
41580	42570	43560	46530	47520	48510
51480	52470	53460	56430	57420	58410
61380	62370	64350	65340	67320	68310
71280	73260	74250	75240	76230	78210
82170	83160	84150	85140	86130	87120

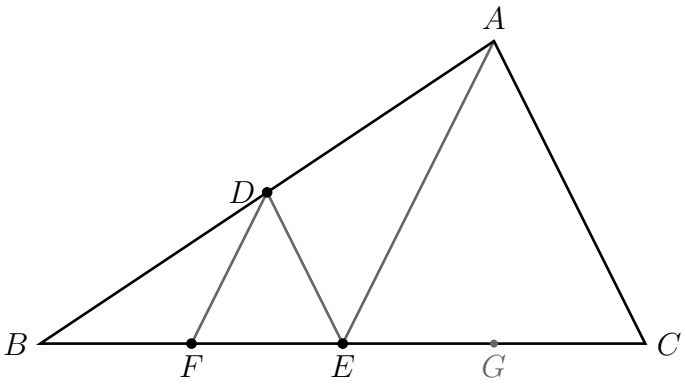
2. Como nos dezenove hexágonos devem aparecer todos os números de 1 a 19, temos que a soma de todos os números do tabuleiro preenchido é 190. Sabemos que a soma em cada uma das cinco colunas é a mesma, logo a soma dos números em cada coluna é $\frac{190}{5} = 38$. Isso permite completar as diagonais e colunas nas que está faltando unicamente um número, como é mostrado na seguinte sequência de tabuleiros:



Agora as hexágonos marcados com A e B devem somar 9, mas como os números 1, 2 e 3 já foram usados no tabuleiro, temos que eles devem conter os números 4 e 5, em alguma ordem. De igual forma, os números nos hexágonos marcados com A e C devem somar 11, como 1, 2, 3 e 7 já foram usado, então os números nestes hexágonos são 5 e 6. Portanto $A = 5$, $B = 4$ e $C = 6$. Assim podemos seguir completando o tabuleiro da seguinte forma



3. (a) Seja G o ponto médio de EC. Logo os pontos F, E e G dividem o lado CD em quatro partes iguais. Assim o comprimento de FC corresponde a $\frac{3}{4}$ do comprimento do lado BC. Como FC mede 18cm temos que BC mede $18 \cdot \frac{4}{3} = 24$cm. Como E é ponto médio de CB temos que BE mede $\frac{24}{2} = 12$cm.



(b) Observemos que

- área(CED) = área(BED), pois os triângulos têm a mesma altura e $BE = EC$.
- área(EFD) = área(BFD), pois os triângulos têm a mesma altura e $EF = FB$.
- área(BDE) = área(ADE), pois os triângulos têm a mesma altura e $BD = DA$.

Logo

$$\begin{aligned} 60\text{cm}^2 &= \text{área}(ADFE) \\ &= \text{área}(ADE) + \text{área}(DFE) \\ &= \text{área}(BDE) + \text{área}(BFD) \\ &= 3 \cdot \text{área}(BFD) \end{aligned}$$

Segue que área$(BFD) = 20\text{cm}^2$ e área$(ABE) =$ área$(BFD) +$ área$(ADFE) = 80\text{cm}^2$. Portanto

$$\text{área}(CED) = \text{área}(BED) = \frac{1}{2}\text{área}(ABE) = 40\text{cm}^2.$$

4. (a) Fixando um número no tabuleiro, o número que está exatamente abaixo dele é 13 unidades a mais que ele, assim o número que esta abaixo e a direita é 14 unidades a mais que o número. Segue que os elementos que estão na diagonal tem diferença de 14 entre dois consecutivos, logo os números da diagonal são

$$1, 15, 29, 43, 57, 71, 85, 99, 113, 127, 141, 155, 169.$$

(b) Observemos que os números da diagonal cumprem a hipótese, logo um possível valor para a soma dos números é

$$1 + 15 + 29 + 43 + 57 + 71 + 85 + 99 + 113 + 127 + 141 + 155 + 169 = 1105.$$

Vejamos que esta soma, de fato, é a única soma possível para qualquer escolha das 13 casas do tabuleiro.

Para isso, consideremos os dois tabuleiros 13×13 da seguinte figura

1	2	3	$\cdots$	13
1	2	3	$\cdots$	13
1	2	3	$\cdots$	13
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	2	3	$\cdots$	13

0	0	0	$\cdots$	0
13	13	13	$\cdots$	13
26	26	26	$\cdots$	26
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
156	156	156	$\cdots$	156

Observemos que para obter os números do tabuleiro original, basta somar as entradas deste dois tabuleiros.

Agora, se escolhemos treze números em linhas e colunas distintas do tabuleiro original e somamos, equivale a escolher os mesmas treze entradas dos dois tabuleiros e somar estes 26 números. Como no primeiro tabuleiro todos os números estão em colunas distintas, os números escolhidos nesse tabuleiro são $1, 2, 3, \ldots, 13$, e como no segundo tabuleiro todos os números escolhidos estão em linhas distintas, os números selecionados no seguindo tabuleiro são $0, 13, 26, 39, \ldots, 156$. Assim a soma dos números é

$$1 + 2 + \cdots + 13 + 0 + 13 + 26 + \cdots + 156 = 1105,$$

como queríamos mostrar.

5. (a) Existem várias estratégias de resolver este problema. Vamos mostrar uma delas:

i. Construímos uma lista com todos os números que contém o algarismo 1

$$1^a \text{ lista: } 11, 12, 21, 13, 31, 14, 41, \ldots, 19, 91$$

ii. Construímos 8 listas, onde a lista i-ésima ($2 \leq i \leq 9$) tem todos os números que contém o algarismo i que não tenham sido usados nas listas anteriores:

$$\begin{array}{rc} 2^a \text{ lista:} & 22, 23, 32, 24, 42, \cdots, 28, 82, 29, 92 \\ 3^a \text{ lista:} & 33, 34, 43, 35, 53, \cdots, 39, 93 \\ \vdots & \vdots \\ 8^a \text{ lista:} & 88, 89, 98 \\ 9^a \text{ lista:} & 99 \end{array}$$

iii. Agora pegamos a 1^a lista e entre 12 e 21 colocamos a 2^a lista, entre 13 e 31 colocamos a 3^a lista, e assim sucessivamente até entre 19 e 91 colocamos 99, obtendo

$$11, 12, \boxed{2^a \text{ lista}}, 21, 13, \boxed{3^a \text{ lista}}, 31, \ldots, 18, \boxed{8^a \text{ lista}}, 81, 19, \boxed{9^a \text{ lista}}, 91$$

Uma segunda solução consiste em ver que cada algarismo aparece 9 vezes na posição das unidades e 9 vezes na posição das dezenas. Assim podemos fazer a seguinte figura no papel: nove pontos numerados de 1 a 9 e linhas dirigidas entre os nove pontos: assim por exemplo a linha que vai do ponto 7 para o ponto 3 vai representar o número 73, enquanto a linha que vai do ponto 3 ao ponto 7 vai representar o número 37. Concatenar todos os números equivale a construir um caminho passando por todos as linhas, mas isso é possível porque o números de linhas entrando é o mesmo números de linhas saindo de cada ponto.

(b) Vejamos como é possível construir a lista. Para isto pegamos a lista do item anterior e construímos nove lista da seguinte forma: A i-ésima lista consiste em agregar a todos os números da lista do item anterior, o algarismo i na metade de cada número, obtendo uma lista com números de três algarismos, todos com algarismo das dezenas igual a i. Depois basta concatenar estas dez listas, o qual é possível, já que cada uma das lista começa com um número com algarismo das centenas igual a 1 e termina com um número cujo algarismo das unidades também é 1.