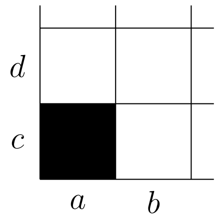
Olimpíada Mineira de Matemática 2012

Gabarito Nível II

1. (a) Quanto repintamos 3 colunas, estamos repintando $3 \times 8 = 24$ casas, e quando repintamos 5 linhas, estamos repintando $5 \times 8 = 40$ casas. Observemos que existem $3 \times 5 = 15$ casas que foram repintadas duas vezes, logo das 24 casas repintadas nas colunas 15 voltam a ser pretas e das 40 casas repintadas nas linhas 15 voltam a ser pretas. Portanto, o número final de casas brancas é $(24 - 15) + (40 - 15) = 34$.

   (b) Suponhamos que queremos transformar todo o tabuleiro em preto, já que a outra coloração é equivalente trocando a cor de todas as linhas. Consideremos as quatro casas da esquina inferior esquerda do tabuleiro 8×8 que forma um tabuleiro 2×2. No começo este tabuleiro tem uma casa preta e três brancas, como ilustrado na figura:

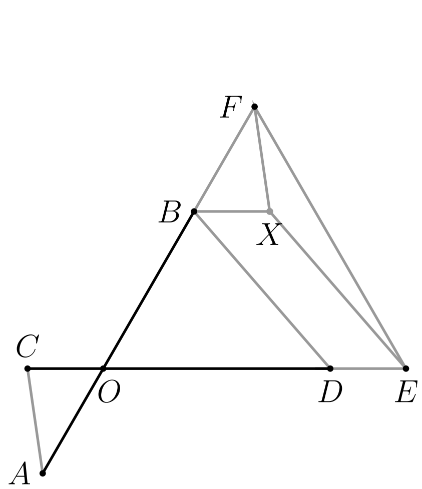


   Denotamos por a e b o número de vezes que a 1^a e a 2^a colunas foram repintadas, e c e d o número de vezes que a 7^a e a 8^a linhas foram repintadas. Como cada duas vezes que uma casa é repintada ela volta à cor original, se queremos que todo o tabuleiro fique preto, precisamos em particular que

   - $a + c$ seja par;
   - $a + d$ seja ímpar;
   - $b + c$ seja ímpar e
   - $b + d$ seja ímpar.

   Como $(a + c) + (a + d) + (b + c) + (b + d) = 2(a + b + c + d)$ é par, as condições anteriores não se podem ter simultaneamente, e portanto, é impossível repintar o tabuleiro para que fique todo da mesma cor.

2. Seja E o ponto sobre a semireta OD tal que OE tem comprimento 1 e F um ponto sobre a semireta OB tal que OF tem comprimento 1. Com esta construção temos que o triângulo OEF é equilátero e de lado 1.
   Observe que como CD e AB têm comprimento 1 segue que $CO = DE$ e $AO = BF$. Definimos o ponto X tal que $XBDE$ seja um paralelogramo. Como $BX = DE = CO$, segue que BX e CO são congruentes e paralelos, e com AO e BF são congruentes e paralelos, concluímos que os triângulos OCA e BXF são congruentes, em particular $AC = XF$.



   Portanto
$$AC + BD = XF + EX \geq EF = 1,$$
   onde na desigualdade estamos usando a desigualdade triangular no triângulo EXF.

3. (a) Lembrando que $1 = 0{,}\overline{9}$ segue que

$$\frac{1}{3367} = 1 - \frac{3366}{3367} = 0{,}\overline{9} - 0{,}\overline{999702} = 0{,}\overline{000297}$$

e

$$\frac{3}{3367} = 3 \times 0{,}\overline{000297} = 0{,}\overline{000891}.$$

(b) Se denotamos por x o número $\frac{1005}{2012}$ e y o número $\frac{1007}{2012}$, temos que $x + y = 1 = 0{,}\overline{9}$, ou equivalentemente, $y = 0{,}\overline{9} - x$, assim os algarismos depois da vírgula da representação decimal do número y pode ser obtido a partir dos algarismos da representação decimal do número x, pelo seguinte procedimento: o algarismo i-ésimo depois da vírgula de y é obtido fazendo a diferença de 9 menos o i-ésimo algarismo de x depois da vírgula. Assim, os períodos das representações decimais de x e y são iguais.

4. (a) Denotemos por P_1, P_2, P_3 e P_4 os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA respectivamente. Como

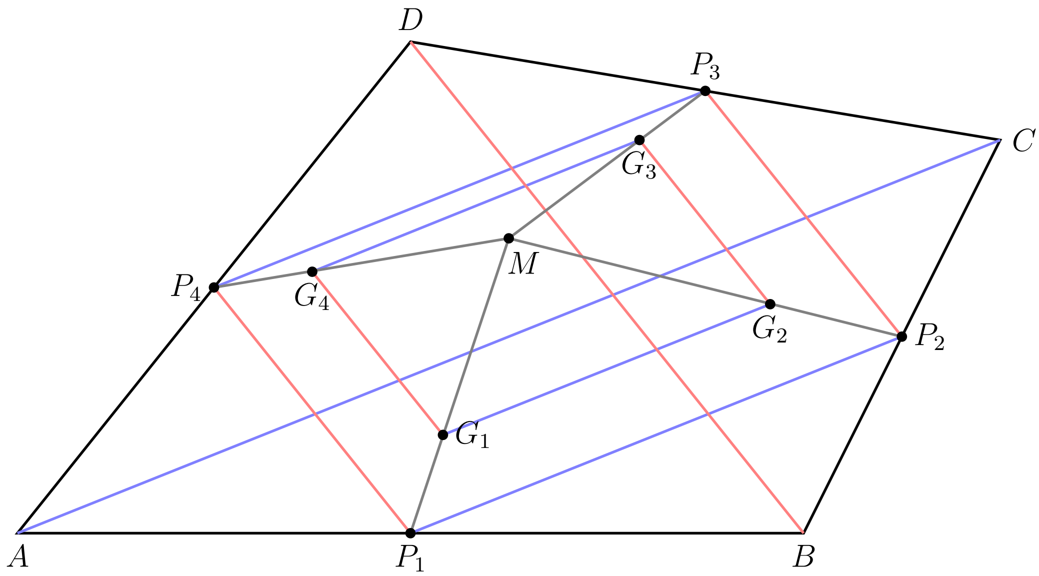
$$\frac{MG_1}{MP_1} = \frac{MG_2}{MP_2} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{BP_1}{BA} = \frac{BP_2}{BC} = \frac{1}{2},$$

pelo teorema de Thales, temos que:

- Os triângulos MG_1G_2 e MP_1P_2 são semelhantes, G_1G_2 é paralelo a P_1P_2 e $G_1G_2 = \frac{2}{3}P_1P_2$;
- Os triângulos BAC e BP_1P_2 são semelhantes, BC é paralelo a P_1P_2 e $P_1P_2 = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Portanto G_1G_2 é paralelo a AC é $G_1G_2 = \frac{1}{3}AC$. Por um argumento equivalente, concluímos que G_3G_4 é parelelo a AC e $G_3G_4 = \frac{1}{3}AC$ e assim G_1G_2 e G_3G_4 são paralelos e iguais a $\frac{1}{3}AC$.

Da mesma forma G_2G_3 e G_4G_1 são paralelos e iguais a $\frac{1}{3}BD$, portanto $G_1G_2G_3G_4$ é um paralelogramo.



(b) Observemos que pelo mesmo raciocínio temos que $P_1P_2P_3P_4$ é um paralelogramo semelhante a $G_1G_2G_3G_4$, e com razão de semelhança igual a $\frac{2}{3}$, segue que área$(G_1G_2G_3G_4) = \frac{4}{9}$área$(P_1P_2P_3P_4)$.

Por outro lado, como área$(AP_1P_4) = \frac{1}{4}$área(ABD) e área$(CP_3P_2) = \frac{1}{4}$área(CDB), segue que área(AP_1P_4) + área$(CP_3P_2) = \frac{1}{4}$área$(ABCD)$ e por um raciocínio equivalente área(BP_1P_2) + área$(DP_3P_4) = \frac{1}{4}$área$(ABCD)$, donde obtemos que

$$\text{área}(P_1P_2P_3P_4) = \frac{1}{2}\text{área}(ABCD), \quad \text{e portanto} \quad \text{área}(G_1G_2G_3G_4) = \frac{2}{9}\text{área}(ABCD).$$

5. Quando n não é múltiplo de 6, A tem a seguinte estratégia vencedora: na primeira jogada, ele pega um número de moedas entre 1 e 5 (note que todos os números de 1 a 5 são retiradas permitidas) de tal forma que as moedas que restam sejam em quantidade múltipla de 6. Como os múltiplos de 6 não são potências de primo, B não poderá retirar quantidade múltipla de 6, tendo que deixar na mesa uma quantidade não múltipla de 6. Nas jogadas seguintes, A repete o raciocínio, retirando entre 1 e 5 moedas e deixando para B uma quantidade múltipla de 6. Como o número de moedas está sempre diminuindo e B nunca poderá retirar todas as moedas, pois na vez dele a mesa sempre tem moedas em quantidade múltipla de 6, então A é quem ganhará.

   Se n é múltiplo de 6, a situação se inverte: na primeira rodada A terá que retirar um número não múltiplo de 6 de moedas, deixando para B um número não múltiplo de 6, e então se B aplicar a estratégia descrita, ele ganhará. Por isso B tem estratégia vencedora.

   Em particular, B tem estratégia vencedora se $n = 30$ e A tem estratégia vencedora se $n = 2012$.