Olimpíada Mineira de Matemática 2012

Gabarito Nível III

1. Como os números são consecutivos então podemos supor que $x = n$, $y = n-1$ e $z = n-2$, e como queremos maximizar $x+y+z$, basta maximizar n. Suponhamos que já escolhemos n máximo, como $\frac{1}{n-2} > \frac{1}{y}$ e $\frac{1}{n-2} > \frac{1}{z}$, segue que

$$\frac{3}{n-2} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{45},$$

assim $n-2 < 135$, e portanto $n < 137$. Como n é máximo, se trocamos n por $n+1$ a desigualdade deve ser falsa, assim

$$\frac{1}{45} \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{2n}{n^2-1} > \frac{1}{n} + \frac{2n}{n^2} = \frac{3}{n},$$

portanto $n > 135$. Destas duas desigualdades obtemos que o n máximo é 136, assim concluímos que o valor máximo de $x+y+z$ é $3n-3 = 405$.

2. (a) Denotemos por P_1, P_2, P_3 e P_4 os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA respectivamente. Como

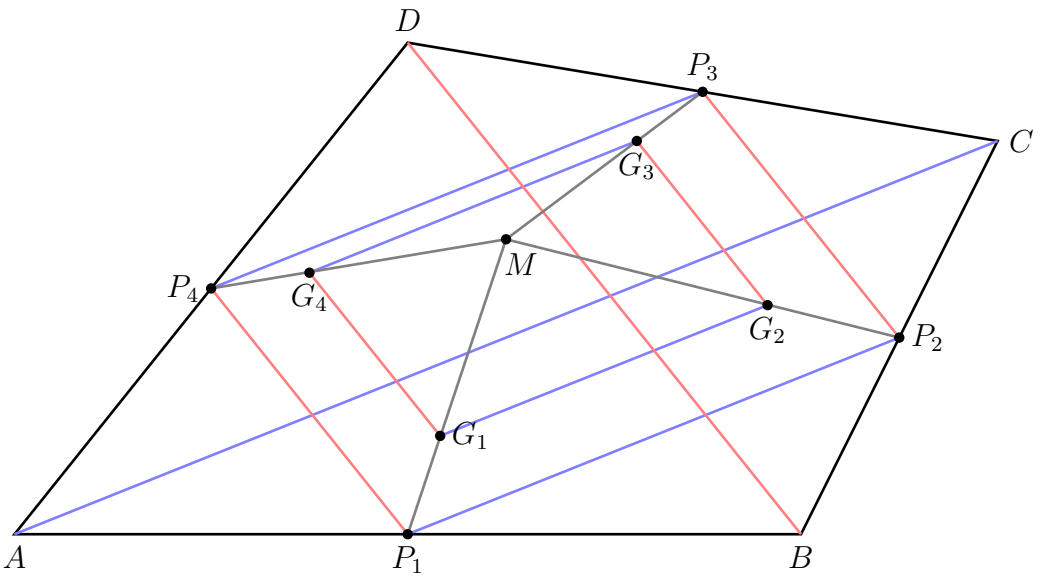
$$\frac{MG_1}{MP_1} = \frac{MG_2}{MP_2} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{BP_1}{BA} = \frac{BP_2}{BC} = \frac{1}{2},$$

pelo teorema de Thales, temos que:

- Os triângulos MG_1G_2 e MP_1P_2 são semelhantes, G_1G_2 é paralelo a P_1P_2 e $G_1G_2 = \frac{2}{3}P_1P_2$;
- Os triângulos BAC e BP_1P_2 são semelhantes, BC é paralelo a P_1P_2 e $P_1P_2 = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Portanto G_1G_2 é paralelo a AC é $G_1G_2 = \frac{1}{3}AC$. Por um argumento equivalente, concluímos que G_3G_4 é parelelo a AC e $G_3G_4 = \frac{1}{3}AC$ e assim G_1G_2 e G_3G_4 são paralelos e iguais a $\frac{1}{3}AC$.

Da mesma forma G_2G_3 e G_4G_1 são paralelos e iguais a $\frac{1}{3}BD$, portanto $G_1G_2G_3G_4$ é um paralelogramo.



(b) Observemos que pelo mesmo raciocínio temos que $P_1P_2P_3P_4$ é um paralelogramo semelhante a $G_1G_2G_3G_4$, e com razão de semelhança igual a $\frac{2}{3}$, segue que área$(G_1G_2G_3G_4) = \frac{4}{9}$área$(P_1P_2P_3P_4)$.

Por outro lado, como área$(AP_1P_4) = \frac{1}{4}$área(ABD) e área$(CP_3P_2) = \frac{1}{4}$área(CDB), segue que área(AP_1P_4) + área$(CP_3P_2) = \frac{1}{4}$área$(ABCD)$ e por um raciocínio equivalente área(BP_1P_2) + área$(DP_3P_4) = \frac{1}{4}$área$(ABCD)$, donde obtemos que

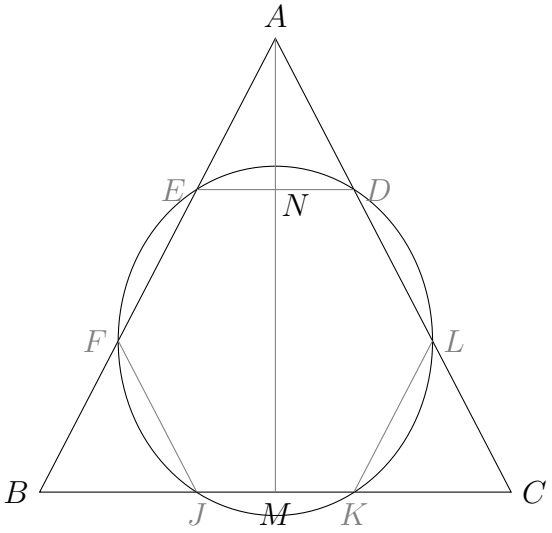
$$\text{área}(P_1P_2P_3P_4) = \frac{1}{2}\text{área}(ABCD), \quad \text{e portanto} \quad \text{área}(G_1G_2G_3G_4) = \frac{2}{9}\text{área}(ABCD).$$

3. Quando n não é múltiplo de 6, A tem a seguinte estratégia vencedora: na primeira jogada, ele pega um número de moedas entre 1 e 5 (note que todos os números de 1 a 5 são retiradas permitidas) de tal forma que as moedas que restam sejam em quantidade múltipla de 6. Como os múltiplos de 6 não são potências de primo, B não poderá retirar quantidade múltipla de 6, tendo que deixar na mesa uma quantidade não múltipla de 6. Nas jogadas seguintes, A repete o raciocínio, retirando entre 1 e 5 moedas e deixando para B uma quantidade múltipla de 6. Como o número de moedas está sempre diminuindo e B nunca poderá retirar todas as moedas, pois na vez dele a mesa sempre tem moedas em quantidade múltipla de 6, então A é quem ganhará.

   Se n é múltiplo de 6, a situação se inverte: na primeira rodada A terá que retirar um número não múltiplo de 6 de moedas, deixando para B um número não múltiplo de 6, e então se B aplicar a estratégia descrita, ele ganhará. Por isso B tem estratégia vencedora.

   Em particular, B tem estratégia vencedora se $n = 30$ e A tem estratégia vencedora se $n = 2012$.

4. Sejam D, E, F, J, K e L os pontos que trissetam os lado do triângulo e que passam pela circunferência $\mathcal{C}$, como mostrado na figura. Pelo teorema de Thales sabemos que DE é paralelo a BC e $DE = \frac{1}{3}BC = JK$, logo DE e JK são cordas da circunferência $\mathcal{C}$, paralelas e do mesmo comprimento, assim a linha que une os pontos médios de DE e JK passa pelo centro da circunferência e corta as duas cordas perpendicularmente.



   Por outra parte, se AM é a mediana correspondente ao lado BC, de novo pelo teorema de Thales temos que AM corta o segmento DL no ponto médio N. Como M também é ponto médio de JK, logo a mediana AM corta perpendicularmente o lado BC. Isso implica que os triângulos ABM e ACM são congruentes, em particular $AB = AC$. Realizando o mesmo procedimento a partir do vértice B, obtemos que$BC = BA$, e portanto o triângulo é equilátero.

   Uma segunda solução consiste em usar o conceito de potência de um ponto com respeito a uma circunferência: Observemos que a potência de A com respeito a $\mathcal{C}$ pode ser calculada de dois

formas distintas partir dos segmentos AF e AL. De fato,

$$\text{Potência}(A, \mathcal{C}) = AE \cdot AF = AD \cdot AL$$

como $AE = \frac{1}{3}AB$, $AF = \frac{2}{3}AB$, $AD = \frac{1}{3}AC$ e $AL = \frac{2}{3}AC$, concluímos que $\text{Potência}(A, \mathcal{C}) = \frac{2}{9}AB^2 = \frac{2}{9}AC^2$, portanto $AB = AC$. De igual forma, calculando a potência de B com respeito a $\mathcal{C}$ obtemos que $BA = BC$, logo o triângulo é equilátero.

5. (a) Observemos que $8^2 < 72 < 9^2$, logo $80^2 < 7200 < 90^2$. Vejamos se existe um número entre 80 e 90 tal que seu quadrado comece em 72. Para isso, suponhamos que $80 + n$ é o número procurado, com n um dígito, logo $7300 > (80+n)^2 > 7200$, e daqui obtemos duas desigualdades

$$\begin{cases} n^2 + 160n - 900 < 0 \\ n^2 + 160n - 800 > 0 \end{cases}.$$

Podemos resolver estas desigualdades, usando as soluções da equação quadrática, mas aqui faremos um método alternativo, usando o fato que n tem que ser um dígito, pois

$$0 > n^2 + 160n - 900 > 160n - 900, \quad \text{logo} \quad n < \frac{900}{160} < 6$$

e

$$0 < n^2 + 160n - 800 \leq 9^2 + 160n - 800 \quad \text{logo} \quad n > \frac{719}{160} > 4.$$

Assim $n = 5$ deve funcionar, de fato, $85^2 = 7225$.

(b) Vejamos que, para todo número natural M com k algarismos decimais, existem um número natural n tal os primeiros k algarismo de n^2 formam o número M. Vamos supor que $M+1$ não é um quadrado (pois caso contrário agregamos um algarismo ao final de M de tal forma, para o novo M, $M + 1$ não seja um quadrado) e suponhamos que $M + 1$ tem k algarismos. Seja s um número inteiro tal que $2s > k + 2$ e definimos $n := \lfloor 10^s\sqrt{M+1} \rfloor$ (onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro menor ou igual a x). A anterior operação equivale a calcular a raiz de $M + 1$ até a s-ésima casa decimal depois da vírgula e depois mover a vírgula s posições.

Afirmamos que os primeiros k algarismo de n^2 formam o número M. De fato, pela definição de n temos que

$$n^2 < 10^{2s}(M + 1) < (n + 1)^2.$$

Da segunda desigualdade se tem que

$$n^2 > 10^{2s}(M + 1) - 2n - 1 = 10^{2s}M + (10^{2s} - 2n - 1),$$

mas $10^{2s} - 2n - 1 > 10^{2s} - 3n > 10^s(10^s - 3\sqrt{M+1}) = 10^s - 10^{1+k/2} > 0$. Portanto

$$10^{2s}M < n^2 < 10^{2s}(M + 1),$$

que equivale a dizer que os primeiros k algarismos de n^2 formam o número M.