OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2012

NÍVEL 2

- Em um tabuleiro 8×8 , com casas pintadas de branco ou preto, dizemos que uma linha ou coluna é *repintada* quando trocamos as cores de todas as casas dessa linha ou coluna, isto é, uma casa branca vira preta, e vice versa.
 - Ao repintar 3 colunas distintas e 5 linhas distintas do tabuleiro, que inicialmente estava totalmente pintado de preto, quantas casas do tabuleiro ficaram brancas?
 - As quatro esquinas de um tabuleiro totalmente branco, são pintadas de preto. Mostrar que é impossível, repintando linhas e colunas, deixar todas as casas do tabuleiro de mesma cor.
- Os segmentos AB e CD têm comprimento 1 e se interceptam no ponto O , de tal forma que $\angle AOC = 60^\circ$. Mostrar que $AC + BD \geq 1$.
- Sabendo que a dízima periódica de $\frac{3366}{3367}$ é $0,999702$ (tem período 6), determine a dízima periódica do número $\frac{3}{3367}$.
 - Mostre que as representações decimais periódicas dos números racionais $\frac{1005}{2012}$ e $\frac{1007}{2012}$ têm período do mesmo comprimento.
- Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M um ponto interior. Sejam G_1 , G_2 , G_3 e G_4 os baricentros dos triângulos ABM , BCM , CDM e DAM respectivamente.
 - Mostre que $G_1G_2G_3G_4$ é um paralelogramo.
 - Determine a razão entre as áreas dos quadriláteros $G_1G_2G_3G_4$ e $ABCD$.

Observação: O baricentro do triângulo é o ponto de interseção das medianas do triângulo. Além disso, é conhecido que este ponto corta as medianas na proporção 2 : 1.
- Em um jogo são colocadas n moedas na mesa, e os jogadores A e B pegam alternativamente uma ou uma potência de um número primo de moedas. O jogador que ganha é quem pega a última moeda. Por exemplo, se inicialmente eles têm 12 moedas na mesa, o jogador B tem estratégia vencedora, pois não importado se A pega 1, 2*, 3, 4, 5, 7, 8, 9 ou 11 moedas, o que sobra é uma moeda ou uma potência de primo de moedas.
 - Quem tem estratégia vencedora se $n = 30$ e qual é a estratégia?
 - Quem tem estratégia vencedora se $n = 2012$?

* Caso A pegue 2, a estratégia de B é pegar 4, sobrando 6 que não é potência de primo.