OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2012

NÍVEL 3

1. Sejam x, y, z inteiros positivos consecutivos tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{45}$. Encontre o valor máximo de $x + y + z$.
2. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M um ponto interior. Sejam G_1, G_2, G_3 e G_4 os baricentros dos triângulos ABM, BCM, CDM e DAM respectivamente.

(a) Mostre que $G_1G_2G_3G_4$ é um paralelogramo.

(b) Determine a razão entre as áreas dos quadriláteros $G_1G_2G_3G_4$ e $ABCD$.

Observação: O baricentro do triângulo é o ponto de interseção das medianas do triângulo. Além disso, é conhecido que este ponto corta as medianas na proporção 2 : 1.

3. Em um jogo são colocadas n moedas na mesa, e os jogadores A e B pegam alternativamente uma ou uma potência de um número primo de moedas. O jogador que ganha é quem pega a última moeda. Por exemplo, se inicialmente eles têm 12 moedas na mesa, o jogador B tem estratégia vencedora, pois não importado se A pega 1, 2*, 3, 4, 5, 7, 8, 9 ou 11 moedas, o que sobra é uma moeda ou uma potência de primo de moedas.

(a) Quem tem estratégia vencedora se $n = 30$ e qual é a estratégia?

(b) Quem tem estratégia vencedora se $n = 2012$?

4. Uma circunferência corta os três lados de um triângulo ABC , de tal forma que cada lado fica dividido em três partes iguais. Mostrar que o triângulo ABC é equilátero.

5. O número $1156 = 34^2$ é um exemplo de um quadrado perfeito que começa em 11.

(a) Encontre um número tal que seu quadrado comece em 72.

(b) Existe algum número tal que seu quadrado comece em 2012?

^{0*} Caso A pegue 2, a estratégia de B é pegar 4, sobrando 6 que não é potência de primo.