Olimpíada Mineira de Matemática 2013

Gabarito Nível II

1. (a) Como a estrada tem exatamente $156 + 843 = 999$ quilômetros, então a placa que contém o número 056 também contém o número $999 - 056 = 943$

   (b) Se os números nas placas são $abc - def$, então $a + d = 9$, $b + e = 9$ e $c + f = 9$. Logo se a placa tem três números 1, então tem que ter um 1 no primeiro par, um no segundo e um no terceiro, assim o número de possibilidades é $2 \times 2 \times 2 = 8$. Podemos também listar todos eles

$$\{111 - 888; 118 - 881; 181 - 818; 188 - 811; 811 - 188; 881 - 118; 818 - 181; 888 - 111\}$$

   (c) Observe no par $abc - cde$, os primeiros três algarismos determinam os três últimos, assim unicamente precisamos escolher os três primeiros:

   - O a tem 10 possibilidades;
   - Dado que b não pode ser nem a, nem $9 - a$, então tem 8 possibilidades;
   - Dado que c não pode ser $a, 9 - a, b, 9 - b$, então tem 6 possibilidades.

   Portanto, o número de placas com 6 algarismos distintos é $10 \times 8 \times 6 = 480$.

   Uma contagem alternativa é a seguinte: Os pares de algarismos que somam 9 são

$$\{0 + 9; 1 + 8; 2 + 7; 3 + 6; 4 + 5\},$$

   assim precisamos escolher três destes pares, e esto pode ser feito de $5 \times 4 \times 3$ maneiras. Em cada par precisamos escolher a ordem em que colocamos cada algarismo, assim temos em total $5 \times 4 \times 3 \times 2^3 = 480$ placas.

2. (a) Dado que o último algarismo do primeiro fator é 0, facilmente podemos preencher os últimos números da operação:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & \square & 0 \\
 & \times & 0 & \square & 8 \\
\hline
+ & \square & 1 & \square & 0 \\
\square & \square & 3 & 0 & \\
\hline
\mathbf{O} & \mathbf{M} & i & \mathbf{M} & 0
\end{array}$$

   Portanto $a = 0$. Além disso i na operação é obtido como soma de $1 + 3$ porque antes disso não temos centenas adicionais, portanto $i = 4$.

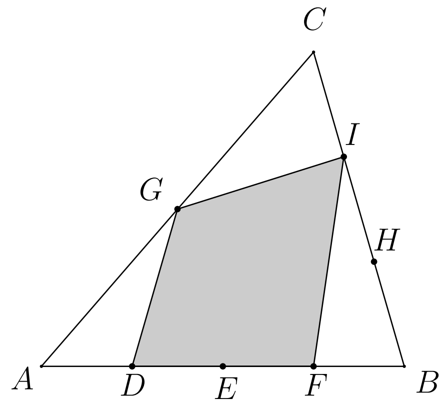
   (b) Observemos que 3 é o algarismo das dezenas do produto entre o algarismo das dezenas do primeiro número o algarismo das dezenas do segundo. Assim precisamos encontrar dois algarismo cujo produto termine em 3. Tal produto não pode ser $13, 23, 43, 53, 73, 83$ pois este números são primos maiores que 10. Também não pode ser 33 e 93 pois tem um fator primo maior que 10, portanto as únicas possibilidades para o produto são $3 = 1 \times 3$ e $63 = 7 \times 9$. Em cada caso obtemos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 1 & 0 \\
 & \times & 0 & 3 & 8 \\
\hline
+ & 1 & 6 & 8 & 0 \\
 & 6 & 3 & 0 & \\
\hline
 & 7 & 9 & 8 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 3 & 0 \\
 & \times & 0 & 1 & 8 \\
\hline
+ & 1 & 8 & 4 & 0 \\
 & 2 & 3 & 0 & \\
\hline
 & 4 & 1 & 4 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 9 & 0 \\
 & \times & 0 & 7 & 8 \\
\hline
+ & 2 & 3 & 2 & 0 \\
2 & 0 & 3 & 0 & \\
\hline
2 & 2 & 6 & 2 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 7 & 0 \\
 & \times & 0 & 9 & 8 \\
\hline
+ & 2 & 1 & 6 & 0 \\
2 & 4 & 3 & 0 & \\
\hline
2 & 6 & 4 & 6 & 0
\end{array}$$

Portanto a resposta correta é a última multiplicação, e assim $M = 6$ e $O = 2$

3. (a) Dado que o triangulo $\triangle AGD$ tem base AD que é $\dfrac{1}{4}$ da base AB é altura com respeito a essa base igual a $\dfrac{1}{2}$ da altura do triângulo $\triangle ABC$, então a área$(AGD) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} \times$área$(ABC)$, portanto

$$\text{área}(ABC) = 4 \times 2 \times 30 = 240$$



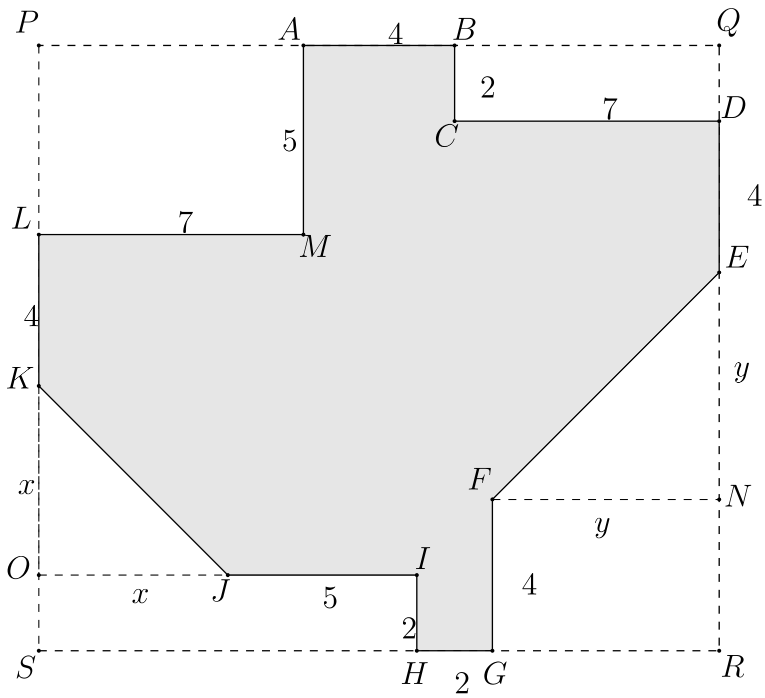
(b) Observemos que o triângulo $\triangle CGI$ tem área correspondente a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ da área de $\triangle ABC$, e o triângulo $\triangle IFB$ é área correspondem a $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ da área de $\triangle ABC$. Segue que

$$\text{área}(CGI) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 240 = 40 \quad \text{e} \quad \text{área}(IFB) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times 240 = 40.$$

Portanto a área de $DFIG$ é $240 - 30 - 40 - 40 = 130$.

4. (a) Observemos que a largura original da chapa pode ser obtida somando os comprimentos de AB, CD e LM, isto é $7 + 4 + 7 = 18$.

(b) Uma prova alternativa pode ser encontrada no gabarito de nível I.



Primeiro notamos que, de acordo com a figura acima, $\triangle KOJ$ e $\triangle ENF$ são triângulos retângulos isósceles. Denotamos por x o comprimento de $KO = OJ$ e por y o comprimento de $FN = NE$. Como

$$5 + 4 + x + 2 = 2 + 4 + y + 4$$

segue que $x = y - 1$. Por outra parte $x + 5 + 2 + y = 18$, assim $x + y = 11$ de onde $x = 5$ e $y = 6$, e portanto a largura da chapa original era

$$5 + 4 + 5 + 2 = 16.$$

(c) Podemos calcular a área da peça como a área total da chapa $18 \times 16 = 288$ menos os pedaços recortados:

- $PLMA$ que tem área $5 \times 7 = 35$.
- $BCDQ$ que tem área $2 \times 7 = 14$.
- KOJ que tem área $\frac{1}{2} \times 5 = 12,5$.
- $OIHS$ que tem área $2 \times 10 = 20$.
- $FNRG$ que tem área $6 \times 4 = 24$.
- FNE que tem área $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$.

Portanto a área da peça recortada é

$$288 - (35 + 14 + 12,5 + 20 + 24 + 18) = 164,5$$

5. (a) Existem infinitos exemplos: um deles é $\{420, 630, 1050, 1470\}$. Basta pegar quatro primos distintos p, r, s, t, e se denotamos por $n = pqrt$ temos que $\{np, nq, nr, nt\}$ é um conjunto de quase-múltiplos.

(b) Em geral podemos pegar 2013 primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_{2013}$ e se denotamos por n o produto deles, vamos a ter que o conjunto

$$\{np_1, np_2, \ldots, np_{2013}\}$$

é um conjunto formado por 2013 quase-múltiplos.