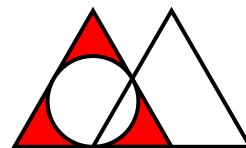


OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2013

GABARITO NÍVEL III



1. (a) Podemos dividir a lista obtida a partir de 2013 em três listas da seguinte forma:
Os números obtidos entre 2 e 0 são

2																	0
2								-2									0
2				-4				-2				2					0
2		-6		-4		2		-2		4		2		-2			0
2	-8	-6	2	-4	6	2	-4	-2	6	4	-2	2	-4	-2	2	0	0

Os números obtidos entre 0 e 1 são

0																	1
0								1									1
0				1				1				0					1
0		1		1		0		1		-1		0		1			1
0	1	1	0	1	-1	0	1	1	-2	-1	1	0	1	1	0	1	1

e os números obtidos entre 1 e 3 são

1																	3
1								2									3
1				1				2				1					3
1		0		1		1		2		-1		1		2			3
1	-1	0	1	1	0	1	1	2	-3	-1	2	1	1	2	1	3	3

- (b) Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{l-1}, a_l$ os números obtidos na n -ésima lista, e denotemos por S_n a soma de tais números. Assim os números obtidos na $n + 1$ -ésima lista são

$$a_1, a_2 - a_1, a_2, a_3 - a_2, a_3, \dots, a_{l-1}, a_l - a_{l-1}, a_l$$

Assim os termos que estão em posições ímpares são exatamente os termos da anterior lista, e portanto sua soma é S_n , enquanto os números que estão nas posições pares tem soma

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{l-1} - a_{l-2}) + (a_l - a_{l-1}) = a_l - a_1.$$

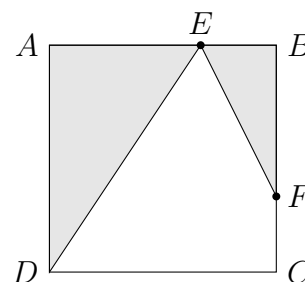
Segue que, a soma dos números na linha $n + 1$ é $S_{n+1} = S_n + (a_l - a_1)$. Como todas as listas começam em 2 e terminam em 3, temos que $S_{n+1} = S_n + 1$, e como $S_0 = 2 + 0 + 1 + 3 = 6$, concluímos que $S_{100} = 106$.

2. (a) Observemos que $AE = AB - EB = 10 - 4 = 6$, portanto a área do triângulo $\triangle ADE$ é

$$\frac{1}{2}AD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30.$$

De igual forma como $BF = AE = 6$ temos que a área do triângulo $\triangle EFB$ é

$$\frac{1}{2}EB \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12.$$



- (b) Denotando por x o comprimento do segmento AE , temos que $BF = x$ e $EB = 10 - x$. Desta forma a área do triângulo $\triangle ADE$ é $\frac{1}{2} \cdot 10x = 5x$, a área do triângulo $\triangle EBF$ é $\frac{x}{2}(10 - x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$, e a soma das duas áreas é

$$A(x) = 10x - \frac{1}{2}x^2.$$

Assim queremos encontrar o valor de x tal que $A(x) = 40$, isto é, queremos encontrar as soluções positivas e menores que 10 da equação quadrática $\frac{1}{2}x^2 - 10x + 40 = 0$, ou equivalentemente $x^2 - 20x + 80 = 0$, que tem como soluções

$$\frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 80}}{2} = 10 \pm \sqrt{20},$$

assim o valor procurado de AE é $10 - \sqrt{20}$.

- (c) Como a área em termos de $x = AE$ é dada por

$$\begin{aligned} A(x) &= 10x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 20x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 20x + 100) + 50 \\ &= 50 - \frac{1}{2}(x - 10)^2. \end{aligned}$$

Portanto o máximo da soma das áreas se dá quando $x = 10$, isto é, quando E e B coincidem.

3. (a) Observemos primeiro que $999.999.000 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, assim, é fácil construir triplas legais, por exemplo $(8, 27, 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37)$ ou $(8, 37, 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)$
- (b) Como 999.999.000 possui exatamente 7 fatores primos distintos, e como os fatores primos de a , b , c são distintos, para construir uma tripla legal, basta dizer que fator primo divide a qual destes três números. Para contar as triplas, primeiro contaremos triplas esquecendo a ordem de a , b e c : Observemos que dada primo pode dividir um único destes números, assim cada primo tem 3 escolhas, e assim poderemos formar 3^7 triplas. Destas temos algumas que não triplas validas, pois pode acontecer que alguns dos números a, b, c não foi “escolhido” por nenhum número primo, e nesse caso ele seria igual a 1, assim precisamos tirar os casos de triplas que contém o número 1. Este se divide em dois casos:
- Os que contém dois números 1 são 3 triplas dependendo qual dos números é distinto de 1.
 - Os que contém exatamente um número 1 é a número de formas de escolher qual número é 1 (três formas), multiplicado pelo número de forma de distribuir os fatores primos entre os outros dois números tal que todos os fatores primos não fiquem em um número só, e isto pode ser feito de $2^7 - 2$.

Portanto o número de triplas (esquecendo a ordem) que podem ser obtidas é $3^7 - 3(2^7 - 2) - 3$. Agora cada tripla $a < b < c$ gera 6 triplas não ordenadas. Portanto o número de triplas legais é

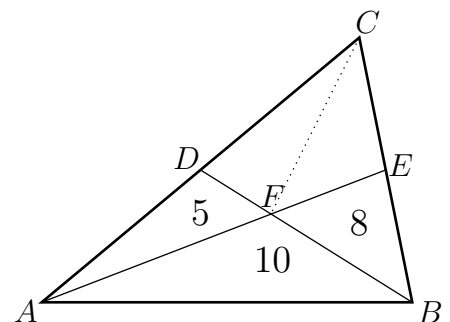
$$\frac{3^7 - 3(2^7 - 2) - 3}{6} = \frac{3^6 - 1}{2} - 2^6 + 1 = 301.$$

4. (a) Observemos primeiro que os triângulos $\triangle BAF$ e $\triangle FAD$ tem a mesma altura h com respeito às bases BF e FD . Portanto

$$\text{área}(\triangle BAF) = \frac{1}{2}BF \cdot h = 10 \text{ e } \text{área}(\triangle FAD) = \frac{1}{2}FD \cdot h = 5.$$

Dividindo estas duas identidades, e simplificando obtemos

$$\frac{BF}{FD} = \frac{10}{5} = 2.$$



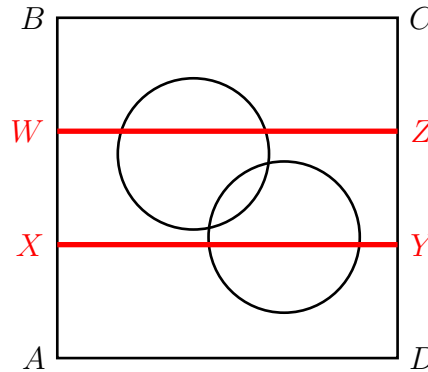
(b) Pelo mesmo argumento do item anterior temos que

$$\frac{\text{área}(AFC)}{\text{área}(FEC)} = \frac{AF}{FE} = \frac{\text{área}(AFB)}{\text{área}(FBE)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

(c) Denotemos por x a área do triângulo $\triangle DFC$ e por y a área do triângulo $\triangle FCE$. Do item anterior temos que $\frac{x+5}{y} = \frac{5}{4}$, de forma similar obtemos que $\frac{8+y}{x} = \frac{BF}{FD} = 2$, de onde

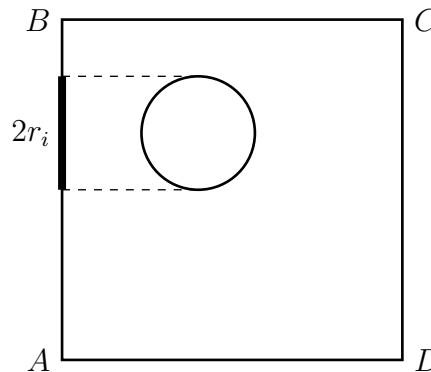
obtemos o sistema de equações $\begin{cases} 4x - 5y = -20 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$, que tem como soluções $x = 10$ e $y = 12$.

5. (a) Sejam $ABCD$ o quadrado de lado 9. E sejam XY e WZ duas linhas paralelas a BC que dividem o quadrado em três retângulos iguais, como mostrado na figura.



Observemos que altura de cada retângulo é 3 e cada circunferência tem diâmetro 4, então cada circunferência corta uma ou duas circunferências. Como temos 7 circunferências, então uma desta duas linhas corta pelo menos 4 das circunferências.

- (b) Suponhamos que as k circunferências tem raios $r_1, r_2, \dots, r_k$. Se projetamos cada circunferência sobre o lado AB (ver figura),



a circunferência de raio r_i se projeta em um intervalo de comprimento $2r_i$ (que corresponde ao diâmetro). Assim as k circunferências determinam k subintervalos de AB de comprimento $2r_1, 2r_2, \dots, 2r_k$. Como o perímetro total é igual a

$$2\pi(r_1 + r_2 + \dots + r_k)\pi = 85.$$

então a soma dos subintervalos é

$$2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_k = \frac{85}{\pi}.$$

No caso que nenhuma linha horizontal corte 4 circunferência então nenhum ponto de AB pertence a 4 ou mais subintervalos, e nesse caso cada ponto pertence no máximo a 3 subintervalos, e assim a soma dos comprimentos dos subintervalos seria menor o igual a $3|AB| = 27$, mas $\frac{85}{\pi} > 27$ o que é contraditório. Logo existe uma linha horizontal que corta quatro ou mais circunferências.