Olimpíada Mineira de Matemática 2013
Nível 3

1. Inicialmente escrevemos no quadro os números 2 0 1 3, nessa ordem. Para construir uma nova linha fazemos a seguinte operação: copiamos os números da linha anterior e entre quaisquer dois números adjacentes escrevemos o resultado da subtração entre o número da direita e o número da esquerda. Por exemplo depois de uma operação, obtemos na segunda linha a lista

$$\mathbf{2} \quad -2 \quad \mathbf{0} \quad 1 \quad \mathbf{1} \quad 2 \quad \mathbf{3}$$

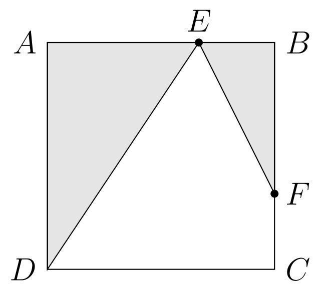
e depois de duas operações obtemos na terceira linha a lista

$$\mathbf{2} \quad -4 \quad \mathbf{-2} \quad 2 \quad \mathbf{0} \quad 1 \quad \mathbf{1} \quad 0 \quad \mathbf{1} \quad 1 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad \mathbf{3}$$

   (a) Qual é a lista de números obtida depois de aplicar a operação duas vezes mais?
   (b) Qual é a soma dos números da lista que foi obtida após cem de tais operações?

2. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 10 e, E e F pontos sobre os lados AB e BC, respectivamente, tais que $AE = BF$.

   (a) Determine a área dos triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle EFB$ quando $EB = 4$.
   (b) Determine quanto mede AE no caso que a soma das áreas dos triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle EFB$ é 40.
   (c) Determine quanto mede AE para que a soma das áreas dos triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle EFB$ seja a máxima possível.



3. Uma tripla de números inteiros (a, b, c) é n-legal se

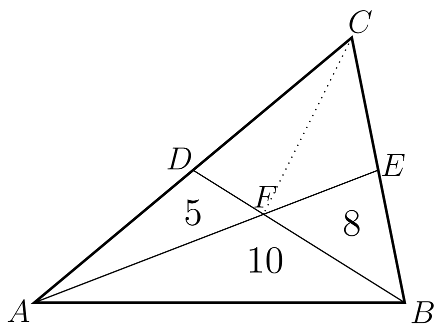
   - $1 < a < b < c$;
   - O produto abc é igual a n e
   - o máximo divisor comum de qualquer dois deles é 1.

   Por exemplo, $(999, 1000, 1001)$ e $(143, 999, 7000)$ são triplas 999.999.000-legais.

   (a) Encontre duas triplas 999.999.000-legais, diferentes das dadas no exemplo anterior.
   (b) Quantas triplas 999.999.000-legais existem?

4. O triângulo $\triangle ABC$ é dividido pelos segmentos AE e BD de tal forma que a área de $\triangle ABF$ é 10, a área de $\triangle AFD$ é 5 e a área de $\triangle BFE$ é 8, como na figura. Calcule

   (a) A razão $\dfrac{BF}{FD}$.
   (b) A razão entre as áreas dos triângulos $\triangle AFC$ e $\triangle FEC$.
   (c) As áreas dos triângulos $\triangle FDC$ e $\triangle FEC$.



5. (a) Dentro de um quadrado de lado 9 temos, totalmente contidas, 7 circunferências de raio 2. Mostre que podemos traçar uma linha reta que intercepta 4 ou mais circunferências.
   (b) Dentro de um quadrado de lado 9 temos circunferências totalmente contidas, não necessariamente iguais, cuja soma de seus perímetros é 85. Mostre que podemos traçar uma linha reta que intercepta 4 ou mais circunferências.