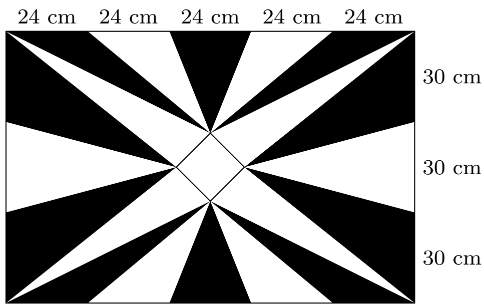
OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2014

Nível I

1. Jânio, presidente da agremiação de Veteranos Futebol Clube, resolveu fazer uma bandeira para apoiar sua equipe que fará sua estreia no campeonato regional. Ele comprou um pano branco retangular de dimensões 120×90 centímetros. Ele quer pintar o pano de acordo o modelo à direita, onde o quadrado interior tem diagonais de comprimento 20 cm paralelas aos lados da bandeira.



(a) Qual é a área pintada se o centro da bandeira e o centro do quadrado coincidem?

Solução: Na figura temos dois tipos de triângulos pretos:

- Seis triângulos com base de comprimento 24cm. Estes triângulos têm altura $\frac{90-20}{2} = 35$cm. Assim a área pintada com tais triângulos é $6 \times \frac{24 \times 35}{2} = 2520\text{cm}^2$.
- Quatro triângulos com base de comprimento 30cm. Estes triângulos têm altura $\frac{120-20}{2} = 50$cm. Assim a área pintada com tais triângulos é $4 \times \frac{30 \times 50}{2} = 3000\text{cm}^2$.

Logo o total de área pintada é $2520 + 3000 = 5520\text{cm}^2$.

(b) Por erro de Jânio, quando pintou a bandeira os centros não coincidiram. A área pintada aumentou, diminuiu ou permaneceu igual?

Solução: De fato, a área não muda quando deslocamos o triângulo. Observe que se deslocamos o quadrado de tal forma que os três triângulos inferiores ficam com altura h, então os três triângulos superiores ficam com altura $90 - 20 - h = 70 - h$, logo a área destes seis triângulos é

$$3 \times \frac{24 \times h}{2} + 3 \times \frac{24 \times (70 - h)}{2} = 36h + (2520 - 36h) = 2520\text{cm}^2.$$

O mesmo acontece com os quatro triângulos laterais.

2. Quando dividimos 59 por 2, 3, 4, 5 e 6 obtemos restos 1, 2, 3, 4 e 5 respectivamente.

(a) Encontre outros dois números que quando divididos por 2, 3, 4, 5 e 6 deixam restos 1, 2, 3, 4 e 5. respectivamente.

Solução: Observe que se pegamos um de tais números procurados e somamos 1, o novo número deixa resto 0 quando dividido por 2, 3, 4, 5 e 6, logo ele é um múltiplo comum de 2, 3, 4, 5 e 6.

Como o mínimo múltiplo comum de 2, 3, 4, 5 e 6 é 60, então todos os múltiplos de 60 também tem tal propriedade. Portanto, exemplos de números procurados são 119, 179, 239, etc.

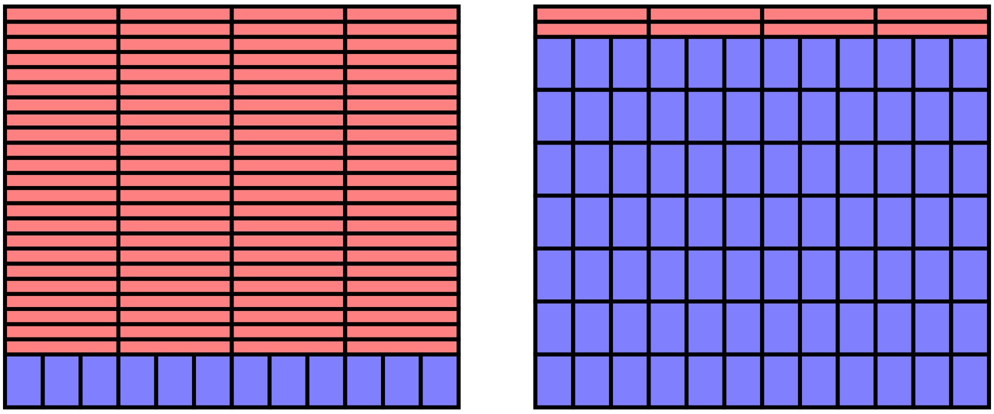
(b) Encontre um número que além da propriedade acima, cumpre que quando dividido por 7 e 9 deixa restos 6 e 8 respectivamente.

Solução: Observe que neste caso o processo é o mesmo: Se somamos um ao número ele é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9. Como o mínimo comum múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9 é 1260, temos que os números 1259, 2519, 3779 são possíveis soluções.

3. Getúlio possui cartões de dimensões 2×15 e 5×7.

(a) Mostre que ele consegue cobrir totalmente com os cartões um retângulo de dimensões 53×60, sem sobrepor os cartões.

Solução: Tem uma quantidade grande de formas de cobrir. Dois delas são mostrada na figura, onde os retângulos azuis tem dimensões 5×7 e os retângulos vermelhos tem dimensões 15×2.



(b) Explique por que Getúlio NÃO consegue cobrir totalmente com os cartões um retângulo de dimensões 38×59, sem sobrepor os cartões.

Solução: Observemos que as áreas dos cartões são $5 \times 7 = 35$ e $2 \times 15 = 30$ são divisíveis por 5, logo os cartões somente conseguem cobrir áreas múltiplas de 5, mas se as dimensões são 38×59, a área não é divisível por 5, logo não pode ser coberta com os cartões.

4. Um número é chamado *palíndromo* se é maior que 9 e escrevendo seus algarismos em forma inversa é obtido o mesmo número. Por exemplo os números 353, 8448 e 4532354 são palíndromos.

A igualdade $2011 = 1441 + 515 + 55$ é um exemplo de decomposição do número 2011 como a soma de palíndromos distintos.

(a) Escreva o número 2014 como soma de palíndromos distintos.

Solução: Tem várias soluções este item. Algumas formas de escrever 2014 como soma de palíndromos são

$$2014 = 1771 + 111 + 99 + 33 = 1001 + 484 + 474 + 55$$

(b) Mostre que todo número menor que 1000 e divisível por 11 ou é palíndromo ou pode ser escrito como soma de palíndromos distintos.

Solução: Observemos primeiro que

(I) Os números menores que 100 divisíveis por 11, são $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$, logo todos são palíndromos.

(II) Os números 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979 são palíndromos e divisíveis por 11.

Suponhamos que temos um número N menor que 1000 e divisível por 11.

- Se ele é palíndromo, é algum dos listados anteriormente.
- Caso N não seja palíndromo, pegamos o maior número da lista (II) que é menor que N, e fazemos a diferença entre N e tal número. O número obtido desta forma é menor que $616 - 484 = 132$ e divisível por 11. Se o número obtido é menor que 100, então é palíndromo, e se é maior somente pode ser 121 ou $110 = 99 + 11$. Logo todo número menor que 1000 e divisível por 11 pode-se escrever como soma de no máximo três palíndromos distintos.

5. Deodoro escreveu os números desde 1 até 200, um atrás do outro, formando o número

$$12345678910111213\cdots 197198199200$$

Depois disso, no primeiro passo ele apaga os algarismos que estavam nas posições ímpares

$$\cancel{1}2\cancel{3}4\cancel{5}6\cancel{7}8\cancel{9}1\cancel{0}1\cancel{1}1\cancel{2}1\cancel{3}\cdots\cancel{1}9\cancel{7}1\cancel{9}8\cancel{1}9\cancel{9}2\cancel{0}0 \qquad \text{obtendo o número} \qquad 24681111\ldots 918920.$$

Nos passos seguintes ele apaga os algarismos em posições ímpares do número que sobrou no passo anterior, e assim sucessivamente, até obter um único algarismo.

(a) Quantos algarismos tinha o número original?

Solução: Temos

- nove números com um algarismo, assim temos 9 algarismos.
- 90 números com dois algarismos, assim temos $90 \times 2 = 180$ algarismos.
- 101 números com três algarismos, assim temos $101 \times 3 = 303$ algarismos.

logo o número original tinha $303 + 180 + 9 = 492$ algarismos

(b) Quantas passos Deodoro tem que fazer até obter um único algarismo?

Solução: Em cada passo, Deodoro apaga a metade se o número de algarismos é par, e a metade mais $0,5$ se o número de algarismos é ímpar. Logo o número de algarismos obtido em cada passo é

$$492 \longrightarrow 246 \longrightarrow 123 \longrightarrow 61 \longrightarrow 30 \longrightarrow 15 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$$

logo precisamos de 8 passos para obter um único algarismo.

(c) Qual é o algarismo que sobrou?

Solução: No primeiro passo sobraram os números em posições pares, no segundo passo os que estavam em posições múltiplas de 4, no terceiro passo os que estavam em posições múltiplas de 8, e assim subsecivamente, logo depois de oito passo vai a sobrar o número que estava na posição $2^8 = 256$.

Agora observemos que os números de 1 até 100 ocupam $9 + 2 \times 90 + 3 = 192$ posições. Como $256 - 192 = 64$ e $64 = 3 \times 21 + 1$, assim temos ainda que escrever os seguintes 21 números e a posição 256 é o ocupado pelo primeiro algarismo (a esquerda) de 122, isto é 1.