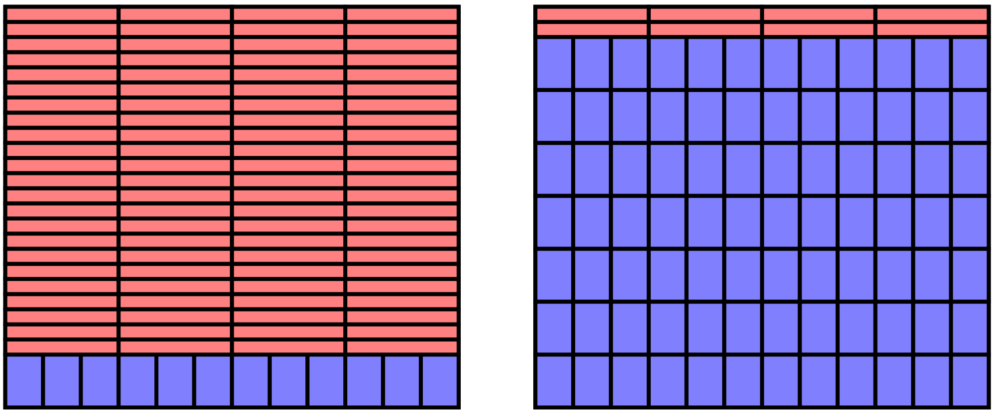
OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2014

Nível II

1. (a) Itamar possui cartões de dimensões 2×15 e 5×7. Mostre que ele consegue cobrir totalmente com os cartões, um retângulo de dimensões 53×60 sem sobrepor os cartões, mas NÃO consegue cobrir um retângulo de dimensões 38×59.

Resposta: Tem uma quantidade grande de formas de cobrir o retângulo 53×60. Dois delas são mostrada na figura, onde os retângulos azuis tem dimensões 5×7 e os retângulos vermelhos tem dimensões 15×2.



Por outra parte, as áreas dos cartões são $5 \times 7 = 35$ e $2 \times 15 = 30$ são divisíveis por 5, logo os cartões somente conseguem cobrir áreas múltiplas de 5, mas se as dimensões são 38×59, a área não é divisível por 5, logo não pode ser coberta com os cartões.

(b) Agora Itamar possui pequenos blocos retangulares de madeira de dimensões $4 \times 5 \times 10$ e ele quer preencher totalmente um quarto de dimensões $2^7 \times 3^7 \times 5^7$ com os blocos de madeira, sem deixar buracos. João consegue fazer tal serviço? Justifique sua resposta.

Resposta:

Observe que não é possível cobrir a base de dimensões $2^7 \times 3^7$, pois só temos três formas de colocar os blocos nesta base, que são com a fase 4×5, com a fase 4×10 e com a fase 5×10, mas todas estas fases tem área múltipla se 5, logo não podem cobrir totalmente tal base que tem área NÃO divisível por 5.

2. Um número é chamado *palíndromo* se é maior que 9 e escrevendo seus algarismos em forma inversa é obtido o mesmo número. Por exemplo os números 353, 8448 e 4532354 são palíndromos.

A igualdade $2011 = 1441 + 515 + 55$ é um exemplo de decomposição do número 2011 como a soma de palíndromos distintos.

(a) Escreva o número 2014 como soma de palíndromos distintos.

Solução: Tem várias soluções este item. Algumas formas de escrever 2014 como soma de palíndromos são

$$2014 = 1771 + 111 + 99 + 33 = 1001 + 484 + 474 + 55$$

(b) Mostre que todo número menor que 1000 e divisível por 11 ou é palíndromo ou pode ser escrito como soma de palíndromos distintos.

Solução: Observemos primeiro que

(I) Os números menores que 100 divisíveis por 11, são $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$, logo todos são palíndromos.

(II) Os números 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979 são palíndromos e divisíveis por 11.

Suponhamos que temos um número N menor que 1000 e divisível por 11.

- Se ele é palíndromo, é algum dos listados anteriormente.
- Caso N não seja palíndromo, pegamos o maior número da lista (II) que é menor que N, e fazemos a diferença entre N e tal número. O número obtido desta forma é menor que $616 - 484 = 132$ e divisível por 11. Se o número obtido é menor que 100, então é palíndromo, e se é maior somente pode ser 121 ou $110 = 99 + 11$. Logo todo número menor ou igual a $979 + 132 = 1111$ e divisível por 11 pode-se escrever como soma de no máximo três palíndromos distintos.

(c) Mostre que todo número maior ou igual a 500 pode se escrito como soma de um ou mais palíndromos.

Resposta: Suponhamos primeiro que o número é menor que 1111. Observe que os dez números 101, 111, 131, 141, 151, 161, 181, 191, 212 e 303 são todos palíndromos, nenhum é divisível por 11 e deixam restos distintos quando divididos por 11. Assim se temos um número maior que 500, podemos tirar um deste números para que sobre um número divisível por 11. Neste ponto podemos seguir os passos do item anterior. Em particular com isso mostramos que todo número maior ou igual a 303 é soma de palíndromos.

No caso que o número N seja maior que 1111, tiramos dele o maior palíndromo menor que $N - 101$. Se este número ainda é maior que 1111 votamos a repetir o processo, assim até obter um número menor que 1000. Neste ponto basta usar o passo anterior.

3. Juscelino escreveu no quadro todos os anagramas da palavra MINEIRO e ordenou eles por ordem alfabética: EIIMNOR EIIMNRO EIIMONR ...... RONMIIE

(a) Quais são os anagramas que estão na quarta e na quinta posição?

Resposta: EIIMORN e EIIMRNO

(b) Quantos anagramas Juscelino escreveu no quadro?

Como a palavra MINEIRO tem 7 letras e somente a I repetida, então o número de anagramas é $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2} = 2520$.

(c) Em qual posição está a palavra MINEIRO?

Vamos contar quantas palavras estão antes da palavra MINEIRO, para isso observemos que todas as palavras que começa com E e I estão antes que MINEIRO. As que começam com E são $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2} = 360$ e as que começa com I são $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ Também as que começa com ME também estão antes que MINEIRO que são $\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2} = 60$. Seguindo o mesmo processo, as palavras que começa com MIE e MII também estão antes, e elas são $4\times3\times2\times1 = 24$ de cada. A única anagrama que resta antes de mineiro é MINEIOR, assim a palavra MINEIRO se encontra na posição

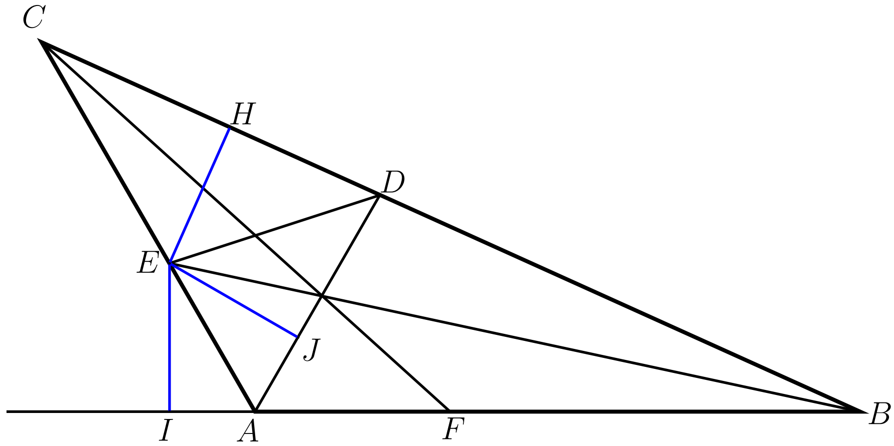
$$360 + 720 + 60 + 24 + 24 + 1 + 1 = 1190.$$

4. Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que $\measuredangle BAC = 120°$. Sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, AC e AB respectivamente, de tal forma que AD, BE e CF são as bissetrizes do triângulo $\triangle ABC$

(a) Mostre que $\measuredangle ADE = \measuredangle EDC$.

Resposta: Sejam EI, EH e EJ segmentos perpendiculares a AB, BC e AD respectivamente. Como BE é bissetriz, então $EI = EH$. Por outra parte, $\measuredangle IAE = \measuredangle EAD = 60°$, portanto CA é bissetriz do ângulo IAD e logo $EI = EJ$.

Do anterior concluímos que $EJ = EI = EH$, logo E está à mesma distancia dos lados do angulo $\angle ADE$ e portanto ED é bisetriz deste ângulo.



(b) Mostre que o triângulo $\triangle DEF$ é retângulo.

Resposta: Pelo item anterior temos que $\measuredangle ADE = \measuredangle EDC$ e de igual forma $\measuredangle ADF = \measuredangle FDB$, portanto

$$\measuredangle EDF = \measuredangle EDA + \measuredangle ADF = \frac{1}{2}(\measuredangle BDA + \measuredangle ADC) = 90°.$$

5. Na cidade de Seis-Corações, existe uma avenida de comprimento total 2014 metros que possui postes igualmente espaçados. A distância entre dois postes consecutivos é um número inteiro de metros. O primeiro poste está no começo da avenida e o último está no final da avenida.

(a) Quais são os possíveis valores para o número de postes na avenida?

Resposta: Dado que $2014 = 2 \times 19 \times 53$, então o conjunto de divisores de 2014 é

$$\mathcal{D}_{2014} = \{1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007, 2014\},$$

que são os possíveis valores para os espaços entre os postes. Assim o número possível de postes está no conjunto

$$\{2, 3, 20, 39, 54, 107, 1008, 2015\}.$$

O prefeito da cidade plantou árvores na avenida de tal forma que as árvores estão igualmente espaçadas e a distância entre duas consecutivas é um número inteiro de metros. Sabemos que entre 2 postes consecutivos sempre há no mínimo 2 árvores, entre 3 postes consecutivos há no máximo 5 árvores e o número total de árvores é maior que 97 e menor que 200.

(b) Qual é a distância entre os postes? Qual é a distância entre as árvores?

Resposta: Chamemos de d a distancia entre dois postes, assim d é um elemento de $\mathcal{D}_{2014}$ e n o número de intervalos entre postes, assim $nd = 2014$. Seja y o número de arvores. Como em cada intervalo temos no mínimo dois arvores então temos a relação $2n \leq y < 200$, logo $n \leq 99$. Por outra parte entre dois intervalos consecutivos temos no máximo 5 arvores, de onde $5(n-1) - a - b \geq 2y > 2 \cdot 97 = 194$, onde a é o número de arvores no primeiro intervalo e b o número de arvores no último intervalo. Usando o fato que $a, b \geq 2$ temos que $5(n-1) \geq 198$, assim $n \geq 40$. Como n é um divisor de 2014 e o único divisor entre 40 e 99 é 53 segue que $n = 593$ e portanto a distancia entre postes é $d = \frac{2014}{53} = 38$.

Além disso, como $2n \leq y < \frac{5(n-1)-a-b}{2}$, segue que $108 \leq y \leq 140$, isto é, o número de árvores está entre 108 e 140. Por outra parte, se f é a distancia entre as arvores, temos que

$$(y-1)f \leq 2014, \quad \text{e} \quad 2014 - 2 \times 38 \leq (y-3)f,$$

portanto $15 \leq f \leq 19$.

O caso $f = 15$ é impossível pois a distancia entre 6 arvores consecutivas é 75, assim se a primeira arvores está a distancia $r < 22$ do primeiro poste, a 6^a árvore está a distancia $r - 1$ do anterior poste, a 12^a árvore está a distancia $r - 2$ da anterior poste e assim subsecivamente ate a arvore $(6\lfloor r \rfloor)^a$ está a distancia < 1 do anterior poste, logo nesse seguinte intervalo teríamos 6 postes .

Para os valores de $f = 16, 17,$ 18 e 19 é possível encontrar um exemplo de como posicionar as árvores de tal forma que cumpram a condição pedida.