# OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2014

## Nível III

1. Na cidade de Seis-Corações, existe uma avenida de comprimento total 2014 metros que possui postes igualmente espaçados. A distância entre dois postes consecutivos é um número inteiro de metros. O primeiro poste está no começo da avenida e o último está no final da avenida.

   (a) Quais são os possíveis valores para o número de postes na avenida?

   **Resposta:** Dado que $2014 = 2 \times 19 \times 53$, então o conjunto de divisores de 2014 é

   $$\mathcal{D}_{2014} = \{1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007, 2014\},$$

   que são os possíveis valores para os espaços entre os postes. Assim o número possível de postes está no conjunto

   $$\{2, 3, 20, 39, 54, 107, 1008, 2015\}.$$

   O prefeito da cidade plantou árvores na avenida de tal forma que as árvores estão igualmente espaçadas e a distância entre duas consecutivas é um número inteiro de metros. Sabemos que entre 2 postes consecutivos sempre há no mínimo 2 árvores, entre 3 postes consecutivos há no máximo 5 árvores e o número total de árvores é maior que 97 e menor que 200.

   (b) Qual é a distância entre os postes? Qual é a distância entre as árvores?

   **Resposta:** Chamemos de $d$ a distancia entre dois postes, assim $d$ é um elemento de $\mathcal{D}_{2014}$ e $n$ o número de intervalos entre postes, assim $nd = 2014$. Seja $y$ o número de arvores. Como em cada intervalo temos no mínimo dois arvores então temos a relação $2n \leq y < 200$, logo $n \leq 99$. Por outra parte entre dois intervalos consecutivos temos no máximo 5 arvores, de onde $5(n-1) - a - b \geq 2y > 2 \cdot 97 = 194$, onde $a$ é o número de arvores no primeiro intervalo e $b$ o número de arvores no último intervalo. Usando o fato que $a, b \geq 2$ temos que $5(n-1) \geq 198$, assim $n \geq 40$. Como $n$ é um divisor de 2014 e o único divisor entre 40 e 99 é 53 segue que $n = 593$ e portanto a distancia entre postes é $d = \frac{2014}{53} = 38$.

   Além disso, como $2n \leq y < \frac{5(n-1)-a-b}{2}$, segue que $108 \leq y \leq 140$, isto é, o número de árvores está entre 108 e 140. Por outra parte, se $f$ é a distancia entre as arvores, temos que

   $$(y-1)f \leq 2014, \quad \text{e} \quad 2014 - 2 \times 38 \leq (y-3)f,$$

   portanto $15 \leq f \leq 19$.

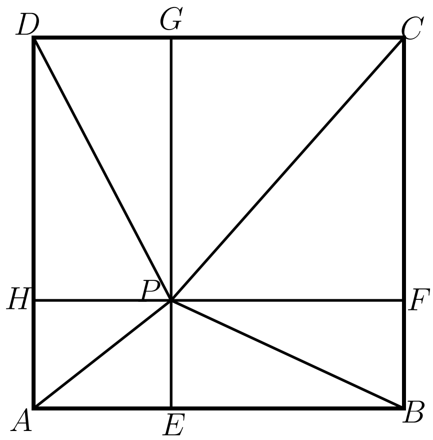
   O caso $f = 15$ é impossível pois a distancia entre 6 arvores consecutivas é 75, assim se a primeira arvores está a distancia $r < 22$ do primeiro poste, a $6^a$ árvore está a distancia $r - 1$ do anterior poste, a $12^a$ árvore está a distancia $r - 2$ da anterior poste e assim subsecivamente ate a arvore $(6\lfloor r \rfloor)^a$ está a distancia $< 1$ do anterior poste, logo nesse seguinte intervalo teríamos 6 postes .

   Para os valores de $f = 16, 17, 18$ e 19 é possível encontrar um exemplo de como posicionar as árvores de tal forma que cumpram a condição pedida.

2. Tancredo tem um terreno retangular de esquinas $A$, $B$, $C$ e $D$. Existe um poço (um ponto) no interior do terreno. Sabemos que as distâncias do poço aos pontos $A$, $B$ e $C$ são 10, 35 e 45 metros, respectivamente.

   (a) Qual é a distância do poço ao ponto $D$?

**Resposta:** Denotemos por $P$ o ponto onde se encontra o poço e por $E$, $F$, $G$ e $H$ os pês das perpendiculares desde $P$ a os lados do quadrado como mostrado na figura.




Se denotamos por $x, y, z, w$ as distancias de $P$ a $E$, $F$, $G$ e $H$ respectivamente. por hipótese sabemos que

$$\begin{aligned} x^2 + w^2 &= 10^2 \\ x^2 + y^2 &= 35^2 \\ y^2 + z^2 &= 45^2 \\ z^2 + w^2 &= PD^2 \end{aligned}$$

Deste sistema de equações obtemos que

$$PD^2 = 45^2 + 10^2 - 35^2 = 900,$$

logo $PD = 30$.

   (b) Sabendo que as distâncias do poço a dois dos lados não opostos do terreno são dois números inteiros de metros, determine as possíveis dimensões do terreno.

**Resposta:** Vejamos os possíveis casos

- Se $x$ e $y$ são inteiros e $x^2+y^2 = 35^2$, temos que $\{x, y\} = \{21, 28\}$ . Este caso fica descartado pois $10 = AP > x$.
- Se $z$ e $w$ são inteiros e $z^2 + w^2 = 30^2$, temos que $\{z, w\} = \{18, 24\}$, que também podemos descartar pois $10 = AP > w$.
- Se $y$ e $z$ são inteiros e $y^2 + w^2 = 45^2$, temos que $\{y, z\} = \{27, 36\}$, mas $z < PD = 30$, o que implicaria que $y = 36$, o que é impossível pois $y < PB = 35$
- Se $x$ e $w$ são inteiros e $x^2 + w^2 = 10^2$, temos que$\{x, w\} = \{6, 8\}$

No caso $x = 6$ e $w = 8$, temos $y = \sqrt{35^2 - 6^2} = \sqrt{1189}$ e $z = \sqrt{30^2 - 8^2} = 2\sqrt{209}$, logo o terreno têm dimensões $(6 + 2\sqrt{209}) \times (8 + \sqrt{1189})$.

No caso $x = 8$ e $w = 6$, temos $y = \sqrt{35^2 - 8^2} = \sqrt{1161} = 3\sqrt{129}$ e $z = \sqrt{30^2 - 6^2} = \sqrt{864} = 12\sqrt{3}$, logo o terreno têm dimensões $(6 + 3\sqrt{129}) \times (8 + 12\sqrt{3})$.

3. Dilvana formou uma pirâmide de acordo com o modelo à direita, onde a $n$-ésima linha contém os $n$ primeiros números maiores que os que estão na linha anterior e de paridade diferente dos da linha anterior, por exemplo a quinta linha da pirâmide é 17 19 21 23 25 pois são os cinco primeiros ímpares maiores que 16.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 4 \\ 5 \quad 7 \quad 9 \\ 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \\ \vdots \end{array}$$

(a) Quais são os números que estão na $7^{\underline{a}}$ linha da pirâmide?

**Resposta:** 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49

(b) Qual é o primeiro número da $100^{\underline{a}}$ linha?

**Resposta:**É possível mostrar por indução que o último número da $n$-ésima linha é $n^2$ e o primeiro da seguinte linha é $n^2+1$, logo, o primeiro número da $100^{\underline{a}}$ linha é $99^2+1=9802$

(c) Observe que ou 2013 ou 2014 está na pirâmide. Qual deles está na pirâmide e em que linha se encontra?

**Resposta:** Sabemos que se um dois dois está na linha $n$-ésima então $(n-1)^2 \leq 2013 \leq n^2$, logo $n = 45$. Como $n$ é ímpar e a linha 45 somente tem números ímpares segue que 2013 está na tabela.

4. A soma das idades dos 134 alunos da Olimpíada de Matemática do nível III é 2014 anos.

(a) Mostre que existe pelo menos um aluno com 16 anos ou mais.

**Resposta:** Se todos os alunos tivessem 15 ou menos anos, a soma de suas idade seria $\leq 15 \times 134 = 2010$, o que é contraditório. Logo, pelo menos um aluno têm idade maior do que 16 anos.

(b) Mostre que podemos selecionar três alunos de tal forma que a soma de suas idades seja maior ou igual a 48.

**Resposta:** Sabemos pelo item anterior que existe um aluno com 16 ou mais anos. Podemos supor que ele tem menos do que 46 pois caso tenha mais, o problema está resolvido. Se o primeiro tem $16+a$ anos com $a \leq 30$ temos que a soma das idades dos outros 133 alunos é $2014-16-a = 1998-a$, assim usando o mesmo argumento do item anterior existem um aluno com pelo menos

$$\left\lceil \frac{1998-a}{133} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{1968}{133} \right\rceil = 16$$

De novo, podemos supor que este aluno tem $16+b$ anos, com $b+a \leq 16$, logo a soma das idades dos outros 132 alunso é

$$2014-16-a-16-b = 1982-a-b$$

Logo temos outro aluno com idade maior ou igual a

$$\left\lceil \frac{1982-(a+b)}{132} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{1966}{132} \right\rceil = 16$$

Portanto, a soma das idade deste alunos é maior ou igual a 48.

5. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AB = CD$. As circunferências de diâmetros $BC$ e $AD$ se interceptam nos pontos $P$ e $Q$. Sabe-se que $AP = 14$, $BP = 11$, $CP = 5$ e $DP = 10$.

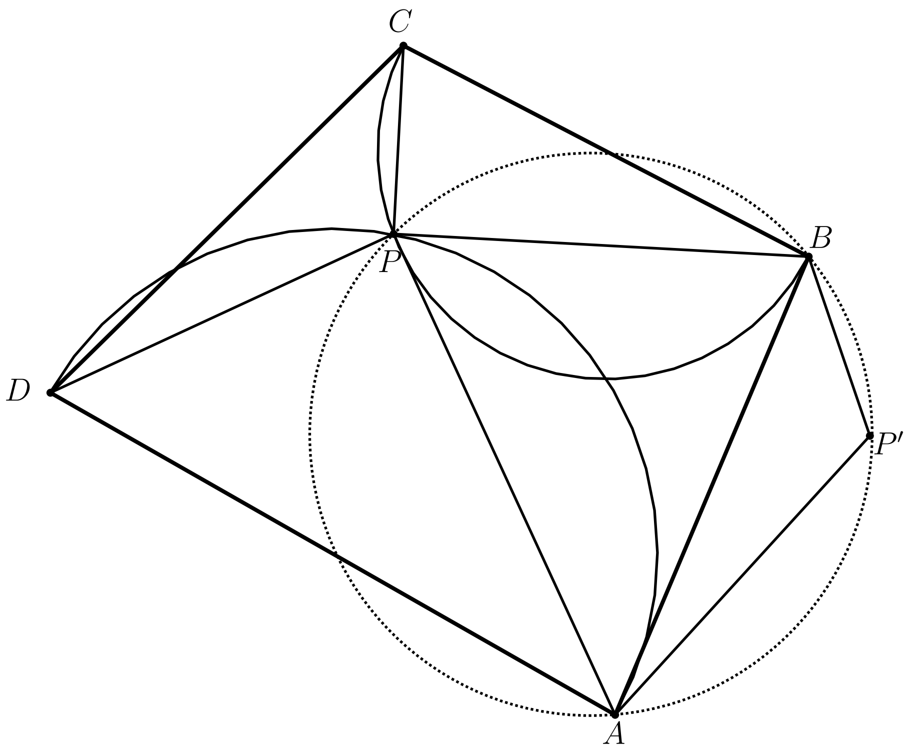
   (a) Calcule as áreas dos triângulos $\triangle ADP$ e $\triangle BCP$.

   **Resposta:** Como os triângulos $APD$ e $BPC$ são retos em $P$ então

$$(APD) = \frac{AP \times PD}{2} = \frac{14 \times 10}{2} = 70, \quad (BPC) = \frac{BP \times PC}{2} = \frac{11 \times 5}{2} = 27{,}5.$$

   (b) Calcule as áreas dos triângulos $\triangle ADP$ e $\triangle BCP$.

   **Resposta:** Como $AB = CD$, construímos um ponto $P'$ um ponto tal que os triângulos $AP'B$ e $DPC$ sejam congruentes, como mostrado na figura.




Como $\measuredangle APB + \measuredangle CPD = 180°$, então a soma dos ângulos opostos do quadrilátero $AP'BP$ é $180°$, portanto, o quadrilátero é circunscritível e sua área pode ser calculada usando a fórmula de Brahmagupta, onde $s = \frac{14+11+5+10}{2} = 20$, assim

$$(AP'BP) = \sqrt{(20-14)(20-11)(20-5)(20-10)} = 90$$

Portanto

$$(ABCD) = 90 + 70 + 27{,}5 = 187{,}5.$$