OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2015

Nível I

1. Na figura se mostra parcialmente o produto de dois números de dois algarismos, onde cada $*$ representa um algarismo (os algarismos não necessariamente são iguais)

$$\begin{array}{cccc} & & * & * \\ \times & & 7 & * \\ \hline & * & * & * \\ & * & * & \\ \hline * & * & 1 & * \end{array}$$

(a) O primeiro número pode ser maior que 20? Justifique sua resposta.

(b) Determine todos algarismos que aparecem neste produto

Solução: (a) Se o primeiro número for maior ou igual a 20, quando multipliquemos ele por 7 obteríamos um número maior que 140, logo um número com três ou mais algarismos, mas como esse produto tem dois algarismos, então o número não pode ser maior que 20.

(b) Como o primeiro número multiplicado por 7 tem que dar um número de dois algarismos, então o primeiro número tem que ser menor que $\frac{99}{7}$, logo o primeiro número da multiplicação tem ser um número entre 10 e 14. Além disso como o produto do primeiro número com o algarismo das unidades do segundo é um número com três algarismos, então o primeiro número NÃO pode ser 10 ou 11. Assim obtemos os seguintes possíveis produtos

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 2 \\ \times & & 7 & * \\ \hline & 1 & * & * \\ & 8 & 4 & \\ \hline * & * & 1 & * \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 1 & 3 \\ \times & & 7 & * \\ \hline & 1 & * & * \\ & 9 & 1 & \\ \hline * & * & 1 & * \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 1 & 4 \\ \times & & 7 & * \\ \hline & 1 & * & * \\ & 9 & 8 & \\ \hline * & * & 1 & * \end{array}$$

Usando que o algarismo das dezenas do resultado final é 1 então podemos preencher obrigatoriamente algumas $*$ do produto como

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 2 \\ \times & & 7 & * \\ \hline & 1 & 7 & * \\ & 8 & 4 & \\ \hline * & * & 1 & * \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 1 & 3 \\ \times & & 7 & * \\ \hline & 1 & 0 & * \\ & 9 & 1 & \\ \hline * & * & 1 & * \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 1 & 4 \\ \times & & 7 & * \\ \hline & 1 & 3 & * \\ & 9 & 8 & \\ \hline * & * & 1 & * \end{array}$$

Observe que o primeiro produto é impossível, pois não existe nenhum algarismo que multiplicado por 12 tenha como resultado um número entre 170 e 179 (de fato $12 \times 14 = 168$ e $12 \times 15 = 180$). De igual forma como $14 \times 9 = 126$ o terceiro produto é também impossível. Finalmente como $13 \times 8 = 104$ obtemos como único resultado possível

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 3 \\ \times & & 7 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 \\ & 9 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

2. Observe que $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1$ são todos os números racionais entre 0 e 1 cujos denominadores são menores ou iguais a 4.

(a) Escreva todos os números racionais entre 0 e 1 cujos denominadores são menores ou iguais a 6 de forma crescente.

(b) Se escrevemos a lista de todos os números racionais entre 0 e 1 com denominador menor que 13, quantos números teríamos que escrever?

Solução: (a) $0 < \frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < 1$

(b) Com denominador menor o igual a 6 já foram escritos 13 números. Assim precisamos contar quantos números novos com denominador entre 7 e 13 podemos escrever. Observe que se temos uma fração que não é reduzida, isto é, conseguimos simplificar fatores no numerador e denominador, então esta fração já foi contado anteriormente. Por exemplo $\dfrac{6}{9}$ tem denominador 9, mas já foi contado, pois $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$, assim somente precisamos contar frações reduzidas. Para podemos fazer uma tabela

Denominador	Numerador	Número de frações
7	1,2,3,4,5,6	6
8	1,3,5,7	4
9	1,2,4,5,7,8	6
10	1,3,7,9	4
11	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10	10
12	1,5,7,10	4
13	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12	12

Em total temos $13 + 6 + 4 + 6 + 4 + 10 + 4 + 12 = 59$ números com denominador menor o igual a 13.

3. João coleciona figurinhas que estão numeradas de 1 a 2015. Ele decide separá-las em duas caixas. Na caixa A colocou os números múltiplos de 3 ou de 5, e na caixa B colocou o restante dos números.

(a) Quantas figurinhas múltiplas de 15 tem a caixa A?

(b) Quantas figurinhas tem a caixa B

(c) Agora ele decide mover todas figurinhas da caixa B que são múltiplas de 7. Quantas figurinhas ele tem que mover para a caixa A?

Solução: (a) Como $\dfrac{2015}{15} = 134 + \dfrac{1}{3}$, então o número de figurinhas múltiplas de 15 é 134.

(b) Como $\dfrac{2015}{3} = 671 + \dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{2015}{5} = 403$, então na caixa A temos 671 figurinhas múltiplas de 3 e 403 múltiplas de 5, das quais 134 são simultaneamente múltiplas de 3 e 5. Segue que na caixa A João tem $671 + 403 - 134 = 940$ figurinhas, e na caixa B tem $2015 - 940 = 1075$ figurinhas.

(c) Como $\dfrac{2015}{7} = 287 + \dfrac{6}{7}$, logo temos 287 figurinhas múltiplas de 7, mas algumas delas já estão na caixa A. Observe que múltiplas de $7 \times 3 = 21$ temos 95 figurinhas, múltiplas de $7 \times 5 = 35$ temos 57 figurinhas, e múltiplas de $7 \times 3 \times 5 = 105$ temos 19 figurinhas, logo a caixa A já contém $95 + 57 - 19 = 133$ figurinhas múltiplas de 7. Logo João precisa mover $287 - 133 = 154$ figurinhas.

4. Para cada um dos subconjuntos do conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 2015\}$ se define a suma alternada da seguinte forma: Os números são ordenados de maior a menor e depois começando do maior colocamos entre eles sinais $-$ e $+$. Por exemplo, a soma alternada do subconjunto $\{2, 6, 19, 25, 101\}$ é $101 - 25 + 19 - 6 + 2 = 91$.

(a) Determine a suma alternada do conjunto A.

(b) Encontre subconjunto de A com três elementos e soma alternada 2000.

(c) Existe algum subconjunto de A com 600 elementos e soma alternada 1800? Justifique sua resposta.

Solução: (a) Podemos realizar a soma alternada do conjunto A da seguinte forma

$$(2015 - 2014) + (2013 - 2012) + (2011 - 2010) + \cdots (5 - 4) + (3 - 2) + 1.$$

Observe que a soma em cada parentese é 1, assim por cada número ímpar obtemos um 1. Como temos $\dfrac{2015 + 1}{2} = 1008$ números ímpares menores ou iguais a 2015 a soma alternada de A é 1008.

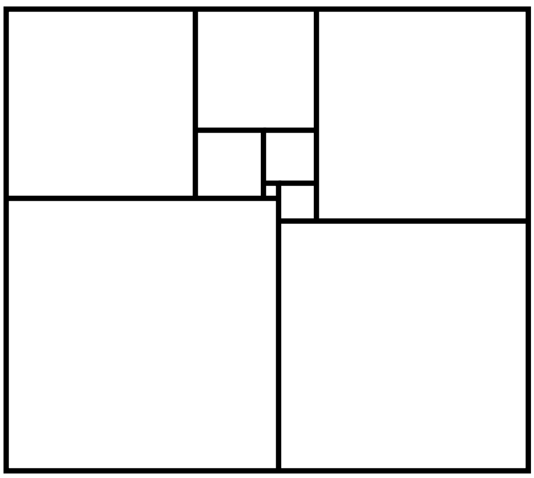
(b) Existem muitos exemplos, um deles é $\{2001, 2, 1\}$ ou em geral $\{2001, a + 1, a\}$ com a algum número menor que 2000. A ideia geral é pegar um número grande e dois números próximos e menores.

(c) Vejamos que NÃO existem nenhum conjunto com 600 elementos e soma alternada 1800. Para isso vamos seguir a mesma ideia do item (a), mas agrupando a soma da seguinte forma

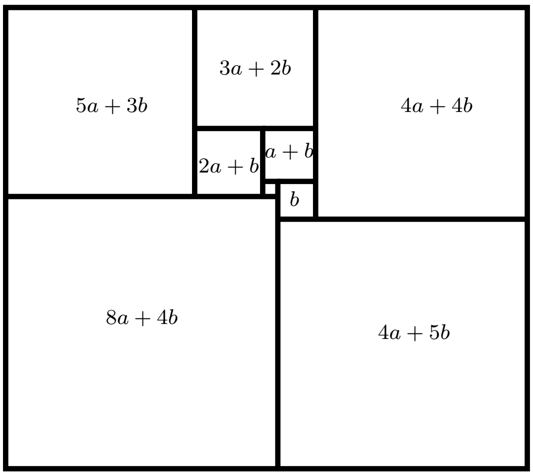
$$\underline{\qquad} - (\underline{\qquad} - \underline{\qquad}) - (\underline{\qquad} - \underline{\qquad}) - \cdots - (\underline{\qquad} - \underline{\qquad}) - (\underline{\qquad} - \underline{\qquad}) - \underline{\qquad}$$

Isto é, o maior número não é agrupado. Como os números estão ordenados de forma decrescente, então depois de fazer a soma em cada um dos parenteses, obtemos números que são maiores ou iguais a 1. Logo, nesta soma vamos a obter um número que será menor que o primeiro número, tirando pelo menos 300 uns. Como o primeiro número número é no máximo 2015, então esta soma alternada é no máximo $2015 = 300 = 1715$.

5. Na figura o retângulo maior está formado por 9 quadrados menores com lados de comprimento um número inteiro de centímetros. Sabemos que o lado do quadrado maior tem um comprimento entre 150 e 200 centímetros. Calcule o comprimento de todos os lados dos quadrados



Solução: Se chamamos de a lado do quadrado menor e de b o segundo menor, então os quadrados tem lados de comprimentos como mostrado na figura



Como a altura do retângulo é $13a + 7b$(soma dos lados dos dois quadrados a esquerda) e também é igual a $8a + 9b$ (soma dos lados dos dois quadrados a direita), segue que $5a = 2b$, e o quadrado maior tem lado $8a + 4b = 18a$ segue que $18a$ tem que estar entre 150 e 200, portanto a está entre 9 e 11. Mas como a e par, temos que o quadrado menor tem lado de comprimento $a = 10$ e segundo menor tem lado de comprimento $b = 25$. Portanto os lados dos quadrados são em ordem crescente

$$10, 25, 35, 45, 80, 125, 140, 150, 165.$$