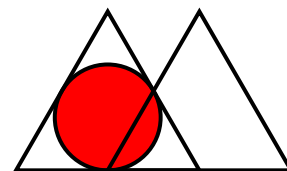


OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2015

Nível II



1. João coleciona figurinhas que estão numeradas de 1 a 2015. Ele decide separá-las em duas caixas. Na caixa A colocou os números múltiplos de 3 ou de 5, e na caixa B colocou o restante dos números.

- (a) Quantas figurinhas múltiplas de 15 tem a caixa A ?
- (b) Quantas figurinhas tem a caixa B ?
- (c) Agora ele decide mover todas figurinhas da caixa B que são múltiplas de 7. Quantas figurinhas ele tem que mover para a caixa A ?

Solução: (a) Como $\frac{2015}{15} = 134 + \frac{1}{3}$, então o número de figurinhas múltiplas de 15 é 134.

(b) Como $\frac{2015}{3} = 671 + \frac{2}{3}$ e $\frac{2015}{5} = 403$, então na caixa A temos 671 figurinhas múltiplas de 3 e 403 múltiplas de 5, das quais 134 são simultaneamente múltiplas de 3 e 5. Segue que na caixa A João tem $671 + 403 - 134 = 940$ figurinhas, e na caixa B tem $2015 - 940 = 1075$ figurinhas.

(c) Como $\frac{2015}{7} = 287 + \frac{6}{7}$, logo temos 287 figurinhas múltiplas de 7, mas algumas delas já estão na caixa A . Observe que múltiplas de $7 \times 3 = 21$ temos 95 figurinhas, múltiplas de $7 \times 5 = 35$ temos 57 figurinhas, e múltiplas de $7 \times 3 \times 5 = 105$ temos 19 figurinhas, logo a caixa A já contém $95 + 57 - 19 = 133$ figurinhas múltiplas de 7. Logo João precisa mover $287 - 133 = 154$ figurinhas.

2. Arthur escreveu os números de 1 até 2015 no quadro. Depois ele apagou nessa ordem, todos os quadrados perfeitos 1, 4, 9, 16, 25, 64, 81, 100, $\dots$, os cubos perfeitos que sobraram no quadro 8, 27, 125, $\dots$, as quartas potências que sobraram e assim por diante.

- (a) Quais foram os dois últimos números que Arthur apagou?
- (b) Quantos números foram apagados?

Solução: (a) Como $2^{11} = 2048$, então na lista de números até 2015 não existe nenhuma potência 11^a perfeita. Observe que quando Arthur apagou os quadrados perfeitos, também apagou as 4^a , 6^a , 8^a e 10^a potências. De igual forma quando apagou os cubos, também apagou as 9^a potências. Assim na ordem unicamente precisamos considerar as potências de expoente primo. O maior primo menor que 10 é 7 e $3^7 = 2187$, logo o último número apagado foi $2^7 = 128$. Antes dele foi apagada uma potência quinta, mas $5^5 = 3015$, $4^5 = 2^{10}$ e $3^5 = 243$. Logo os dois últimos números que Arthur apagou foram 243 e 128 nessa ordem.

(b) Como $\sqrt{2015}$ está entre 44 e 45, então foram apagados 44 quadrados. De igual forma como $\sqrt[3]{2015}$ está entre 12 e 13 temos 12 cubos menores que 2015 mas entre eles temos que 1^3 , 4^3 , 9^3 já foram apagados. Logo entre quadrados e cubos, Arthur apagou $44 + 12 - 3 = 53$ números. Potências quintas que ainda não foram apagadas temos unicamente 2^5 e 3^5 , e uma única potência sétima 2^7 . Portanto Arthur apagou em total 55 números.

3. Um número é 5-legal se podemos escreve-lo como somas e diferenças de potências distintas de 5. Por exemplo os números 25, 101 e 130 são 5-legais, pois $101 = 125 - 25 + 1$ e $130 = 125 + 5 + 1$
- (a) Mostre que os números 500 e 531 são números 5-legais.
- (b) Encontre o menor número 5-legal maior que 2015.
- (c) Mostre que o número de números 5-legais menores que 100000 é menor¹ que 2200.

Solução: (a) Observe que as primeira potências de 5 são 1, 5, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$ e $5^5 = 3125$. Assim $500 = 5^4 - 5^3$ e $531 = 5^4 - 5^3 + 5^2 + 5 + 1$.

(b) Observe que com as primeiras cinco potências de 5 não podemos obter um número maior que $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = 781 < \frac{1}{2} \cdot 5^5$. Isto é uma propriedade geral, pois se soma das potências de 5 até a potencia 5^k é menor que $\frac{1}{2} \cdot 5^{k+1}$, então a soma das potências até 5^{k+1} é menor que $(1 + \frac{1}{2}) \cdot 5^{k+1} < \frac{1}{2} \cdot 5^{k+2}$ (é possível mostrar que a soma das primeiras potências de 5 é menor que um quarto da seguinte potência de 5) Assim se usamos uma potência maior que 5^5 o número obtido será muito maior. Por tanto o menor número 5-legal maior que 2015 é

$$5^5 - 5^4 - 5^3 - 5^2 - 5 - 1 = 3125 - 781 = 2344.$$

(c) Como $100000 = 2^5 \cdot 5^5$, e $5^2 < 2^5 < 5^3$, então 100000 está entre 5^7 e 5^8 . O menor número 5-legal que usa a potência 5^8 é

$$5^8 - (5^7 + 5^6 + 5^5 + 5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1) > \frac{1}{2} \cdot 5^8 > \frac{125}{2} \cdot 5^5 > 10^5.$$

Logo para construir números 5-legais menores que 100000 somente podemos usar as potências de 5 até a sétima potência. Isto o números 5-legais procurados são todos os números positivos da forma

$$a_7 5^7 + a_6 5^6 + a_5 5^5 + a_4 5^4 + a_3 5^3 + a_2 5^2 + a_1 5 + a_0,$$

onde os valores de $a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1$ e a_0 podem ser $-1, 0, 1$. Como cada coeficiente têm três possíveis valores, então temos 3^8 possíveis escolhas. Mas desta temos que descartar a escolha todos os a iguais a 0 assim sobram $3^8 - 1$ números. Destes a metade é positivo e a metade negativo. Portanto o número de números 5 legais menores que 100000 é $\frac{3^8-1}{2} = 3280$.

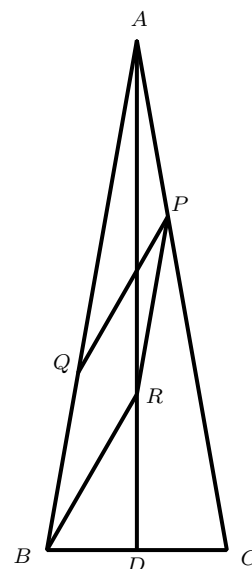
4. Seja ABC um triângulo isósceles com os ângulos em B e C iguais. Sejam P e Q pontos sobre os lados AC e AB respectivamente, de tal forma que $AP = PQ = QB = BC$.
- (a) Seja R a reflexão de Q sobre a reta BP . Mostre que AR é perpendicular a BC .
- (b) Determine a medida dos ângulos do triângulo ABC .

Solução:

¹Neste item o enunciado do problema estava errado e deveria aparecer a palavra “maior”

(a) Observe que pela construção $PQBR$ é um losango, em particular um paralelogramo, logo $ABRP$ é um trapézio, e como $AP = BR$, segue que é um trapézio isósceles. A linha BP corta o losango na metade, logo é uma bissetriz do ângulo QBR , mas como o trapézio $ABRP$ é isósceles, o mesmo acontece com a outra diagonal, isto é, AR é bissetriz do ângulo BAP . Finalmente como o triângulo BAC é isósceles, segue que a bissetriz desde A coincide com a altura, portanto a linha AR é perpendicular a BC .

(b) Como o triângulo é simétrico com respeito à linha AD , segue que $BR = RC$, mas como $BR = BQ = BC$, temos que o triângulo BCR é equilátero. Assim se chamamos de α a medida do ângulo em A , como $\angle ABR = \alpha$, temos que as medidas dos ângulos do triângulo ABC são α , $\alpha + 60^\circ$ e $\alpha + 60^\circ$. Finalmente como $3\alpha + 120^\circ = 180^\circ$, concluímos que $\alpha = 20^\circ$, e portanto as medidas dos ângulos do triângulo ABC são 20° , 80° e 80° .



5. A fórmula de Euler para poliedros convexos diz que se F é número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas do poliedro, então $V + F - A = 2$.

Por exemplo, o cubo tem 6 faces, 8 vértices e 12 arestas e $6 + 8 - 12 = 2$. Já uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces, 5 vértices e 8 arestas e $5 + 5 - 8 = 2$.

Sabemos que um poliedro convexo tem 26 vértices e 60 arestas

- Quantas faces o poliedro tem?
- Sabemos que todas as faces são ou triângulos ou quadrados, quantas faces de cada tipo ele tem?
- Uma diagonal interior é um segmento que une dois vértices que não estão contidos na mesma face do poliedro. Considerando o poliedro anterior quantas diagonais interiores tem?

Solução: (a) Como $V + F - A = 26 + F - 60 = 2$ temos que o número de faces é $F = 36$

(b) Suponhamos que temos T faces que são triângulos e Q faces que são quadrados. Pelo item anterior sabemos que $T + Q = 36$. Como cada triângulo tem 3 lados e cada quadrado 4 então o número de arestas é $\frac{1}{2}(3T + 4Q)$. Observe que dividimos por dois pois cada aresta é lado de

dois polígonos, portanto $\frac{1}{2}(3T + 4Q) = 60$, assim $3T + 4Q = 120$. O sistema
$$\begin{cases} T + Q = 36 \\ 3T + 4Q = 120 \end{cases}$$

tem como solução $T = 24$ e $Q = 12$.

(c) Como temos $V = 26$ vértices, por cada dois vértices podemos traçar um segmento que pode ser classificado em três classes: Aresta, Diagonal de uma face e Diagonal interior. Sabemos que existem 60 arestas, e cada face quadrada contém duas diagonais, logo temos $2Q = 24$ diagonais nas faces do poliedro. Além disso o número de segmentos que podemos traçar é $\frac{26 \times 25}{2} = 13 \times 25 = 325$, portanto o número de diagonais internas é $325 - 60 - 24 = 241$.