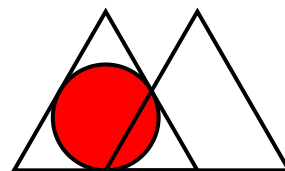


OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2015

Nível III



1. João tem 10 brinquedos distintos e quer dar alguns para seus amigos Umberto e Doisberto.
- (a) De quantas formas pode dar dois brinquedos para Umberto e três para Doisberto.
 - (b) De quantas formas pode distribuir os brinquedos de tal forma que ele fique sem brinquedos?
 - (c) De quantas formas pode dar alguns brinquedos de tal forma que todos fiquem com algum brinquedo?

Solução: (a) Umberto pode receber os dois brinquedos de $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ formas, depois que distribuirmos os brinquedos para Umberto, Doisberto pode receber seus três brinquedos de $\frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$ formas. Logo João pode distribuir os brinquedos para Umberto e Doisberto de 45×56 formas.

(b) Basta dizer para qual dos dois vai cada brinquedo, isto é, cada brinquedo têm duas possibilidades de dono, assim podemos distribuir os brinquedos de $2^{10} = 1024$ formas. Observe que pode acontecer que algum dos dois fique com todos os brinquedos. Uma pergunta que poderíamos fazer, é impor a restrição que somente João fique sem brinquedos, e nesse caso a resposta é $2^{10} - 2$.

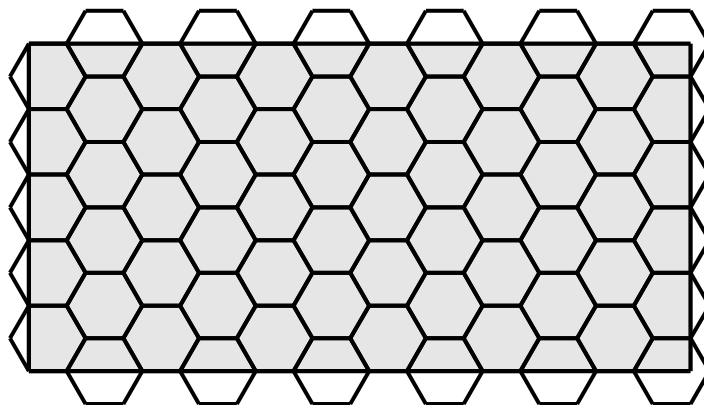
(c) Seguindo a ideia do item anterior, cada brinquedo pode ter três possíveis donos, assim podemos distribuir de 3^n , mais aqui estamos contando também os casos em que alguém fica sem brinquedo. Sabemos que para que exatamente João fique sem brinquedo, eles podem ser distribuídos de $2^{10} - 2$ formas. A mesma contagem para que exatamente Umberto ou exatamente Doisberto fique sem brinquedo. Pode ser que dois fiquem sem brinquedos, logo um fica com todos, e isso só é possível de 3 formas. Assim o número de formas procurado é

$$3^{10} - 3(2^{10} - 2) - 3 = 3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3 = 55980.$$

2. Um campo de futebol de dimensões 40×80 metros, precisa ser regado por irrigadores automáticos fixos distribuídos pelo campo, e cada irrigador consegue atingir qualquer ponto que esteja a distância menor ou igual a 5 metros dele.
- (a) Mostrar que 40 irrigadores não conseguem molhar a totalidade do campo.
 - (b) Mostrar que com 66 irrigadores é possível molhar a totalidade do campo.

Solução: (a) Observe que a área coberta por um irrigador é de $\pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ m}^2$. Assim a área máxima coberta por 40 irrigadores é de $40 \times 25\pi = 1000\pi < 3142 \text{ m}^2$. Por outra parte a área do campo de futebol é de $40 \times 80 = 3200 \text{ m}^2$, portanto 40 irrigadores não é suficiente para molhar todo o campo.

(b) O problema é equivalente a cobrir totalmente o retângulo 66 círculos de raio 5. Observemos primeiro que um hexágono regular de lado 5 está totalmente contido em um círculo de raio 5, assim para resolver o problema basta cobrir o retângulo com 66 hexágonos regulares de lado 5. Para isso consideremos a seguinte figura



Vejam os que o retângulo destacado tem dimensões maiores que 40×60 . Como cada hexágono é formado por 6 triângulos equiláteros de lado 5, então a distância entre dois lados opostos do hexágono é $5\sqrt{3} > 8,6$. Assim se colocamos cinco hexágonos, um acima do outro, obtemos uma figura de altura maior que $5 \times 8,6 = 43 > 40$. O comprimento do retângulo é $15 \times 6 - \frac{5}{2} = 87,5$.

De fato, usando esta mesma figura mas eliminando os últimos 11 hexágonos, ainda cobrimos um retângulo de medidas $43 \times 62,5$, assim não precisamos mais de 55 regadores.

Observe que com 66 regadores o problema também pode ser solucionado usando quadrados em lugar de hexágonos.

3. A fórmula de Euler para poliedros convexos diz que se F é número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas do poliedro, então $V + F - A = 2$.

Por exemplo, o cubo tem 6 faces, 8 vértices e 12 arestas e $6 + 8 - 12 = 2$. Já uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces, 5 vértices e 8 arestas e $5 + 5 - 8 = 2$.

Sabemos que um poliedro convexo tem 26 vértices e 60 arestas

- Quantas faces o poliedro tem?
- Sabemos que todas as faces são ou triângulos ou quadrados, quantas faces de cada tipo ele tem?
- Uma diagonal interior é um segmento que une dois vértices que não estão contidos na mesma face do poliedro. Considerando o poliedro anterior quantas diagonais interiores tem?

Solução: (a) Como $V + F - A = 26 + F - 60 = 2$ temos que o número de faces é $F = 36$

(b) Suponhamos que temos T faces que são triângulos e Q faces que são quadrados. Pelo item anterior sabemos que $T + Q = 36$. Como cada triângulo tem 3 lados e cada quadrado 4 então o número de arestas é $\frac{1}{2}(3T + 4Q)$. Observe que dividimos por dois pois cada aresta é lado de

dois polígonos, portanto $\frac{1}{2}(3T + 4Q) = 60$, assim $3T + 4Q = 120$. O sistema
$$\begin{cases} T + Q = 36 \\ 3T + 4Q = 120 \end{cases}$$
 tem como solução $T = 24$ e $Q = 12$.

(c) Como temos $V = 26$ vértices, por cada dois vértices podemos traçar um segmento que pode ser classificado em três classes: Aresta, Diagonal de uma face e Diagonal interior. Sabemos que existem 60 arestas, e cada face quadrada contém duas diagonais, logo temos $2Q = 24$ diagonais nas faces do poliedro. Além disso o número de segmentos que podemos traçar é $\frac{26 \times 25}{2} = 13 \times 25 = 325$, portanto o número de diagonais internas é $325 - 60 - 24 = 241$.

4. Em um jogo de auditório, um matemático fala para um participante que pense em um número de três algarismos não iguais a zero (abc) , depois construa os números (acb) , (bca) , (cab) , (bac) e (cba) , some estes cinco números e fale o resultado para o matemático.

Por exemplo, se o participante pensou o número 962, então ele responde para o matemático o número $926 + 629 + 692 + 269 + 296 = 2812$.

- (a) Se o participante pensou o número 263, qual número ele responde para o matemático?
(b) O participante falou o número 2793. Qual foi o número que ele pensou?
(c) Suponha que o participante respondeu um número distinto de 2812 ou 2257. Mostre como o matemático consegue “adivinhar” o número que o participante pensou.

Solução: (a) O número que respondeu para o matemático foi

$$236 + 326 + 362 + 623 + 632 = 2179.$$

- (b) Suponhamos que ele pensou o número (abc) . Como

$$(abc) + (acb) + (bac) + (bca) + (cab) + (cba) = 222 \times [a + b + c],$$

então o número que falou para o matemático foi

$$222[a + b + c] - (abc) = 2793,$$

logo

$$222[a + b + c] - 111 > 2793 > 222[a + b + c] - 999.$$

Segue que $14 \leq a + b + c \leq 17$. Assim (abc) têm que ser um dos números

$$222 \times 14 - 2793 = 315, \quad 222 \times 15 - 2793 = 537 \quad 222 \times 16 - 2793 = 759 \quad 222 \times 17 - 2813 = 981$$

Observe que 537 é a única solução possível.

- (c) Suponhamos que n é o número que o participante falou. Sabemos que

$$555 = 5 \times 111 \leq n \leq 5 \times 999 = 4995.$$

Se (abc) é o número que o participante pensou então a, b, c é solução da equação

$$n = 122a + 212b + 221c, \quad \text{com} \quad 1 \leq a, b, c \leq 9,$$

além disso como $(abc) = 222[a + b + c] - n$, isto é, o número está totalmente determinado pela soma de seus algarismos. Vejamos que tal equação tem no máximo uma solução com estas características. Suponhamos que temos outra solução x, y, z , logo

$$n = 122a + 212b + 221c = 122x + 212y + 221z.$$

Calculando o resto da divisão por 9, temos que n , $5(a + b + c)$ e $5(x + y + z)$ deixam o mesmo resto quando divididos por 9. Segue que a diferença entre $a + b + c$ e $x + y + z$ é um múltiplo de 9. No caso que $a + b + c < x + y + z$ vamos ter que

$$(xyz) = 222(x + y + z) - n \geq 222(a + b + c + 9) - n = (abc) + 222 \times 9 > 1000,$$

o que é impossível, assim $x + y + z = a + b + c$, e portanto a solução é única. Para o matemático encontrar a solução, como ele sabe que

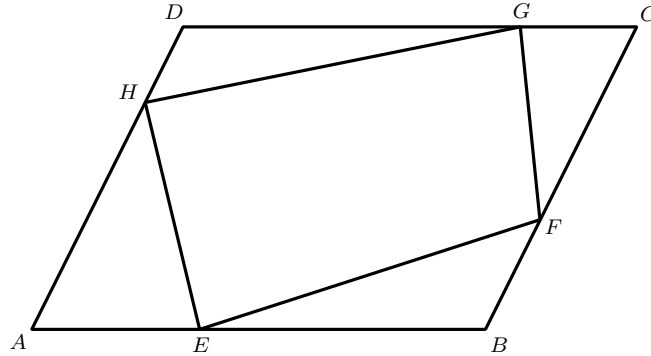
$$\frac{n + 111}{222} \leq a + b + c \leq \frac{n + 999}{222},$$

logo no máximo precisa testar 6 valores para a soma dos algarismos.

5. Os pontos E , F , G e H são pontos sobre os lados AB , BC , CD e DA do paralelogramo $ABCD$ de área 1.

- (a) No caso que $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$ e $\frac{CG}{GD} = \frac{DH}{HA} = \frac{1}{3}$. Calcule a área do quadrilátero $EFGH$.
- (b) Suponha que a área de $EFGH$ é $\frac{1}{2}$. Mostre que uma das diagonais do quadrilátero $EFGH$ é paralela a um dos lados do paralelogramo.

Solução:



(a) Observe que

$$Area(AEH) = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AH}{AD} \cdot Area(ABD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$Area(BFE) = \frac{BE}{AB} \cdot \frac{BF}{BC} \cdot Area(ABC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

$$Area(CGF) = \frac{CF}{CB} \cdot \frac{CG}{CD} \cdot Area(CDB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$Area(DHG) = \frac{DG}{CD} \cdot \frac{DH}{AD} \cdot Area(CDB) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32}$$

Logo

$$Area(EFGH) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{3}{32} \right) = 1 - \frac{36 + 32 + 24 + 27}{288} = \frac{169}{288}.$$

(b) Denotemos por $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AE = x$, $AH = y$, $BF = z$ e $DG = t$. Segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Area(ABCD) &= Area(AEH) + Area(BFE) + Area(CGF) + Area(DHG) \\ &= \frac{x}{a} \frac{y}{b} Area(ABD) + \frac{a-x}{a} \frac{z}{b} Area(BCA) \\ &\quad + \frac{a-t}{a} \frac{b-z}{b} Area(DAC) + \frac{t}{a} \frac{b-y}{b} Area(DAC) \\ &= \frac{1}{2} Area(ABCD) \frac{xy + (a-x)z + (a-t)(b-z) + t(b-y)}{ab} \end{aligned}$$

O que implica que

$$xy + (a-x)z + (a-t)(b-z) + t(b-y) = ab$$

ou equivalentemente $xy - xz + zt - ty = 0$, que pode ser fatorado com $(y-z)(x-t) = 0$, o que implica que $y = z$ ou $x = t$, cada uma destas relaciones implica, usando o teorema de Thales, que uma das diagonais do quadrilátero $EFGH$ é paralela a um dos lados.