

1. João coleciona figurinhas que estão numeradas de 1 a 2015. Ele decide separá-las em duas caixas. Na caixa A colocou os números múltiplos de 3 ou de 5, e na caixa B colocou o restante dos números.
 - (a) Quantas figurinhas múltiplas de 15 tem a caixa A ?
 - (b) Quantas figurinhas tem a caixa B ?
 - (c) Agora ele decide mover todas figurinhas da caixa B que são múltiplas de 7. Quantas figurinhas ele tem que mover para a caixa A ?
2. Arthur escreveu os números de 1 até 2015 no quadro. Depois ele apagou nessa ordem, todos os quadrados perfeitos 1, 4, 9, 16, 25, 64, 81, 100, ..., os cubos perfeitos que sobraram no quadro 8, 27, 125, ..., as quartas potências que sobraram e assim por diante.
 - (a) Quais foram os dois últimos números que Arthur apagou?
 - (b) Quantos números foram apagados?
3. Um número é 5-legal se podemos escreve-lo como somas e diferenças de potências distintas de 5. Por exemplo os números 25, 101 e 130 são 5-legais, pois $101 = 125 - 25 + 1$ e $130 = 125 + 5 + 1$.
 - (a) Mostre que os números 500 e 531 são números 5-legais.
 - (b) Encontre o menor número 5-legal maior que 2015.
 - (c) Mostre que o número de números 5-legais menores que 100000 é maior¹ que 2200.
4. Seja ABC um triângulo isósceles com os ângulos em B e C iguais. Sejam P e Q pontos sobre os lados AC e AB respectivamente, de tal forma que $AP = PQ = QB = BC$.
 - (a) Seja R a reflexão de Q sobre a reta BP . Mostre que AR é perpendicular a BC .
 - (b) Determine a medida dos ângulos do triângulo ABC .
5. A fórmula de Euler para poliedros convexos diz que se F é número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas do poliedro, então $V + F - A = 2$.
 Por exemplo, o cubo tem 6 faces, 8 vértices e 12 arestas e $6 + 8 - 12 = 2$. Já uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces, 5 vértices e 8 arestas e $5 + 5 - 8 = 2$.
 Sabemos que um poliedro convexo tem 26 vértices e 60 arestas
 - (a) Quantas faces o poliedro tem?
 - (b) Sabemos que todas as faces são ou triângulos ou quadrados, quantas faces de cada tipo ele tem?
 - (c) Uma diagonal interior é um segmento que une dois vértices que não estão contidos na mesma face do poliedro. Considerando o poliedro anterior quantas diagonais interiores tem?

¹Erradamente na prova apareceu a palavra menor, mas o correto é maior como aparece nesta redação.