OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2016

Nível I

1. Os inteiros de 1 até 18 são escritos no quadro em uma fila. Podemos inserir sinais $+$ ou $-$ antes de cada um deles de tal forma a obter diversos resultados, por exemplo

$$-1+2+3+4+5+6+7-8+9-10+11-12+13-14+15-16+17-18=13.$$

(a) Qual é o valor da expressão quando colocamos todos os sinais $+$?

(b) É possível inserir sinais $+$ ou $-$ e obter o valor 101?

(c) É possível inserir sinais $+$ ou $-$ e obter o valor zero?

Solução:

(a) Temos varias formas de realizar esta soma. Uma delas pode ser obtida reordenando os números da seguinte forma

$$(1+18)+(2+17)+(3+16)+(4+15)+(5+14)+(6+13)+(7+12)+(8+11)+(9+10)=19\times 9=171.$$

(b) Este item pode ter múltiplas soluções: Observe que a soma de todos os números 171, como queremos que a nova operação tenha soma 101, isto é, 70 a menos, precisamos trocar o sinal de alguns números cuja soma seja 35, por exemplo $17+18=35$ logo basta trocar o sinal dos dois últimos números,

$$1+2+3+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13-14+15+16-17-18=101,$$

mas esta não é a única forma, outra forma poderia ser $35=1+2+3+4+5+6+14$, e desta forma também temos

$$-1-2-3-4-5-6+7+8+9+10+11+12+13-14+15+16+17+18=101.$$

(c) Observe que quando trocamos de sinal um dos números, o resultado muda em um valor par, por exemplo se mudamos $+11$ por -11 o resultado diminui em 22, logo a paridade do resultado não muda, em particular como a soma dos números é ímpar, se trocamos alguns sinais por menos o resultado continuará sendo ímpar, logo NUNCA pode ser zero.

2. Cada um dos $*$ deve ser substituído por um algarismo de 0 até 9 de tal forma que a operação seja correta

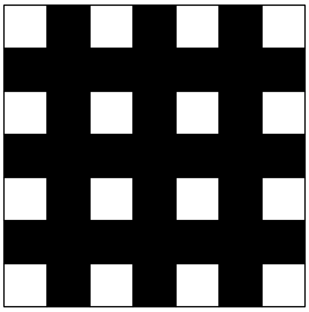
$$
\begin{array}{cccc}
 & & * & * \\
\times & & 8 & * \\
\hline
 & * & * & * \\
 & * & * & \\
\hline
* & * & 6 & *
\end{array}
$$

Determine cada um dos algarismos nesta operação.

Solução: Como o produto de 8 por um número de dois algarismos tem como resultado um número de dois algarismos, então o primeiro número do produto somente pode ser 10, 11 ou 12. Além disso quando multiplicamos o primeiro número pelo dígito das unidades do seguindo obtemos um números de 3 algarismos, o que implica que esse número das unidades tem que ser maior que 8, daqui somente resta a possibilidade de ser 9 e nesse caso o primeiro número tem que ser 12. Assim a operação descrita deve ser

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 2 \\
\times & & 8 & 9 \\
\hline
 & 1 & 0 & 8 \\
 & 9 & 6 & \\
\hline
1 & 0 & 6 & 8
\end{array}
$$

3. O diagrama abaixo representa um piso de tamanho 7×7 formado por azulejos quadrados pretos e brancos de lado de comprimento 1. Observe que os cantos têm azulejos brancos.



(a) Qual é a área preta deste piso?

(b) Se um piso 15×21 é preenchido da mesma forma, ainda com cantos brancos, quantos azulejos pretos serão necessários?

Solução:

(a) Observemos que área total do piso é $7 \times 7 = 49$. Por outra parte somente temos 4 linhas que contém cada uma 4 azulejos brancos, logo a área branca do piso é $4 \times 4 = 16$, segue que a área preta será $49 - 16 = 33$.

(b) A área total do piso é $15 \times 21 = 315$. De igual forma que no item anterior, vamos contar quantos azulejos são brancos. Para isso observemos que somente tem azulejos nas linhas ímpares e nas colunas impares, isto é, na primeira, terceira, quinta e assim por diante. Como temos 15 colunas, temos 8 colunas na posição ímpar, e como temos 21 linhas, temos 11 linhas em posição ímpar. Logo o número de azulejos brancos é $8 \times 11 = 88$ e portanto o número de azulejos pretos é $315 - 88 = 227$.

4. Alice inventou a seguinte brincadeira: Sempre que tiver um número natural n, ela pode substituí-lo por $a \times b$ se $a + b = n$ e a e b são inteiros positivos. Por exemplo, Alice pode obter 260 a partir de 9 fazendo três substituições:

$$9 = 2 + 7 \longrightarrow 14 = 11 + 3 \longrightarrow 33 = 20 + 13 \longrightarrow 260$$

(a) Diga como Alice pode obter 2016 a partir do número 5 com sua brincadeira.

(b) Explique por que Alice não pode obter 2016 a partir do 5 usando 4 substituições.

Solução:

(a) Existem inúmeras formas de chegar a 2016 partindo do número 5. Vamos mostrar duas formas possíveis.

$$5 = 3 + 2 \longrightarrow 6 = 3 + 3 \longrightarrow 9 = 5 + 4 \longrightarrow 20 = 10 + 10 \longrightarrow 100 = 28 + 72 \longrightarrow 2016$$

$$5 = 3+2 \longrightarrow 6 = 3+3 \longrightarrow 9 = 7+2 \longrightarrow 14 = 12+2 \longrightarrow 24 = 19+5 \longrightarrow 95 = 32+63 \longrightarrow 2016$$

(b) Depois da primeira substituição o maior número obtido é $2 \times 3 = 6$ e a partir de 6 o maior número que podemos obter é $3 \times 3 = 9$. De igual forma a partir de 9 o maior número que podemos obter é $5 \times 4 = 20$ e finalmente a partir de 20 o maior número que podemos obter é $10 \times 10 = 100$. Logo é impossível obter 2016 com unicamente quatro substituições.

5. (a) Decida qual dos números $\frac{5}{69}$ e $\frac{6}{83}$ é o maior.

(b) Encontre um número racional que esteja entre eles.

(c) Encontre um número racional que esteja entre eles e que tenha denominador menor que 500.

Solução:

(a) Como $5 \times 83 = 415$ e $6 \times 69 = 414$, segue que $5 \times 83 > 6 \times 69$ e portanto $\dfrac{5}{69} > \dfrac{6}{83}$.

(b) Existem infinitos racionais entre estes dois números, assim a solução não é única, mas podemos usar o tem anterior para construir um número. Como

$$2 \times 5 \times 83 = 830 > 829 > 828 = 2 \times 6 \times 69,$$

dividindo esta tripla desigualdade por $2 \times 69 \times 83 = 11454$ obtemos

$$\frac{5}{69} > \frac{829}{11454} > \frac{6}{83}.$$

(c) De novo como $5 \times 83 > 6 \times 69$, somando 5×69 nos dois lados da desigualdade obtemos

$$5 \times 83 + 5 \times 69 > 6 \times 69 + 5 \times 69$$

que é equivalente a

$$5 \times (83 + 69) > (6 + 5) \times 69,$$

e assim $\dfrac{5}{69} > \frac{11}{152}$. Agora pegando a desigualdade original e somando 6×83, obtemos

$$5 \times 83 + 6 \times 83 > 6 \times 69 + 6 \times 83$$

que é equivalente a

$$(6 + 5) \times 83 > 6 \times (83 + 69)$$

e assim $\dfrac{11}{152} > \dfrac{6}{83}$. Logo a fração $\dfrac{11}{152}$ está entre as duas frações dadas.