OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2016

Nível II

1. Alice inventou a seguinte brincadeira: Sempre que tiver um número natural n, ela pode substituí-lo por $a \times b$ se $a + b = n$ e a e b são inteiros positivos. Por exemplo, Alice pode obter 260 a partir de 9 fazendo três substituições:

$$9 = 2 + 7 \longrightarrow 14 = 11 + 3 \longrightarrow 33 = 20 + 13 \longrightarrow 260$$

(a) Diga como Alice pode obter 2016 a partir do número 5 com sua brincadeira.

(b) Explique por que Alice não pode obter 2016 a partir do 5 usando 4 substituições.

Solução:

(a) Existem inúmeras formas de chegar a 2016 partindo do número 5. Vamos mostrar duas formas possíveis.

$$5 = 3 + 2 \longrightarrow 6 = 3 + 3 \longrightarrow 9 = 5 + 4 \longrightarrow 20 = 10 + 10 \longrightarrow 100 = 28 + 72 \longrightarrow 2016$$

$$5 = 3{+}2 \longrightarrow 6 = 3{+}3 \longrightarrow 9 = 7{+}2 \longrightarrow 14 = 12{+}2 \longrightarrow 24 = 19{+}5 \longrightarrow 95 = 32{+}63 \longrightarrow 2016$$

(b) Depois da primeira substituição o maior número obtido é $2 \times 3 = 6$ e a partir de 6 o maior número que podemos obter é $3 \times 3 = 9$. De igual forma a partir de 9 o maior número que podemos obter é $5 \times 4 = 20$ e finalmente a partir de 20 o maior número que podemos obter é $10 \times 10 = 100$. Logo é impossível obter 2016 com unicamente quatro substituições.

2. Um tabuleiro 3×3 está inicialmente preenchido com zeros. Em cada passo se seleciona um quadrado 2×2 e soma-se 1 unidade a cada um dos quatro números situados nas casas que formam esse quadrado. Por exemplo, quatro passos possíveis são

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&1\\\hline 0&1&1\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&1\\\hline 1&2&1\\\hline 1&1&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&2&2\\\hline 1&3&2\\\hline 1&1&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&2&2\\\hline 1&4&3\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array}.$$

   (a) Após alguns destes passos, se obtém o tabuleiro

3		7
5	11	

   . Preencha as casas em branco.

   (b) Seguindo as mesmas regras, obtemos o tabuleiro

a	7	b
13		16
c		d

   , sendo que a as casas das esquinas satisfazem a desigualdade $a < b < c < d$. Acabe de preencher o tabuleiro, determinando os valores de a, b, c e d.

Solução: Quando realizamos a, b c e d passos em cada um dos quadrados 2×2 que contém as esquinas, o tabuleiro ficará preenchido da seguinte forma

a	$a+b$	b
$a+c$	$a+b+c+d$	$b+d$
c	$c+d$	d

Assim temos em cada um dos item do problema temos:

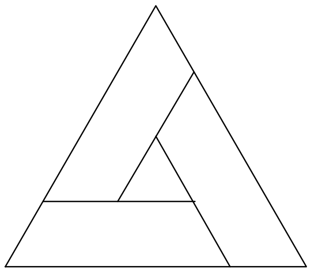
(a) $a = 3$, $b = 7$, $c = 5$ e $c + d = 11$. Segue que $d = 6$ e portanto o tabuleiro preenchido é

3	10	7
8	21	13
5	11	6

(b) Neste caso temos que $a + b = 7$, $a + c = 13$ e $b + d = 16$. Como $a < b$ segue que $a \leq 3$. Somando as duas ultimas equações e tirando a primeira temos que $c + d = (a + c) + (b + d) - (a + b) = 22$. Como $c < d$ então $2c < c + d = 22$ e assim $c \leq 10$. Por outra parte sabemos que $a + c = 13$, asssim a anterior desigualdade implica que $a \geq 3$. Portanto a única possibilidade é que $a = 3$ e neste caso $b = 4$, $c = 10$ e $d = 12$. Assim o tabuleiro preenchido fica da seguinte forma: da seguinte forma

3	7	4
13	29	16
10	22	12

3. Na figura, o triângulo equilátero interior tem lado 1, os três trapézios são congruentes e cada um deles tem área igual a 5 vezes a área do triângulo menor.



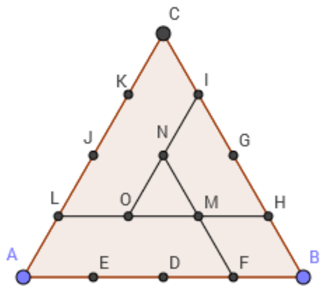
   (a) Qual é o comprimento do lado do triângulo equilátero maior?.

   (b) Quais são as medidas dos lados dos trapézios?

Solução:

(a) Seja A a medida da área do triângulo equilátero menor. Como a área de cada trapézio é $5A$, a área do triângulo equilátero maior é $A + 5A + 5A + 5A = 16A$. Dessa forma, o triângulo equilátero maior possui 16 vezes a área do triângulo equilátero menor, portanto seu lado é $\sqrt{16} = 4$ vezes maior. Assim, o comprimento do lado do triângulo maior é 4.

(b) Observemos que os ângulos da base maior dos trapézios valem 60°, pois um deles é ângulo do triângulo equilátero e o outro é correspondente a outro ângulo de 60°. Na figura abaixo, ao prolongarmos $\overline{LM}$ até $H \in \overline{BC}$ obtemos os triângulos equiláteros HCL e HIO.



Seja x o comprimento dos segmentos $\overline{AL} = \overline{FM} = \overline{BH} = \overline{BF} = \overline{HM}$. Então $\overline{AF} = 4 - x = \overline{BI}$, logo $\overline{HI} = 4 - 2x$, o que implica que $4 - 2x = \overline{HO} = 1 + x$ e portanto $x = 1$. Assim, as bases dos trapézios valem 3 e 2 e os lados outros lados valem 1.

4. Quatorze sapos estão posicionados sobre quatorze pedras que se encontram ao redor de uma lagoa circular, inicialmente um sobre cada pedra. A cada minuto, exatamente dois sapos saltam para uma pedra vizinha, à direita ou à esquerda das pedras que eles estavam.

   (a) Descreva como os sapos devem saltar de modo que, em algum momento, todos fiquem sobre exatamente 2 pedras.

   (b) É possível que, em algum momento, todos os sapos fiquem parados na mesma pedra? Por quê?

   Solução:

   (a) Vamos primeiramente enumerar as pedras de 1 a 14, nessa ordem cíclica. Esse item possui várias soluções. Por exemplo, no primeiro minuto, os sapos posicionados nas pedras 2 e 13 pulam para as pedras 1 e 14, respectivamente. No segundo minuto, os sapos posicionados nas pedras 3 e 12 pulam para as pedras 2 e 13 e, em seguida, para as pedras 1 e 14. Repetimos o mesmo movimento para os sapos inicialmente nas pedras 4 e 11, 5 e 10, 6 e 9 e, por fim, 7 e 8. Após $1+2+3+4+5+6 = 21$ minutos, os sapos inicialmente posicionados nas pedras de 1 a 7 estarão todos na pedra 1 e os sapos restantes estarão todos na pedra 14.

   (b) Suponha, sem perda de generalidade, que em algum momento os sapos estejam todos na pedra 1. Observemos que os sapos que estavam inicialmente nas pedras 3, 5, 7, 9, 11 e 13 necessitaram de uma quantidade par de pulos para chegar na pedra 1 e os sapos que estavam inicialmente nas pedras 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14 necessitaram de uma quantidade ímpar de pulos para alcançar a pedra 1. Com isso, a quantidade de sapos que necessitou de uma quantidade ímpar de pulos é 7, que é ímpar, logo o total de pulos deve ser ímpar. Mas isso é um absurdo pois os pulos são dados aos pares. Logo, é impossível que os sapos fiquem parados na mesma pedra em algum momento.

5. Lucas faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \to [100, 5] \to [50, 50, 5] \to [50, 25, 25, 5] \to [50, 25, 30] \to [80, 25]$$

   (a) Como Lucas deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
   (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?

Solução:

   (a) Observe que no momento que obtemos os números 14, 28 e 56 basta dividir as pilhas estas pilhas ao meio até obter pilhas de tamanho 7. Observemos que isso é possível pois

$$[51, 49, 5] \to [56, 49] \to [28, 28, 49] \to [14, 14, 28, 49] \to [7, 7, 14, 28, 49] \to [7, 14, 28, 56].$$

   (b) Observemos que como as pilhas iniciais tem tamanho ímpar, então somente temos 3 possíveis jogadas iniciais

   - $[51, 49, 5] \to [100, 5]$
   - $[51, 49, 5] \to [56, 49]$
   - $[51, 49, 5] \to [51, 54]$

   Observemos que no primeiro caso, as duas pilhas obtidas tem um número de pedras divisível por 5 assim não importa se unimos ou dividimos em dois as pilhas, em cada passo as pilhas sempre terão um de pedras divisível por 5, logo não podemos obter pilhas com uma pedra só. O seguindo caso exatamente similar, mas neste caso as pilhas tem um número de pedras divisível por 7 e no terceiro caso as duas pilhas obtidas tem um número de pedras divisível por 3. Logo é impossível obter pilhas com uma pedra só.