1. Alice inventou a seguinte brincadeira: Sempre que tiver um número natural n, ela pode substituí-lo por $a \times b$ se $a+b=n$ e a e b são inteiros positivos. Por exemplo, Alice pode obter 260 a partir de 9 fazendo três substituições:

$$9 = 2+7 \longrightarrow 14 = 11+3 \longrightarrow 33 = 20+13 \longrightarrow 260$$

   (a) Diga como Alice pode obter 2016 a partir do número 5 com sua brincadeira.

   (b) Explique por que Alice não pode obter 2016 a partir do 5 usando 4 substituições.

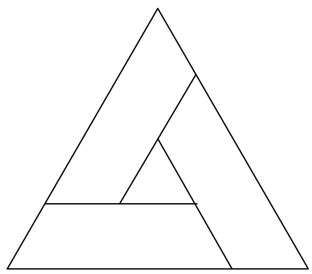
2. Um tabuleiro 3×3 está inicialmente preenchido com zeros. Em cada passo se seleciona um quadrado 2×2 e soma-se 1 unidade a cada um dos quatro números situados nas casas que formam esse quadrado. Por exemplo, quatro passos possíveis são

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&1\\\hline 0&1&1\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&1\\\hline 1&2&1\\\hline 1&1&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&2&2\\\hline 1&3&2\\\hline 1&1&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&2&2\\\hline 1&4&3\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array}.$$

   (a) Após alguns destes passos, se obtém o tabuleiro $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3& &7\\\hline & & \\\hline 5&11& \\\hline\end{array}$. Preencha as casas em branco.

   (b) Seguindo as mesmas regras, obtemos o tabuleiro $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&7&b\\\hline 13& &16\\\hline c& &d\\\hline\end{array}$, sendo que a as casas das esquinas satisfazem a desigualdade $a < b < c < d$. Acabe de preencher o tabuleiro, determinando os valores de a, b, c e d.

3. Na figura, o triângulo equilátero interior tem lado 1, os três trapézios são congruentes e cada um deles tem área igual a 5 vezes a área do triângulo menor.



   (a) Qual é o comprimento do lado do triângulo equilátero maior?.

   (b) Quais são as medidas dos lados dos trapézios?

4. Quatorze sapos estão posicionados sobre quatorze pedras que se encontram ao redor de uma lagoa circular, inicialmente um sobre cada pedra. A cada minuto, exatamente dois sapos saltam para uma pedra vizinha, à direita ou à esquerda das pedras que eles estavam.

   (a) Descreva como os sapos devem saltar de modo que, em algum momento, todos fiquem sobre exatamente 2 pedras.

   (b) É possível que, em algum momento, todos os sapos fiquem parados na mesma pedra? Por quê?

5. Lucas faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51,49,5] \to [100,5] \to [50,50,5] \to [50,25,25,5] \to [50,25,30] \to [80,25]$$

   (a) Como Lucas deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?

   (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?

OMM 2016 Nível 2

1. Alice inventou a seguinte brincadeira: Sempre que tiver um número natural n, ela pode substituí-lo por $a \times b$ se $a + b = n$ e a e b são inteiros positivos. Por exemplo, Alice pode obter 260 a partir de 9 fazendo três substituições:

$$9 = 2 + 7 \longrightarrow 14 = 11 + 3 \longrightarrow 33 = 20 + 13 \longrightarrow 260$$

   (a) Diga como Alice pode obter 2016 a partir do número 5 com sua brincadeira.

   (b) Explique por que Alice não pode obter 2016 a partir do 5 usando 4 substituições.

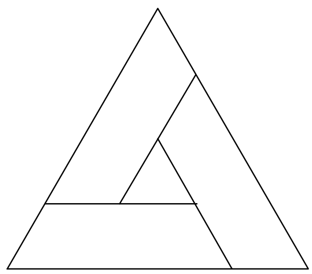
2. Um tabuleiro 3×3 está inicialmente preenchido com zeros. Em cada passo se seleciona um quadrado 2×2 e soma-se 1 unidade a cada um dos quatro números situados nas casas que formam esse quadrado. Por exemplo, quatro passos possíveis são

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&1\\\hline 0&1&1\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&1\\\hline 1&2&1\\\hline 1&1&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&2&2\\\hline 1&3&2\\\hline 1&1&0\\\hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&2&2\\\hline 1&4&3\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array}.$$

   (a) Após alguns destes passos, se obtém o tabuleiro $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3& &7\\\hline & & \\\hline 5&11& \\\hline\end{array}$. Preencha as casas em branco.

   (b) Seguindo as mesmas regras, obtemos o tabuleiro $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&7&b\\\hline 13& &16\\\hline c& &d\\\hline\end{array}$, sendo que a as casas das esquinas satisfazem a desigualdade $a < b < c < d$. Acabe de preencher o tabuleiro, determinando os valores de a, b, c e d.

3. Na figura, o triângulo equilátero interior tem lado 1, os três trapézios são congruentes e cada um deles tem área igual a 5 vezes a área do triângulo menor.



   (a) Qual é o comprimento do lado do triângulo equilátero maior?.

   (b) Quais são as medidas dos lados dos trapézios?

4. Quatorze sapos estão posicionados sobre quatorze pedras que se encontram ao redor de uma lagoa circular, inicialmente um sobre cada pedra. A cada minuto, exatamente dois sapos saltam para uma pedra vizinha, à direita ou à esquerda das pedras que eles estavam.

   (a) Descreva como os sapos devem saltar de modo que, em algum momento, todos fiquem sobre exatamente 2 pedras.

   (b) É possível que, em algum momento, todos os sapos fiquem parados na mesma pedra? Por quê?

5. Lucas faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \to [100, 5] \to [50, 50, 5] \to [50, 25, 25, 5] \to [50, 25, 30] \to [80, 25]$$

   (a) Como Lucas deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?

   (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?