

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]

1. Débora faz inicialmente 3 pilhas de moedas, uma com 51 moedas, outra com 49 e outra com 5. Ele pode fazer qualquer uma seguintes jogadas validas: ou unir quaisquer duas pilhas, ou dividir uma pilha que tem um número par de moedas em duas iguais. Por exemplo, ele pode realizar as seguinte jogadas

$$[51, 49, 5] \rightarrow [100, 5] \rightarrow [50, 50, 5] \rightarrow [50, 25, 25, 5] \rightarrow [50, 25, 30] \rightarrow [80, 25]$$

- (a) Como Débora deve proceder para obter 15 pilhas com sete moedas cada?
- (b) É possível, depois de algumas jogadas, obter 105 pilhas com uma moeda cada? Por quê?
2. Tome, num triângulo ABC , pontos D , E e F sobre os lados BC , AC e AB respectivamente. O *Teorema de Ceva* afirma que as linhas AD , BE e CF passam pelo mesmo ponto, isto é, são concorrentes, se e somente se $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$.
- (a) Suponha que em um triângulo ABC as linhas AD , BE e CF sejam concorrentes e EF seja paralelo a BC . Obtenha o valor de $\frac{BD}{DC}$.
- (b) Agora, num triângulo qualquer ABC , sejam D e F os pontos médios de BC e AB respectivamente, e seja E um ponto sobre AC de modo que $\frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Seja P é o ponto de interseção de BE e CF . Mostre que DP é paralelo a AB .
3. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos números reais que podem ser representados como dízima periódica da forma $0,\overline{abcd}$ em que a, b, c e d são dígitos distintos. Por exemplo, os números $0,\overline{3419}$ e $0,\overline{0293}$ pertencem a $\mathcal{S}$, mas $0,\overline{3832}$ não pertence.
- (a) Qual é o maior elemento de $\mathcal{S}$? Qual é o menor elemento de $\mathcal{S}$?
- (b) Quantos elementos tem $\mathcal{S}$?
- (c) Qual é a soma dos elementos de $\mathcal{S}$?
4. Note que o número 11713 termina em 13, é divisível por 13 e é tal que a soma de seus algarismos é igual a 13.
- (a) Encontre um número terminado em 17, divisível por 17 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 17.
- (b) Existe algum número terminado em 11, divisível por 11 e tal que a soma de seus algarismos seja igual a 11?
5. Seja $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ o conjunto dos primeiros 2016 inteiros positivos. As funções $f : A \rightarrow A$ e $g : A \rightarrow A$, definidas por $f(x) = 2017 - x$ e $g(x) = \begin{cases} x + 1008 & \text{se } 1 \leq x \leq 1008 \\ 2017 - x & \text{se } 1009 \leq x \leq 2016 \end{cases}$ são exemplos de funções não constantes tais que $f(f(x)) = x$ e $g(g(x)) = x$.

- (a) Dê exemplo de uma função $f : A \rightarrow A$ não constante tal que

$$f^{\circ 3}(x) := f(f(f(x))) = x \text{ para todo } x \in A.$$

- (b) Se $f : A \rightarrow A$ uma função não constante, tal que quando aplicada 1009 vezes obtemos a função identidade, isto é $f^{\circ 1009}(x) = x$ para todo $x \in A$. Para quantos valores de $y \in A$ vale $f(y) = y$? [Você pode querer usar o fato de que 1009 é um número primo.]