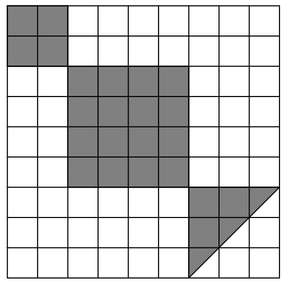
OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2017

Nível I

1. Adriana pintou de cinza uma parte de uma folha quadriculada como mostrado na figura



(a) Se cada quadrado menor tivesse lado igual a 2cm, qual seria a área pintada por Adriana?

(b) Se a área pintada por Adriana for de 35cm^2, qual é a área que Adriana deixou sem pintar?

(a) Temos $2^2 + 4^2 + \frac{3^2}{2} = \frac{49}{2}$ quadrados menores pintados, e cada um tem área igual a $4cm^2$, logo a área pintada é $\frac{49}{2} \cdot 4 = 98cm^2$.

(b) O número de quadrados que Adriana deixou de pintar é $9^2 - \frac{49}{2} = \frac{113}{2}$, logo a área que deixou de pintar é $\dfrac{\frac{113}{2} \times 35}{\frac{49}{2}} = \frac{565}{7}cm^2$.

2. Se cada uma das letras N, O, V e E representam algarismos **distintos** e os $*$ devem ser substituídos por algarismos de 0 até 9 de tal forma que o produto seja correto

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & N & O & V & E \\
 & & \times & & N & O & V & E \\
\hline
 & & & * & * & * & * & N \\
 & & * & * & * & * & O & \\
 & * & * & * & * & V & & \\
* & * & * & * & E & & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & *
\end{array}
$$

(a) Determine os valores de N e E.

(b) Determine todos os possíveis valores para o número de quatro dígitos $NOVE$.

(a) Observando a tabela que contém os dígitos e seus quadrados

E	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$E \times E$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

como $E \times E$ termina em N e eles são números distintos temos que o dígito E não pode ser $0, 1, 5, 6$. Fazendo uma nova tabela com os números que sobraram temos

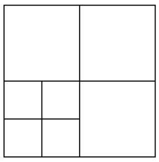
E	2	3	4	7	8	9
N	4	9	6	9	4	1
$E \times N$	8	27	24	63	32	9

Como $N \times E$ termina em E, temos dois possibilidades que são $E = 4$ e $N = 6$ ou $E = 9$ e $N = 1$. Esta segunda possibilidade pode ser descartada pois o produto de $NOVE$ por N tem cinco algarismos, assim a resposta é $E = 4$ e $N = 6$

(b) Precisamos dois números O e V de tal forma que $4 \times O$ termine e V e $4 \times V$ termine em O. De novo podemos fazer uma tabela

V	0	1	2	3	5	7	8	9
$4 \times V$	0	4	8	12	20	28	32	36

Desta tabela podemos ver que os números que cumprem a propriedade são 2 e 8, logo os possíveis números são 6284 ou 6824.

3. Na figura  se mostra como dividir um quadrado em 7 quadrados menores.

(a) Mostre como é possível dividir um quadrado em 12 quadrados menores, não necessariamente do mesmo tamanho.

(b) É possível dividir um quadrado em 14 quadrados, não necessariamente do mesmo tamanho?

(c) É possível dividir um quadrado em 2017 quadrados, não necessariamente do mesmo tamanho?

4. Daniela inventou a seguinte brincadeira: Ela tem pedras e coloca algumas delas em pilhas, depois sucessivamente escolhe duas pilhas e coloca uma pedra em cada pilha. O objetivo da brincadeira é conseguir que todas as pilhas fiquem do mesmo tamanho. Por exemplo, se ela começa com três pilhas de tamanho $5, 6, 7$ pode fazer as seguintes operações

$$(5, 6, 7) \to (6, 7, 7) \to (7, 7, 8) \to (8, 8, 8)$$

(a) Suponha que Daniela começa com três pilhas de tamanhos $1, 4, 7$. Como Daniela pode obter 3 pilhas do mesmo tamanho?

$$(1, 4, 7) \to (2, 5, 7) \to (3, 6, 7) \to (4, 7, 7) \to (5, 8, 7) \to$$
$$\to (6, 8, 8) \to (7, 9, 8) \to (8, 9, 9) \to (9, 10, 9) \to (10, 10, 10)$$

(b) Daniela consegue terminar a brincadeira se começa com seis pilhas de tamanhos $5, 6, 7, 8, 9, 10$?

Daniela não consegue terminar a brincadeira, pois o número inicial de pedras é $5 + 6 + 7 + 9 + 10 = 37$, como sempre adiciona duas pedras em todo momento terá um número ímpar de pedras em total, logo em nenhum momento pode chegar a todas as pilhas iguais porque em esse caso o número de pedras seria divisível por 6, em particular seria par.

5. Fernando inventou a seguinte brincadeira: Ele escolhe uma ordem para os algarismos $1, 2, 4, 9$ e escreve uma sequência de números usando os algarismos, nessa ordem. Por exemplo, se escolhe a ordem $9, 1, 4, 2$ os primeiros números escritos são 9, 91, 914, 9142, 91429, 914291 , 9142914 e assim por diante.

(a) Qual é a suma dos algarismos de um número escrito por Fernando que tem 20 algarismos?

Como Fernando repetiu cada um dos números $1, 2, 4$ e 9 cinco vezes para construir o número, temos que a soma dos dígitos é $5 \times (1 + 2 + 4 + 9) = 80$.

(b) Fernando escolheu uma ordem de tal forma que a suma dos algarismos de um número da sequência é igual a 2017. Quantos algarismos este número tem?

Cada vez que Fernando adiciona quatro algarismos ao número, a soma dos algarismos aumenta em 16. Como $2017 = 126 \times 16 + 1$, temos que o número de algarismos é $126 \times 4 + 1 = 505$. Além disso o primeiro algarismo escrito foi o 1

(c) Fernando escolheu uma outra ordem e a sequência que ele obteve contém números que tem soma de seus algarismos 443, 562 e 668. Qual foi a ordem escolhida por Fernando?

Como $443 = 27 \times 16 + 11$ temos que um dos números escritos por Fernando tem soma de seus algarismos igual a 11. Pelo mesmo fato com $562 = 35 \times 16 + 2$ e $668 = 41 \times 16 + 12$, temos que dois números escritos por Fernando tem soma de algarismos igual a 2 e 12.

Segue que o primeiro algarismo escrito por Fernando foi 2 o segundo foi 9 e o terceiro foi 1 e o último foi 4. Portanto a sequencia é 2914.