OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2017

Nível II

1. Fernando inventou a seguinte brincadeira: Ele escolhe uma ordem para os algarismos $1, 2, 4, 9$ e escreve uma sequência de números usando os algarismos, nessa ordem. Por exemplo, se escolhe a ordem $9, 1, 4, 2$ os primeiros números escritos são 9, 91, 914, 9142, 91429, 914291 , 9142914 e assim por diante.

(a) Qual é a suma dos algarismos de um número escrito por Fernando que tem 20 algarismos?

Como Fernando repetiu cada um dos números $1, 2, 4$ e 9 cinco vezes para construir o número, temos que a soma dos dígitos é $5 \times (1 + 2 + 4 + 9) = 80$.

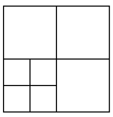
(b) Fernando escolheu uma ordem de tal forma que a suma dos algarismos de um número da sequência é igual a 2017. Quantos algarismos este número tem?

Cada vez que Fernando adiciona quatro algarismos ao número, a soma dos algarismos aumenta em 16. Como $2017 = 126 \times 16 + 1$, temos que o número de algarismos é $126 \times 4 + 1 = 505$. Além disso o primeiro algarismo escrito foi o 1

(c) Fernando escolheu uma outra ordem e a sequência que ele obteve contém números que tem soma de seus algarismos 443, 562 e 668. Qual foi a ordem escolhida por Fernando?

Como $443 = 27 \times 16 + 11$ temos que um dos números escritos por Fernando tem soma de seus algarismos igual a 11. Pelo mesmo fato com $562 = 35 \times 16 + 2$ e $668 = 41 \times 16 + 12$, temos que dois números escritos por Fernando tem soma de algarismos igual a 2 e 12.

Segue que o primeiro algarismo escrito por Fernando foi 2 o segundo foi 9 e o terceiro foi 1 e o último foi 4. Portanto a sequência é 2914.

2. Na figura  se mostra como dividir um quadrado em 7 quadrados menores.

(a) Mostre como é possível dividir um quadrado em 12 quadrados menores, não necessariamente do mesmo tamanho.

(b) É possível dividir um quadrado em 14 quadrados, não necessariamente do mesmo tamanho?

(c) É possível dividir um **cubo** em 2017 **cubos**, não necessariamente do mesmo tamanho?

3. Observe $2(5 + 4 + 1) = 5 \times 4 \times 1$ e $2(8 + 3 + 1) = 8 \times 3 \times 1$ são dois exemplos de três números tais que o dobro de sua soma é igual a seu produto.

(a) Encontre 4 números inteiros positivos tais que seu produto seja duas vezes sua soma.

Existem muitos exemplos, vamos construir alguns, por exemplo se os números são x y 1 e 1 queremos que $2(x+y+1+1) = xy$ logo $xy-2x-2y = 4$, o que é equivalente a $(x-2)(y-2) = 8$. Como $8 = 8 \times 1 = 4 \times 2$ temos que $x = 10$ e $y = 3$ é uma solução, da mesma forma $x = 6$ e $y = 4$

(b) Encontre 2017 números inteiros positivos tais que seu produto seja duas vezes sua soma.

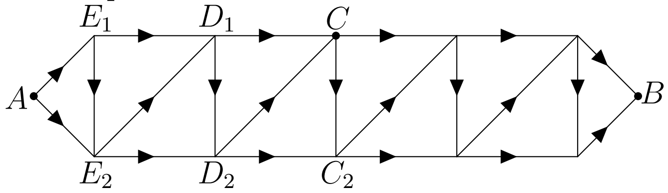
Seguindo a mesma ideia da solução do item anterior, suponhamos que os números são x y e $1, 1, \ldots, 1$, onde pegamos 2015 números 1. Queremos que

$$2(x + y + 2015) = xy$$

o que é equivalente a $(x-2)(y-2) = 4034$

Como $4034 = 2 \times 2017$ temos que um exemplo pode ser $x = 2019$ e $y = 4$

4. As cidades A e B estão unidas por estradas de mão única como mostrado na figura



(a) Amanda está na cidade A e quer ir para a cidade C. De quantas formas distintas Amanda consegue fazer esta viagem?

Os caminhos desde A até C são AE_1D_1C, AE_2D_1C, AE_2D_2C, $AE_1E_2D_1C$, $AE_1D_1D_2C$, $AE_1E_2D_2C$ $AE_2D_1D_2C$ e $AE_1E_2D_1D_2C$, total 8 caminhos.

(b) Quantos caminhos distintos existem entre A e B sem passar pela cidade C?

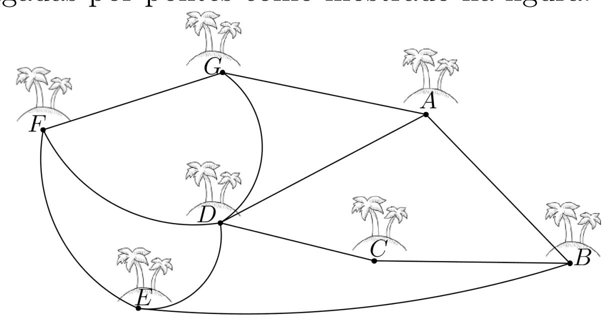
Como os caminhos não passam por C, então passam por C_2. Agora o número de caminhos de C_2 a B são 8 pois temos uma figura similar à que temos de A até C. Por outra parte os caminhos tem que passar por D_2, e os caminhos de A a D_2 são AE_2D_2, $AE_1D_1D_2$, $AE_2D_1D_2$ $AE_1E_2D_2$ e $AE_1E_2D_1D_2$. Logo o número de caminhos de A até B sem passar por C é $8 \times 5 = 40$

(c) Quantos caminhos distintos existem entre A e B?

Vamos contar quantos caminhos passam por C. Sabemos que de A a C temos 8 caminhos. e de C a B temos 8 caminhos que passam por C_2 e 5 que não passam por C_2 em total 14 caminhos. Logo o número de caminhos de A a B que passam por C é $8 \times 14 = 104$ e o total de caminhos é $104 + 40 = 144$.

5. Um arquipélago possui 7 ilhas A, B, C, D, E, F, G ligadas por pontes como mostrado na figura.

Existe uma lenda de que se uma pessoa sair da ilha A, cruzar todas as pontes existentes uma única vez e voltar ao ponto de partida será abençoado com muita riqueza. Sabe-se que o passeio descrito na lenda é impossível (coisa de matemático).



(a) Qual é o número máximo de pontes que é possível cruzar de uma única vez saindo de A e retornando ao ponto de partida?

Observe que cada vez que entramos e saímos de uma ilha usamos duas pontes. Observando a tabela do número de pontes por ilhas

Ilha	A	B	C	D	E	F	G
Pontes	3	3	2	5	3	3	3

Como somente podemos usar um número par de pontes por Ilha segue que somente podemos usar 2 pontes de A, B E F e G, 4 pontes de D e 2 pontes de C. Assim o número máxima de pontes que podemos passar é $\dfrac{2+2+2+2+2+4+2}{2} = 8$. É fácil encontrar um caminho que passe por 8 pontes, por exemplo o caminho $ABCDEFGDA$

(b) Suponha que você consegue construir pontes extras entre as ilhas *que não estão ligadas diretamente*. Qual é o número mínimo de pontes necessário para que uma pessoa cumpra as condições da lenda?

Para que o caminho seja possível, todos os números da tabela anterior tem que ser pares. Cada vez que agregamos uma ponte, dois destes números mudam de paridade, assim vamos precisar de ao menos 3 pontes. Por exemplo AF, BD e EG