OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2017

Nível III

1. Camila observou que $(2x-1)(y+1) = 2xy + 2x - y - 1$ e usando esse fato encontrou corretamente todas as soluções inteiras positivas da equação $2xy + 2x - y - 2017 = 0$.

(a) Quais foram as soluções encontradas por Camila?

Pela dica sabemos que $(2x-1)(y+1) = 2xy + 2x - y - 1 = 2016$. Além disso $2x-1$ é um número ímpar e $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ temos que as possíveis formas de fatora 2016 são

$$\begin{cases} 2x-1=1 \\ y+1=2016 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ y+1=672 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=7 \\ y+1=288 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1=9 \\ y+1=224 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=21 \\ y+1=96 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=63 \\ y+1=32 \end{cases}$$

Daqui obtemos as soluções (x,y) igual a $(1,2015)$, $(2,671)$, $(4,287)$, $(5,223)$, $(11,95)$ e $(32,31)$

(b) Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação $2x^2 + 2xy + 13x - y = 2017$.

Observemos que

$$2x^2 + 2xy + 13x - y = (2x)(x+y) + 7(2x) - (x+y) = (2x-1)(x+y+7) + 7$$

Logo precisamos solucionar a equação $(2x-1)(x+y+7) = 2010$. Como $2010 = 2\times 3\times 5\times 67$ temos as seguinte possibilidades

$$\begin{cases} 2x-1=1 \\ x+y+7=2010 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ x+y+7=670 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=5 \\ x+y+7=402 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=15 \\ x+y+7=134 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1=67 \\ x+y+7=30 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=201 \\ x+y+7=10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=335 \\ x+y+7=6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1=1005 \\ x+y+7=2 \end{cases}$$

Nos últimos 4 casos, y fica negativos, assim as soluções procuradas são $(1,2002)$, $(2,661)$, $(3,392)$ e $(8,119)$

2. Seja $A_0B_0C_0$ um triângulo com ângulos de medida α, β e γ. Helena faz a seguinte brincadeira: por cada vértice traça externamente ao triângulo uma reta de tal forma que os ângulos que formam com os lados sejam iguais, isto é, traça a bissetriz externa de cada vértice do triângulo. Com estas linhas forma um novo triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ externo a $\triangle A_0B_0C_0$.

(a) Quais são as medidas dos ângulos do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ em termos de α, β e γ.

Facilmente se comprova que os ângulos medem $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ e $\dfrac{\beta+\gamma}{2}$

(b) Repetindo este processo, Helena obtém os triângulos $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$, etc. Dado que as medidas dos ângulos de $\triangle A_3B_3C_3$ são $63°$, $62°$ e $55°$, quais eram as medidas do triângulo original?

Pelo mesmo argumento temos que os ângulos de $A_2B_2C_2$ são $\dfrac{2\alpha+\beta+\gamma}{2^2}$, $\dfrac{\alpha+2\beta+\gamma}{2^2}$, $\dfrac{\alpha+\beta+2\gamma}{2^2}$ e os ângulos de $A_3B_3C_3$ são $\dfrac{3\alpha+3\beta+2\gamma}{2^3} = 63$, $\dfrac{3\alpha+2\beta+3\gamma}{2^3} = 62$, $\dfrac{2\alpha+3\beta+3\gamma}{2^3} = 55$.
Logo os ângulos são $36°$, $44°$ e $100°$.

(c) Mostre que não importando com que triângulo Helena inicie a brincadeira, todos os ângulos de $\triangle A_6B_6C_6$ medem mais de $59°$.

Seguindo o mesmo processo concluímos que um dos ângulos de $A_6B_6C_6$ é iguais a $\dfrac{22\alpha+21\beta+21\gamma}{2^6}$, mas

$$\frac{22\alpha+21\beta+21\gamma}{2^6} = \frac{\alpha+21\times 180}{64} >= \frac{21\times 180}{64} = 59,0625 > 59$$

3. O jogo muito conhecido consiste em dois jogadores A e B retiram alternadamente 1 ou 2 pedras de uma pilha de pedras. Ganha quem retira a última pedra. Observe que se o número de pedras é múltiplo de 3, o segundo jogador tem estratégia vencedora, pois se o primeiro retira 1 pedra, o segundo retira 2 pedras, e vice-versa. Da mesma forma, se o número de pedras inicial não é múltiplo de 3, o primeiro em jogar tem estratégia vencedora.

Aline e Beline modificaram este jogo da seguinte forma: Inicialmente colocam as pedras em duas pilhas e alternadamente escolhem uma das pilhas e retiram 1, 2 ou 3 pedras dessa pilha. Dado que Aline inicia sempre o jogo:

(a) Quem tem estratégia vencedora se inicialmente elas têm duas pilhas com 5 pedras cada?

Quem tem estratégia é Beline, simplesmente joga igual a Aline mas na pilha contrária, assim em depois de sua jogada as duas pilha de novo ficam iguais

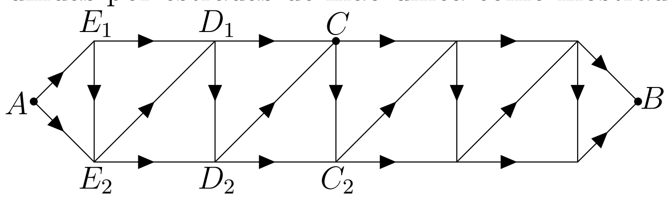
(b) Quem tem estratégia vencedora se inicialmente elas têm uma pilha com 5 pedras e outra com 9?

Quem tem estratégia é Beline, se aline pega i pedras de uma pilha, Beline pode ou tirar i pedras da outra pilha (caso essa pilha tenha suficientes pedras) ou $4-i$ pedras da mesma pilha. Em qualquer dos dois casos a diferencia entre o número de pedras de casa pilha é um múltiplo de 4. Caso essa diferencia seja zero, é so jogar simétrico. Caso não seja simétrico em nenhum momento, em algum momento alguma das pilhas tem zero pedras e a outra um múltiplo de 4 pedras.

(c) Suponha que inicialmente elas têm 2017 pedras. Beline pode distribuir as pedras em duas pilhas de forma experta de tal forma ela tenha estratégia vencedora?

Não importa como coloque as pedras Beline, ela não tem estrategia vencedora, pois como o número de pedras é ímpar, Aline pode pegar algumas pedras de uma pilha de tal forma que a diferencia entre o número de pedras entre as pilhas seja múltiplo de 4. Assim desde este instante Aline pode seguir a estratégia do item anterior.

4. As cidades A e B estão unidas por estradas de mão única como mostrado na figura



(a) Amanda está na cidade A e quer ir para a cidade C. De quantas formas distintas Amanda consegue fazer esta viagem?

Os caminhos desde A até C são AE_1D_1C, AE_2D_1C, AE_2D_2C, $AE_1E_2D_1C$, $AE_1E_2D_1C$, $AE_1E_2D_2C$ $AE_2D_1D_2C$ e $AE_1E_2D_1D_2C$, total 8 caminhos.

(b) Quantos caminhos distintos existem entre A e B sem passar pela cidade C?

Como os caminhos não passam por C, então passam por C_2. Agora o número de caminhos de C_2 a B são 9 pois temos uma figura similar à que temos de A até C. Por outra parte os caminhos tem que passar por D_2, e os caminhos de A a D_2 são AE_2D_2, $AE_1D_1D_2$, $AE_2D_1D_2$ $AE_1E_2D_2$ e $AE_1E_2D_1D_2$. Logo o número de caminhos de A até B sem passar por C é $9\times 5 = 45$

(c) Quantos caminhos distintos existem entre A e B?

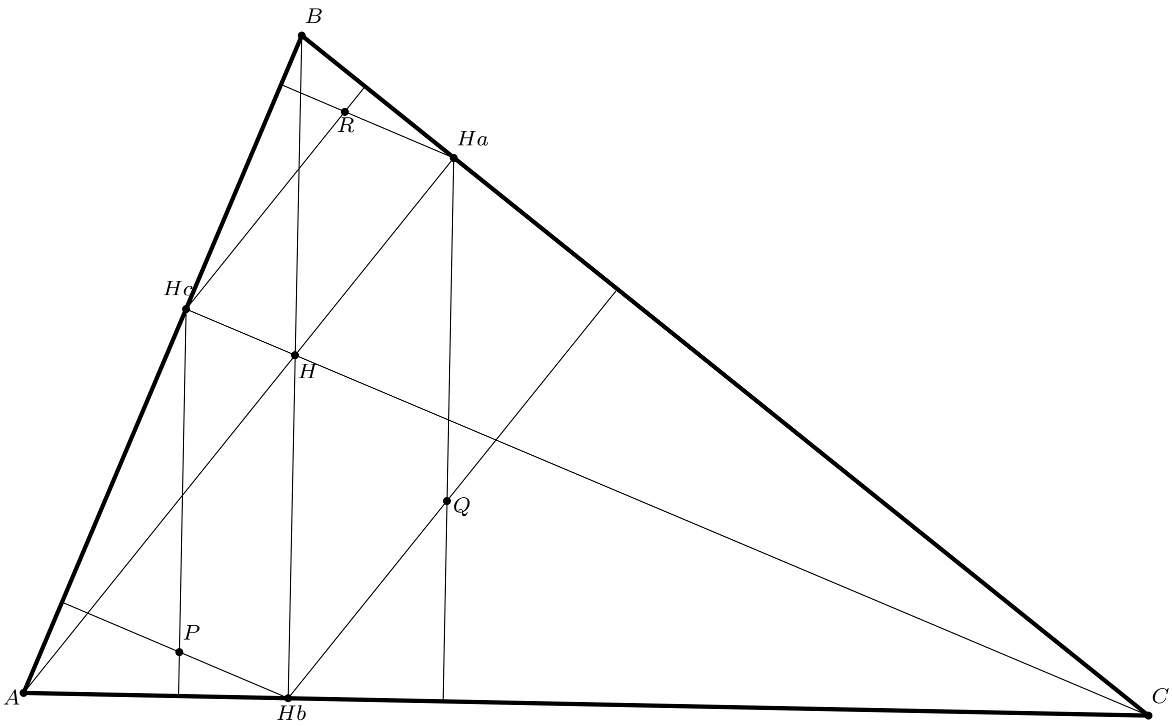
Vamos contar quantos caminhos passam por C. Sabemos que de A a C temos 9 caminhos. e de C a B temos 9 caminhos que passam por C_2 e 5 que não passam por C_2 em total 14 caminhos. Logo o número de caminhos de A a B que passam por C é $9 \times 14 = 126$ e o total de caminhos é $126 + 45 = 171$.

5. Sejam AH_A , BH_B and CH_C as alturas do triângulo $\triangle ABC$. Denotemos por P o ortocentro de $\triangle AH_BH_C$ e Q o ortocentro de $\triangle CH_AH_B$.

(a) Mostre que $H_CP = H_AQ$.

(b) Mostre que o triangulo que tem como vértices os ortocentros dos triângulos $\triangle AH_BH_C$, $\triangle BH_AH_C$ e $\triangle CH_AH_B$ é igual ao triângulo $\triangle H_AH_BH_C$.

Lembre que o ortocentro é o ponto de interseção das alturas de um triângulo



(a) Observe que H_CP, HH_B e H_AQ são perpendiculares a AB, logo são paralelas entre elas. De igual forma $HH_C||H_BP$ e $HH_A||H_BQ$. Segue que HH_CPH_B é um paralelogramo, em particular $H_CP = HH_B$. De igual forma HH_AQH_B é um paralelogramo, segue que $HH_B = H_AQ$. Concluímos que H_CP e H_AQ são iguais e paralelos

(b) Denotemos por R o ortocentro de BH_AH_C. Pelo mesmo argumento anterior temos que $RH_A||H_BP$ e tem o mesmo comprimento, e de igual forma $H_CR||H_BQ$ e tem o mesmo comprimento

Como os triângulos H_CPH_B e QH_aR tem dois lados iguais e paralelos entre eles, segue que os triangulos são congruentes, em particular $H_CH_B = QR$. Pelo mesmo argumento temos que $H_AH_C = QP$ e $H_CH_B = RQ$. Portanto os triângulos $H_AH_BH_C$ e PQR são congruentes.