

OMM 2018

NÍVEL 3

- Um relógio digital pode marcar muitos horários que são palíndromos (isto é que se lê da mesma forma da esquerda para a direita e vice-versa). Por exemplo $3:41:43$ e $13:22:31$ são dois horários palíndromos.
 - Qual é o maior palíndromo que forma uma hora possível?
 - Quantos horários palíndromos existem?
 - Encontre os dois horários palíndromos que estão mais próximos.
- Juquinha observou que, somando dois números consecutivos da lista $4, 5, 11, 14, 2$, sempre se obtém um quadrado perfeito, isto é, $4 + 5 = 3^2$, $5 + 11 = 16^4$, $11 + 14 = 5^2$ e $14 + 2 = 4^2$.
 - É possível colocar os números naturais de 1 até 17 em uma lista de tal forma que a soma de quaisquer dois números consecutivos na lista seja um quadrado perfeito?
 - É possível colocar os números naturais de 1 até 18 em uma lista de tal forma que a soma de quaisquer dois números consecutivos na lista seja um quadrado perfeito?
- Os números de 3 até 11 podem ser distribuídos em dois conjuntos $\{3, 4, 5, 7\}$ e $\{6, 8, 9, 10, 11\}$, de tal forma que em cada conjunto NÃO existem dois elementos tal que um divide o outro.
 - Distribua os números de 3 até 23 em três conjuntos tal que em nenhum desses conjuntos existam dois elementos tal que um divide o outro.
 - Mostre que não é possível distribuir os números de 3 até 2018 em nove conjuntos de tal forma em nenhum desses conjuntos existam dois elementos tal que um divide o outro.
 - Mostre que é possível distribuir esses números em dez conjuntos.
- Seja $\triangle ABC$ um triângulo com o ângulo em B medindo 60° . Sejam X, Y e Z pontos sobre os lados BC, AC e AB respectivamente de tal forma que $BX = XY = YZ = ZB$.
 - Mostre que os triângulos $\triangle YXC$ e $\triangle AZY$ são semelhantes.
 - Mostre que os ângulos $\angle AXZ$ e $\angle ZCX$ são iguais.
- A função $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $g(1) = 3$, $g(2) = 2$, $g(3) = 2$ e $g(4) = 2$ é uma função não constante tal que $g(g(x)) = 2$ para todo valor de x . Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
 - Encontre uma função $f : A \rightarrow A$, tal que $f(f(x))$ não seja constante, mas $f(f(f(x))) = 1$ para todo $x \in A$.
 - Quantas funções satisfazem que $f(x) = 1$ para cinco valores de $x \in A$ e $f(f(x)) = 1$ para todo $x \in A$?
 - Quantas funções $f : A \rightarrow A$ são tais que $f(f(x))$ é uma função constante?