SOLUÇÕES DA PROVA DO NÍVEL 1 - OMM 2009 SEGUNDA FASE

1. Kelly possui em sua casa um jogo de dardos, o alvo é o da figura ao lado. Certo dia decidiu brincar com seu pai. Cada um tinha direito a cinco lançamentos.

   (a) Kelly acertou os cinco dardos no alvo e seu pai apenas três. Podemos ter certeza que Kelly fez mais pontos que seu pai? Por quê?

   (b) Em outra rodada Kelly marcou 67 pontos, jogando cinco dardos. De quantas maneiras ela pode fazer isso?

Solução:

a) Não podemos ter certeza que Kelly fez mais pontos que seu pai. Um exemplo é: se ela acertar os cinco dardos na região que vale dois pontos, marcará 10 pontos; enquanto seu pai pode acertar os três dardos na região que vale 20 pontos e marcar 60 pontos.

b) Analisando as possibilidades de dentro para fora do alvo: O máximo de dardos que Kelly pode acertar na região de 20 pontos são três, já que 4x20=80 que é maior que 67.

- Com três dardos na região de 20 pontos é preciso fazer mais 7 pontos com dois dardos. Como não existe uma região de 7 pontos, a única maneira é com um dardo na de 5 pontos e um dardo na de 2 pontos. **(Solução 1)**
- Com dois dardos na região de 20 pontos é preciso fazer mais 27 pontos com três dardos.
  (a) Com dois dardos na região de 14 pontos o limite de 27 é ultrapassado, já que 2x14=28.
  (b) Com um dardo na região de 14 pontos restam 13 pontos e dois dardos, não é possível realizar essa combinação, já que 2x9=18; 9+5=14 e 2x5=10 (que já é menor que o desejado).
  (c) Com nenhum dardo na região de 14 pontos restam 27 pontos e três dardos. A única maneira de se distribuir é com os três dardos na região de 9 pontos. **(Solução 2)**
- Com um dardo na região de 20 pontos é preciso fazer mais 47 pontos com quatro dardos.
  (a) Com quatro dardos na região de 14 pontos o limite de 47 é ultrapassado, já que 4x14=56.
  (b) Com três dardos na região de 14 pontos restam 5 pontos e apenas um dardo. Acertando-o na região de 5 pontos encontra-se mais uma solução. **(Solução 3)**
  (c) Com dois dardos na região de 14 pontos restam 19 pontos e dois dardos. Não é possível alcançar essa pontuação, já que 2x9=18. Com dois ou menos dardos na região de 14 pontos não é possível atingir a pontuação desejada, que aumenta à medida que prosseguimos no raciocínio, enquanto a pontuação máxima acessível diminui.
- Com nenhum dardo na região de 20 pontos restam 67 pontos e 5 dardos.
  (a) Com cinco dardos na região de 14 pontos o limite de 67 pontos é ultrapassado, já que 5x14=70.
  (b) Com quatro dardos na região de 14 pontos restam 11 pontos e apenas um dardo. Não é possível fazer essa pontuação. Com quatro ou menos dardos na região de 14 pontos não é possível marcar 67 pontos, já que o máximo atingível é 4x14+9=65 pontos.

Portanto Kelly pode marcar 67 pontos com 5 dardos de 3 maneiras diferentes.

2. Regina vai construir um galinheiro retangular de 60 metros quadrados. Para cercá-lo, usará uma cerca presa a estacas separadas por 1 metro de distância. Quais devem ser as medidas dos lados do galinheiro para que Regina utilize o menor número possível de estacas?

   Solução: Como as estacas são todas separadas por 1m de distância, e o galinheiro é retangular, pode-se garantir que as medidas dos lados são números naturais. Fatorando-se 60 temos 5 prováveis medidas para o galinheiro:

   - 30m x 2m : Dessa forma serão utilizadas 62 estacas.
   - 20m x 3m : Dessa forma serão utilizadas 44 estacas.
   - 15m x 4m : Dessa forma serão utilizadas 36 estacas.
   - 12m x 5m : Dessa forma serão utilizadas 32 estacas.
   - 10m x 6m : Dessa forma serão utilizadas 30 estacas.

   Para se calcular o número de estacas utilizadas divide-se o galinheiro em "fileiras"no sentido do comprimento do mesmo.

   As duas "fileiras"das extremidades possuem (sua medida de lado + 1) estacas. As "fileiras"internas possuem apenas duas estacas, uma no começo e uma no final.

   Por exemplo: O galinheiro 20m x 3m possui 3 "fileiras"de 20m. As duas "fileiras"das extremidades possuem, juntas, 42 estacas. A "fileira"do meio possui 2 estacas, totalizando 44 estacas.

   Portanto o menor número de estacas que Regina usará para construir um galinheiro retângular é 30.

3. Ari corre a 12 km/h e caminha a 5 km/h. Ele que dar a volta na Lagoa da Pampulha, correndo 20 minutos, depois andando 10 minutos, depois correndo mais 20 minutos e assim por diante.

   (a) Quanto tempo Ari gastará para concluir os 18 quilômetros da volta da Lagoa?

   (b) Se Ari diminui o ritmo de sua caminhada para 4,5 km/h, mas deseja manter o mesmo tempo gasto para completar a volta, a que velocidade ele deve correr?

   Solução:

a) Se Ari percorre correndo 12km em 60 minutos, em 20 minutos percorre $\frac{1}{3}$ disso, que é 4km. Utilizando o mesmo raciocínio encontramos que Ari caminha $\frac{5}{6}$km em 10 minutos.

Somando-se os tempos e as distâncias encontramos que ele percorre $\frac{29}{6}$km em 30 minutos.

Sabendo-se que 18km = $\frac{108}{6}$km e dividindo $\frac{108}{6}$km por $\frac{29}{6}$km encontramos quociente 3 e resto 21. Logo, em $3 \cdot 30 = 90$ minutos, Ari percorreu $3 \cdot \frac{29}{6}$km = $\frac{87}{6}$km e restam ainda $\frac{21}{6}$km para serem percorridos.

Como no final de cada período de 30 minutos Ari está caminhando, no começo de cada período de 30 minutos ele está correndo; 4km = $\frac{24}{6}$km; e restam apenas $\frac{21}{6}$km para Ari percorrer, conclui-se que ele termina o percurso correndo.

Se Ari corre 12 em 60 minutos, ele corre $\frac{21}{6}$km em 17,5 minutos.

Somando-se todos os tempos gastos, temos:

$3 \cdot 30 + 17,5 = 107,5$ minutos.

b) Como Ari continua correndo durante 20 minutos e caminhando durante 10 minutos. Os ciclos de 30 minutos continuam, logo Ari percorrerá 3 ciclos de 30 minutos + 17,5 minutos correndo.

Agora ele caminha 4,5km em 60 minutos, isso equivale a $\frac{3}{4}$km em 10 minutos.

Supondo que ele corra agora $x$km em 60 minutos. Em 20 minutos ele corre $\frac{x}{3}$km.

Somando-se as distâncias percorridas encontramos $\frac{4x+9}{12}$km em cada ciclo de 30 minutos.

Em 3 ciclos de 30 minutos Ari percorre $\frac{4x+9}{4}$km.

Se ele percorre $\frac{x}{3}$km em 20 minutos, nos 17,5 minutos finais ele percorre $\frac{7x}{24}$km.

Somando-se a distância percorrida nos 3 ciclos com a dos 17,5 minutos finais encontramos $\frac{31x+54}{24} = 18$km.

Essa distânia equivale a uma volta completa na lagoa, ou seja, 18km.

Se$\frac{31x+54}{24} = 18$, então $31x + 54 = 24 \cdot 18 = 432$

$31x = 432 - 54 = 378$

$x = \frac{378}{31}$km/h

4. Escolhemos 68 números inteiros entre 0 e 2009, mostre que existem 2 deles cujo módulo da diferença, ou distância entre si, seja no máximo 29.

Solução:

Supondo-se que a diferença entre 2 números quaisquer seja 30. Provaremos que não é possível escolher 68 números inteiros entre 0 e 2009 que atendam a essa condição.

Começando do 0 temos: 0, 30, 60, 90, 120, 150, ...

Quando chegamos ao 68^o número, encontramos 67x30=2010, que não pertence ao intervalo, porém uma unidade a menos, ou seja o 2009 pertence. Observe que todos distam 30 unidades entre si, exceto o 67^o e o 68^o que distam 29.

Se aumentamos a diferença dos primeiros termos, teremos que diminuir a diferença dos últimos, caso contrário, não será possível escolher 68 números entre 0 e 2009.

5. Na casa de Daniel há uma caixa d'água cuja parte superior tem a forma de um cubo de aresta 3 metros e está com água até uma altura de 2 metros.

   A parte inferior é um bloco retangular que mede 5 metros de comprimento por 2 metros de altura e 3 metros de largura e está inicialmente vazia. As duas partes são interligadas por uma válvula, inicialmente fechada, conforme as figuras.

   (a) Após esvaziada a parte superior, qual é a altura do nível da água na parte inferior?

   (b) Se após a abertura da válvula o nível da água na parte superior baixa a uma velocidade de 2 cm por segundo, qual é a velocidade com que o nível da água do reservatório inferior sobe?

Solução:

a) Como a largura do cubo e do bloco retangular é a mesma (3m), então há uma relação de proporcionalidade entre a áreas correspondentes à base x altura de cada compartimento.

Se na parte superior tinha 3m x 2m = $6m^2$ de água, então na parte inferior, inicialmente vazia, após a parte superior ser esvaziada completamente, também deve ter $6m^2$ de água. Como o comprimento do bloco é 5m, a altura de água deve ser $\frac{6}{5}$=1,2m

b) A parte superior tem uma altura de 2m = 200cm de água que baixa a 2cm/s. Se ela baixa 2cm em 1 segundo, levará 100 segundos para esvaziar completamente.

Mas no exato momento em que o compartimento superior se esvaziar, o inferior completará sua altura de 1,2m, ou seja, gastará 100 segundos para encher até a marca de 120cm.

Se enche 120cm em 100 segundos, então em 1 segundo encherá a centésima parte de 120, que é 1,2cm. Logo a velocidade com que o nível da água do reservatório inferior sobe é 1,2cm/s.