

1. (a) Quais são os restos quando dividimos 20099 e 200999 por 18.
(b) Qual é o resto obtido quando dividimos por 18 o número

$$2009 + 20099 + 200999 + \dots + \underbrace{2009 \dots 9}_{100 \text{ noves}} .$$

2. Dado um retângulo $ABCD$, com lados AB e BC de comprimento 6 e 8 cm respectivamente. Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e BC , respectivamente. Seja P o ponto de encontro das retas AN e CM .

a) Determine a área do triângulo $\triangle ACP$.

b) Se Q é o ponto de corte da reta BP com o lado CD determine a razão $\frac{CQ}{QD}$

3. Dado que a, b, c são inteiros ímpares, mostrar que a equação $ax^2+bx+c = 0$ não tem raízes racionais.

4. Para cada número natural k , definimos uma sequência $\{a_n\}$ da seguinte forma $a_0 = k$ e para $n \geq 0$

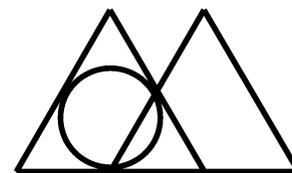
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ é ímpar} \\ \frac{a_n}{2} & \text{se } a_n \text{ é par} \end{cases}.$$

Por exemplo, se $k = 25$, então $a_0 = 25$, $a_1 = 26$, $a_2 = 13$, $a_3 = 14$, $a_4 = 7$, $a_5 = 8$, $a_6 = 4$, $a_7 = 2$, $a_8 = 1$. Determine o menor e o maior valor de k tal que a_{12} seja o primeiro termo da sequência que é igual a 1.

5. Com os números 1,2,3,4 podemos formar as sequências por exemplo (1, 2, 4, 3), (2, 1, 3, 4) que cumprem a propriedade que dois termos consecutivos tem diferença menor ou igual a 2. Tais sequências as chamaremos de *suaves*. Por exemplo a sequência (2, 1, 4, 3) **não** é suave.
- a) Escreva todas as sequências suaves que podemos formar com os números 1,2,3,4.
- b) Quantas sequências suaves podemos formar com os números 1,2,3,4,5,6,7,8.

OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2009

Nível III



Nome:	
Endereço:	
Escola:	Série:
Cidade:	Telefone:
e-mail:	

Instruções:

- A duração da prova é de 2h30.
- É proibido o uso de calculadoras.
- Ao preencher as informações acima, use letra legível e deixe pelo menos um telefone de contato ou recado.
- Para garantir o sigilo da prova seu professor recolherá os enunciados.
- A interpretação dos enunciados faz parte das questões, portanto seu professor não poderá responder perguntas durante a prova.
- Anexe **TODAS** as folhas usadas para a resolução a esta prova, no possível folhas diferentes para questões diferentes.
- Seu rascunho unicamente será usado a seu favor e nunca contra.
- Respostas sem justificativa não serão consideradas.
- A organização da OMM se reserva o direito de anular a prova com suspeita de fraude.

Para uso exclusivo do corretor

1	2	3	4	5	Total