Gabarito da Prova do Nível II

Primeira Questão: ANULADA-

Com três algarismos distintos, formamos três números:

O primeiro número é obtido ordenando-se os algarismos em ordem *decrecente*, da esquerda para a direita, o maior fica na posição das centenas e o menor na posição das unidades.

O segundo é obtido ordenando-se os algarismos em ordem *crescente*, da esquerda para a direita, o maior na posição das unidades e o menor na posição das centenas.

O terceiro é o resultado da diferença entre o maior e o menor.

a) Iniciando com o número 526 e repetindo a operação acima 5 vezes, que número obteremos?

b) Prove que iniciando com um número qualquer após um número finito de repetições da operação obtemos o número 495.

Solução:

a) ordene e subtraia: $652 - 256 = 396$

ordene e subtraia: $963 - 369 = 594$

ordene e subtraia: $954 - 459 = 495$

repetindo qualquer número de vezes obteremos 495.

b) Se $c < b < a$

Então a primeira operação é:

$$abc - cba = (a \times 100 + b \times 10 + c) - (c \times 100 + b \times 10 + a) = [(a - 1 - c) \times 100] + (9 \times 10) + (c + 10 - a)$$

Observe que sempre obteremos o algarismo 9 na casa das dezenas e que podemos escrever o resultado na forma $x9y$, com $x \neq y$.

Repetimos então a operação:

$$9xy - yx9 = (9 \times 100 + x \times 10 + y) - (y \times 100 + x \times 10 + 9) = (8 - y) \times 100 + 9 \times 10 + (y + 1)$$

Podemos então verificar todas as possibilidades com $0 \leq y \leq 8$:

Para $y=8$ ou seja o resultado é igual a 099 . Repetindo o procedimento: $990 - 099 = 891$; repetindo $981 - 198 = 792$; mais uma vez $972 - 279 = 639$;

Uma vez mais $963 - 369 = 594$ e finalmente, $954 - 459 = 495$

$y = 7$, ou seja o resultado da segunda operação é 198. Repetimos sucessivamente o procedimento, para obter:

$981 - 189 = 792$. Não há necessidade de repetir o procedimento pois na análise para o caso $y = 8$, este número já apareceu e nos levou ao número 495.

O mesmo ocorre nos demais casos:

Para $y = 6$, o resultado acima é igual a 293. Repetindo o procedimento teremos: $932 - 239 = 693$, já obtido anteriormente.

Para $y = 5$, o resultado é: 396; também já obtido.

Para $y = 4$, o resultado é 495.

Para $y = 3$, obtemos 594.

Para $y = 2$, obtemos 693.

Para $y = 1$, obtemos 792, já obtido.

Para $y = 0$, obtemos 891, também obtido.

Em todos os casos obtemos números a partir dos quais a repetição do procedimento resulta no número 495. Como queríamos demonstrar.

Segunda Questão:

Ari pretende fazer a volta da Lagoa da Pampulha alternando durante o percurso, 10 minutos correndo com 20 minutos caminhando. Sabe-se que sua velocidade ao caminhar é de 5 quilômetros por hora e ao correr, sua velocidade é de 12 quilômetros por hora.

a) Se Ari inicia o percurso correndo, quanto tempo gastará para concluir os 18 quilômetros da volta da Lagoa?

b) Se Ari diminuir a sua velocidade de caminhada para 4,5 quilômetros por hora, mas pretender manter o mesmo tempo gasto para completar a volta, com que velocidade deverá correr?

Solução: a) Se Ari percorre correndo 12km em 60 minutos, ou seja 1 km em 5 minutos em 10 minutos percorre 2km.

Utilizando o mesmo raciocínio encontramos que Ari caminha a 5 km em 60 minutos, ou 1 km a cada 12 minutos. Logo, em 20 minutos percorre $\frac{5}{3}$ km.

Em 30 minutos Ari percorre $\frac{11}{3}$ km.

Em 2 horas irá percorrer $\frac{44}{3}$ km restando, portanto, $18 - \frac{44}{3}$ km.

Ou seja, após duas horas faltam $\frac{10}{3}$ km

Correndo mais 10 minutos percorrerá mais 2 km, faltando-lhe apenas $\frac{4}{3}$ km de caminhada, que deverá ser percorrido em

$$\frac{4}{3} \times 12 = 16 \text{ minutos.}$$

Tempo total de percurso: 2 horas e 26 minutos.

b) Suponha que a velocidade de Ari ao caminhar seja de 4,5 km/h ou $\frac{4,5}{60} = \frac{3}{40}$ km/min.

Se Ari corre a uma velocidade de v km por minuto então, em trinta minutos irá percorrer $\frac{3}{2} + 10v$ quilômetros.

Queremos encontrar v de modo que o tempo total para o percurso de 18 quilômetros seja de 2 horas e 26 minutos.

Em duas horas, Ari percorre 4 vezes o espaço percorrido em 30 minutos. Usando o cálculo acima, vemos que, em duas horas Ari percorre $6 + 40v$ quilômetros. Portanto, em 26 minutos ele precisa percorrer $18 - (6 + 40v) = 12 - 40v$ quilômetros.

Ao iniciar um novo ciclo, Ari corre 10 minutos, percorrendo assim mais $10v$ quilômetros. Caminha nos próximos 16 minutos, percorrendo $16 \times \frac{3}{40} = \frac{6}{5}$ quilômetros. Logo, nos 16 minutos finais Ari percorre $10v + \frac{6}{5}$ km.

Basta, portanto encontrar v de modo que $12 - 40v = 10v + \frac{6}{5}$.

Ou seja: $50v = 12 - \frac{6}{5}$. Portanto $v = \frac{27}{125} = 0,216$ km/min ou 12,96 km/h.

Terceira Questão:

Deseja-se construir um galinheiro retangular de 60 metros quadrados. Para cercá-lo, usa-se uma cerca presa a estacas fincadas e separadas por um metro de distância.

Os lados do galinheiro devem medir no mínimo dois metros quadrados.

Quais devem ser as dimensões do galinheiro de modo que usa-se o menor número de estacas?

Solução:

Como as estacas são separadas por 1m de distância e o galinheiro é retangular, pode-se garantir que as medidas dos lados são números. Fatorando-se 60 temos 5 possíveis medidas para o galinheiro:

30m x 2m : Dessa forma serão utilizadas 62 estacas.

20m x 3m : Dessa forma serão utilizadas 44 estacas.

15m x 4m : Dessa forma serão utilizadas 36 estacas.

12m x 5m : Dessa forma serão utilizadas 32 estacas.

10m x 6m : Dessa forma serão utilizadas 30 estacas.

Para calcular o número de estacas utilizadas basta observar o número de estacas em cada um dos quatro lados do galinheiro;

Os lados correspondentes à largura possuem a sua medida mais uma estaca.

Os lados que correspondem ao comprimento do galinheiro possuem a sua medida menos duas estacas.

Por exemplo:

Para construir o galinheiro 20m x 3m usamos 3 estacas em cada lado menor e 28 estacas nos lados maiores, totalizando

$$2 \text{ times } 3 + 2 \times 28 = 6 + 56 = 62 \text{ estacas.}$$

Portanto o menor número de estacas que para construir um galinheiro retangular é 30 que corresponde às dimensões 10 x 6.

Quarta Questão:

Em um triângulo ABC sejam M um ponto do segmento AB tal que $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{2}{3}$ e N um ponto do segmento CM tal que $\frac{|CN|}{|CM|} = \frac{1}{7}$.

Qual é a razão entre a área do triângulo ANM e a área de ABC ?

Solução:

$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{2}{3}$ implica que $\frac{\text{área}[AMC]}{\text{área}[ABC]} = \frac{2}{3}$, pois os triângulos AMC e ABC possuem uma altura em comum.

Observe que os triângulos AMN e AMC possuem a altura a partir do vértice A em comum. Logo, $\frac{\text{área}[AMN]}{\text{área}[AMC]} = \frac{|NM|}{|CM|} = \frac{6}{7}$.

Juntando as duas razões obtidas acima temos

$$\frac{\text{área}[AMN]}{\text{área}[ABC]} = \frac{\text{área}[AMN]}{\text{área}[AMC]} \times \frac{\text{área}[AMC]}{\text{área}[ABC]} = \frac{6}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$$

Quinta Questão:

Dado que a, b, c são números ímpares, mostrar que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes racionais.

Solução:

Um número é racional se pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$ que podemos supor uma fração reduzida isto é, m e n primos entre si.

Se r é um número racional que é raiz da equação, então:

$$a\frac{m^2}{n^2} + b\frac{m}{n} + c = 0$$

ou

$$am^2 + bmn + cn^2 = 0$$

Há casos a considerar:

- 1) Se m e n ímpares, então $am^2 + bmn$ é par e $-cn^2$ é ímpar. absurdo
- 2) Se m é par e n é ímpar, então $am^2 + bmn$ é par e $-cn^2$ é ímpar, absurdo.
- 3) Se n é par e m é ímpar então $bmn + cn^2$ é par e $-am^2$ é ímpar, absurdo.

Logo não existe raiz racional para a equação.