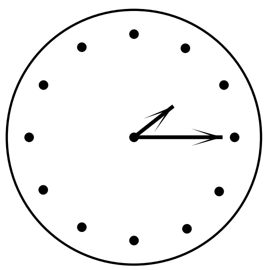
Olimpíada Mineira de Matemática 2008
Resolução Nível II

Questão 1) Alternativa **A)**

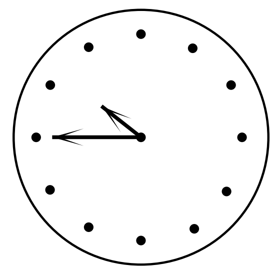
$$\begin{aligned}((5^2 \times 4)^2 \times 3)^2 \times 2 &= ((25 \times 4)^2 \times 3)^2 \times 2 = ((100)^2 \times 3)^2 \times 2 \\ &= (10000 \times 3)^2 \times 2 = (30000)^2 \times 2 \\ &= 900000000 \times 2 = 1800000000\end{aligned}$$

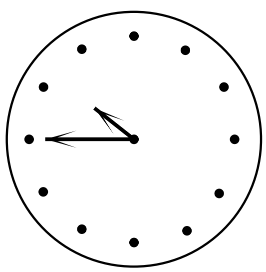
Somando os algarismos de 1800000000 temos: $1+8+0+0+0+0+0+0+0+0 = 9$.

Questão 2) Alternativa **C)**

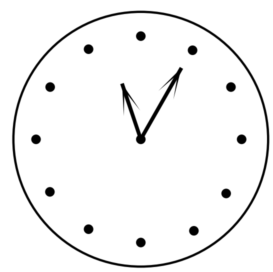


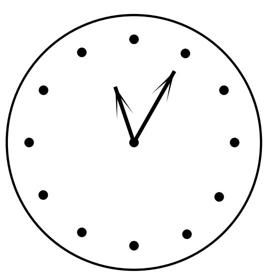
Refletindo
a imagem
$\Longrightarrow$



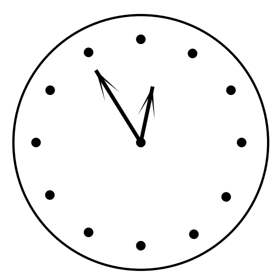


Após 1
hora
e 20
minutos
$\Longrightarrow$





Refletindo
novamente
$\Longrightarrow$



Observação: A posição original do relógio não é uma configuração possível em um relógio normal.

Questão 3) Alternativa **C)**

O caminho mais curto contém 10 quadrados. Numerando os quadrados de 1 a 36, sendo que a primeira linha contém os números de 1 a 6 e a última os números de 31 a 36, teremos os possíveis caminhos:

Caminho 1) 1-2-3-4-10-11-12-18-24-30-36

Caminho 2) 1-7-8-9-10-11-12-18-24-30-36
Caminho 3) 1-7-8-9-15-21-22-23-24-30-36
Caminho 4) 1-7-13-14-15-21-22-23-24-30-36
Caminho 5) 1-7-13-14-20-21-22-23-24-30-36
Caminho 6) 1-7-13-14-20-26-27-28-29-30-36
Caminho 7) 1-7-13-14-20-26-27-33-34-35-36
Caminho 8) 1-7-13-14-20-26-32-33-34-35-36
Caminho 9) 1-7-13-19-25-31-32-33-34-35-36

Questão 4) Alternativa **C)**

O volume é o produto: profundidade $\times$ altura $\times$ largura. Sabemos que:

- Profundidade $\times$ altura $= 12$.
- Profundidade $\times$ largura $= 20$.
- Altura $\times$ largura $= 15$.

Logo (profundidade $\times$ altura $\times$ largura)$^2 = 12 \times 20 \times 15 = (3 \times 4 \times 5)^2$. Portanto o volume é 60.

Questão 5) Alternativa **C)**

Considerando que o ponteiro atrasa dois minutos a cada hora, ele atrasará sessenta minutos em trinta horas. Como ao meio dia ele está na hora certa, ele deverá atrasar 12 horas para marcar novamente a hora certa, ou seja, logo passarão $30 \times 12 = 360$ horas para ele voltar à hora certa.

Questão 6) Alternativa **B)**

O número 2008 fatorado se escreve como uma potência de 2 por um número ímpar primo, ou seja:

$$2008 = 2^3 \times 251$$

Então o número 2008^2 se fatora como:

$$\begin{aligned} 2008^2 &= (2^3 \times 251)^2 \\ &= (2^3)^2 \times (251)^2. \end{aligned}$$

Portanto há três divisores ímpares do número 2008^2: 1, 251 e 251^2.

Questão 7) Alternativa **C)**

A quantidade de algarismos que há entre 10 e 19,

$$123456789\underline{10111213141516171819}2021...$$

é 20 algarismos. Se seguirmos este raciocínio obteremos:

- mais 20 algarismos entre 20 e 29,
- mais 20 entre 30 e 39,

- e mais 20 entre 40 e 49.

Totalizando até agora 80 algarismos que estão entre os números 10 e 49. Pegando agora os números entre 1 e 9 da seqüência,

$$\underline{123456789}101112131415161718192021...$$

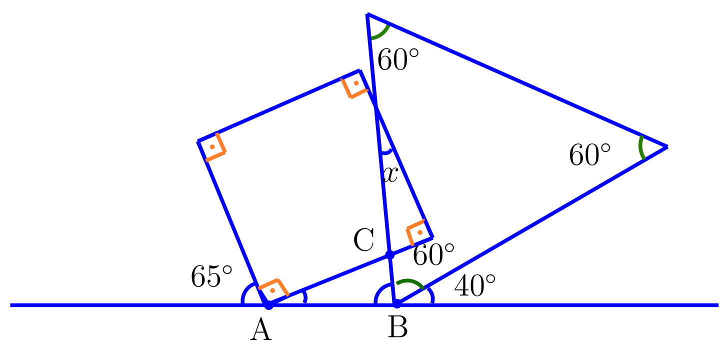
teremos mais 9 algarismos. Totalizando assim, 89 algarismos entre os números 1 e 49. Para termos 100 algarismos, precisamos de mais 11. Continuando a seqüência teremos:

$$...4546474849\underline{50515253545}556575859...$$

A quantidade de algarismos sublinhados acima é igual a 11. Logo, temos que o algarismo que ocupa a posição 100 é o número 5.

Questão 8) Alternativa **B)**

Sabemos que os quatro ângulos de um retângulo medem 90^o e que os três ângulos de um triângulo equilátero medem 60^o. Observando a figura, temos que o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 80^o já que $180^o - 60^o - 40^o = 80^o$. Da mesma forma o ângulo $B\widehat{A}C$ mede 25^o.
Para que a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ seja 180^o, o ângulo $A\widehat{C}B$ mede 75^o e seu ângulo oposto pelo vértice mede 75^o.

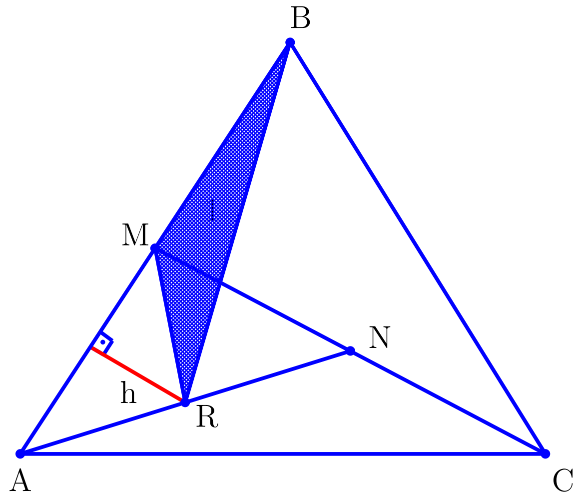


Portanto para que a soma dos ângulos internos do triângulo que contém o ângulo x seja 180^o, o valor procurado será: $180^o - 90^o - 75^o = 15^o$.

Questão 9) Alternativa **B)**

Para garantir sua vitória, o jogador 1 deve deixar para o jogador 2 apenas a opção de retirar o último palito. Isso pode ser feito caso o jogador 1 tenha em sua jogada 2 a 5 palitos na caixa. Portanto, na jogada anterior o jogador 2 tinha exatamente 6 palitos e o jogador 1 em sua jogada tinha de 7 a 10 palitos para retirar. Através do uso repetido desse mesmo raciocínio, chegamos à conclusão de que o jogador 1 garante a sua vitória se conseguir deixar o jogador 2 com $5n+1$ palitos. O número dessa forma que está mais próximo de 2008 é 2006. Logo, o jogador 1 deve retirar 2 palitos para garantir a vitória.

Questão 10) Alternativa **B)**



Como M é o ponto médio do lado AB, então $AM = MB$, logo os triângulos $\triangle AMR$ e $\triangle MBR$ tem bases iguais. Como mostrado na figura, observamos que estes têm a mesma altura h. Portanto, sendo a área de um triângulo igual a: $A = \dfrac{(base \times altura)}{2}$, temos que os triângulos $\triangle AMR$ e $\triangle MBR$ têm áreas iguais. Analogamente a área de: $\triangle AMR = \triangle MNR$, $\triangle AMN = \triangle ANC$, $\triangle ACM = \triangle MCB$.

Se a área do triângulo $\triangle MBR$ é igual a 1 então a área do triângulo $\triangle AMR$ é 1. Assim, a área do triângulo $\triangle MNR$ também será 1. Usando a analogia feita, a área do triângulo $\triangle AMN = \triangle ANC = 2$, a área o triângulo $\triangle ACM = \triangle MCB = 4$, enfim a área do triângulo $\triangle ABC = 8$.

Questão 11) Alternativa **C)**

Como temos 3 bastões vermelhos para 5 bastões azuis, e 2 vermelhos para 3 brancos, montamos a seguinte tabela:

	3 vermelhos	5 azuis
3 brancos	2 vermelhos	

Como temos bastões vermelhos nas duas linhas vamos igualar a quantidade deles. Para isso multiplicamos a primeira linha por 2 e a segunda por 3. Assim, a seguinte tabela mostra a proporção de cada tipo de giz que se encontra dentro da caixa:

brancos	vermelhos	azuis	laranjas
9	6	10	9

Na última coluna usamos o fato que a quantidade de bastões brancos é igual a de laranjas. Somando essas quantidades, obtemos: $10+6+9+9 = 34$. Como na caixa existem 68 bastões, para obtermos esse valor temos que multiplicar a quantidade encontrada por 2. Logo teremos que multiplicar também cada número de bastões por dois. Resultando em 20 bastões azuis, 12 vermelhos, 18 brancos e 18 laranjas.

Questão 12) Alternativa **D)**

Observe que $343 = 7^3$. Como a soma de dois números naturais não nulos não pode ser igual a 1, temos que cada par de faces opostas do cubo tem soma 7. Mas há apenas 3 modos de se escolher esses pares de números, a saber: $1+6$, $2+5$ e $3+4$. Como os números de cada face são distintos, concluímos que eles têm de ser os inteiros de 1 a 6 e portanto o produto desses números é $1 \times 2 \times \cdots \times 6 = 720$.

Questão 13) Alternativa **A)**

Tomamos os números entre 100 e 999 por serem números de 3 algarismos. Analisaremos primeiro os números de 100 a 199. Entre eles existem os seguintes números de dois algarismos iguais: 100, 101, 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 131, 133, $\ldots$, 199. Totalizando 27 números. Seguindo o mesmo raciocínio até 999, temos $9 \times 27 = 243$.

Questão 14) Alternativa **C)**

Temos que: $mn = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ e $0 < \frac{m}{n} < 1$. Logo m e n são divisores de $2^4 \times 3^2 \times 5$ com $m < n$. Os divisores de mn são da forma $2^a 3^b 5^c$ com $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 2$ e $0 \leq c \leq 1$, onde a tem quatro possíveis escolhas, b tem três possíveis escolhas e c duas possíveis escolhas. Assim o número mn tem $5 \times 3 \times 2 = 30$ divisores, e portanto temos $\frac{30}{2} = 15$ possíveis pares m, n com $m < n$.

Questão 15) Alternativa **B)**

O primeiro marco é da forma ab, o segundo é da forma ba e o terceiro é da forma $a0b$. Como a velocidade do viajante é constante e o intervalo de tempo entre os marcos é igual, temos que as distâncias entre os marcos são iguais. Chamemos essa distância de D. Observe que D deve ser um número de 2 algarismos, pois $ba - ab = D$. Além disso, como $ba + D = a0b$, temos que $a = 1$, pois a soma de dois números de dois algarismos não pode ser maior do que 198. Assim, como $a0b - ab = 2D$, temos que $2D = 10b - 1b = 90$, ou seja, $D = 45$ e portanto a velocidade do viajante é $v = \dfrac{45\,\text{km}}{1\,\text{h}} = 45$ km/h.