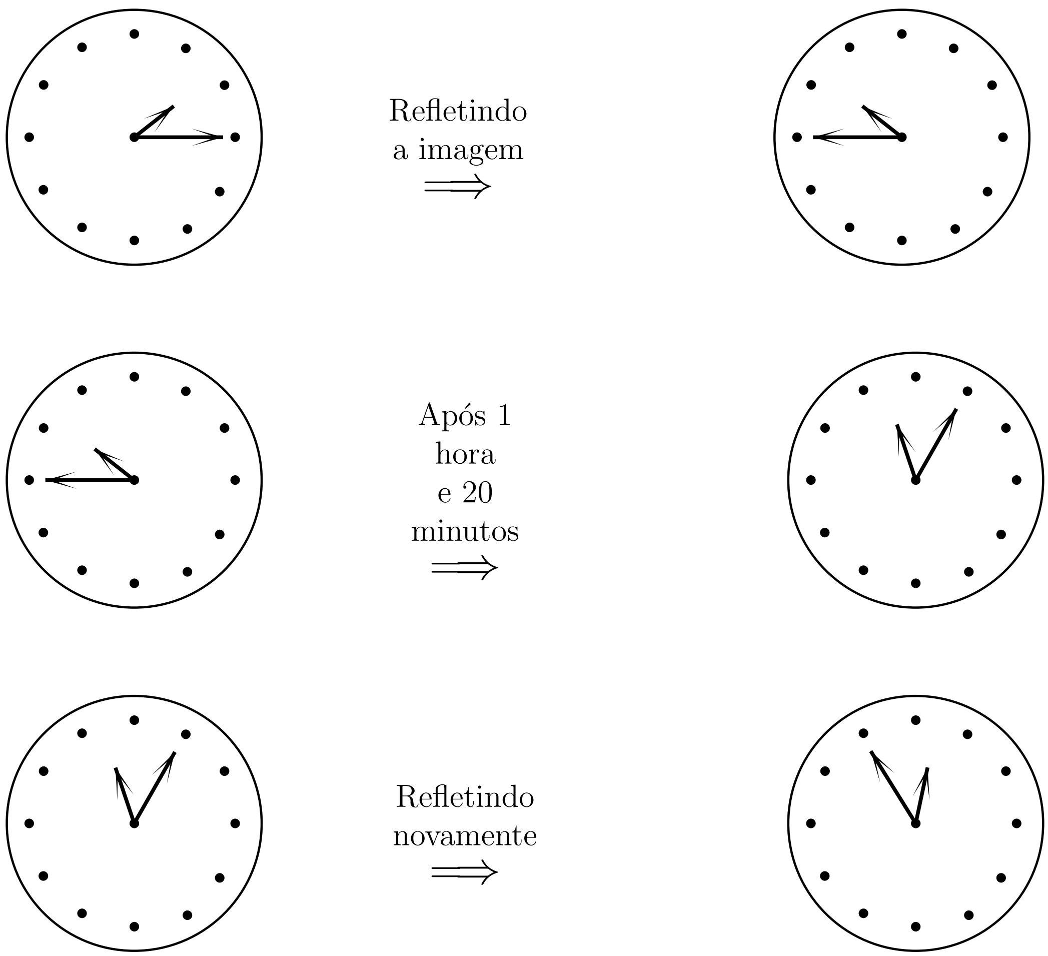
Olimpíada Mineira de Matemática 2008
Resolução Nível III

Questão 1) Alternativa **C)**



Observação: A posição original do relógio não é uma configuração possível em um relógio normal.

Questão 2) Alternativa **B)**

A área do terreno retangular é o produto de sua largura por seu comprimento:

$$\text{Área total} = 3000\,\text{m} \times 4000\,\text{m} = 12 \times 10^6\,\text{m}^2.$$

Como cada família recebeu a mesma área, basta dividir a área total pelo número de famílias. Logo, a resposta é:

$$\text{Área} = \frac{12 \times 10^6\,\text{m}^2}{2 \times 10^2} = 6 \times 10^4\,\text{m}^2 = 60000\,\text{m}^2.$$

Questão 3) Alternativa **B)**

Fatorando-se o número 2008, obtém-se que $2008 = 2^3 \times 251$. Logo, a fatoração do número $N = 2008^{2008}$ é $(2^3 \times 251)^{2008} = 2^{6024} \times 251^{2008}$. Para contar o número de divisores ímpares de N pode-se contar quantas são as maneiras de se escolher apenas fatores primos ímpares dessa fatoração. Sendo assim, todo divisor ímpar de N é da forma 251^k, onde $k \in \{0, 1, 2, ..., 2007, 2008\}$, e portanto o número de divisores ímpares é 2009.

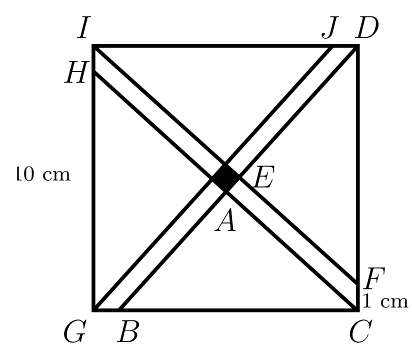
Questão 4) Alternativa **B)**

$x^2 + 6xy + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + (4xy) = (x + y)^2 + 4(xy) = (2)^2 + 4\left(\frac{3}{4}\right) = 4 + 3 = 7.$

Questão 5) Alternativa **D)**

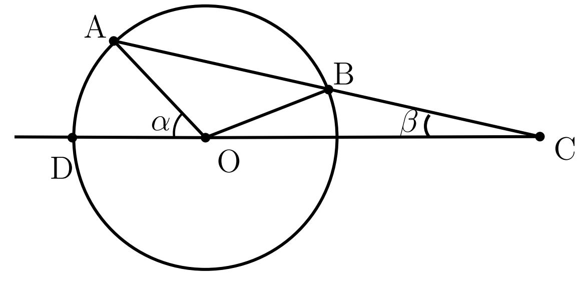
Observe que $343 = 7^3$. Como a soma de dois números naturais não nulos não pode ser igual a 1, temos que cada par de faces opostas do cubo tem soma 7. Mas há apenas 3 modos de se escolher esses pares de números, a saber: $1 + 6$, $2 + 5$ e $3 + 4$. Como os números de cada face são distintos, concluímos que eles têm de ser os inteiros de 1 a 6 e portanto o produto desses números é $1 \times 2 \times ... \times 6 = 720$.

Questão 6) Alternativa **B)**



Observe na figura que os triângulos BCD e HGC são congruentes, pelo caso LAL. O mesmo vale para todos os triângulos maiores IDF, GIJ.
Portanto, os ângulos $A\hat{C}B$ e $B\hat{D}C$ são congruentes.
Com o triângulo BCD é retângulo temos: $A\hat{B}C$ e $B\hat{D}C$ são complementares, bem como os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$. Conclui-se assim que $B\hat{A}C$ é um ângulo reto.
Além disso, segue do caso ALA que os triângulos ABC e DEF são congruentes. Portanto, o ângulo $D\hat{E}F$ é reto , $AB = EF$ e $AC = ED$.
Repetindo o argumento, pode-se concluir que todos os triângulos menores são congruentes e que os ângulos do quadrilátero hachurado são retos. Usando a congruência dos triângulos maiores e a congruência dos triângulos menores pode-se concluir também que os lados do quadrilátero hachurado são iguais, ou seja: a figura hachurada é um quadrado.
Como o triângulo BCD é retângulo de catetos iguais a 9 e 10, respectivamente, Pelo Teorema de Pitágoras a hipotenusa mede
$BD = \sqrt{(BC)^2 + (CD)^2} = \sqrt{81 + 100} = \sqrt{181}$.
Como a área do quadrado é 100, a área do triângulo BDC é $\frac{9 \times 5}{2} = 45$, a área do paralelogramo $GBDJ$ é igual $100 - 2 \times 45 = 10$. Mas a altura do paralelogramo é igual ao lado ℓ do quadrado hachurado, portanto : $10 = \ell.BD = \ell\sqrt{181}$.
Dessa forma a área do quadrado é : $\ell^2 = \frac{100}{181}$.

Questão 7) Alternativa **D)**



Os segmentos AO e OB possuem a mesma medida, pois ambos são raios da circunferência, e o segmento BC tem a mesma medida do raio. Logo, os triângulos AOB e BOC são isósceles. Sendo assim, $B\hat{O}C = \beta$. O ângulo $A\hat{B}O$ é um ângulo externo do triângulo BOC, portanto

$$A\hat{B}O = B\hat{O}C + B\hat{C}O = 2\beta.$$

Como o triângulo AOB é isósceles, temos que $B\hat{A}O = A\hat{B}O = 2\beta$. Observando que $A\hat{O}D = \alpha$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle AOC$, segue $A\hat{O}D = A\hat{C}O + C\hat{A}O = \beta + 2\beta = 3\beta$. Sendo assim, chegamos à conclusão que $\alpha = 3\beta$.

Questão 8) Alternativa **B)**

Ao racionalizar a fração dada, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2008}-\sqrt{2004}} \times \frac{\sqrt{2008}+\sqrt{2004}}{\sqrt{2008}+\sqrt{2004}} &= \frac{\sqrt{2008}+\sqrt{2004}}{(\sqrt{2008})^2-(\sqrt{2004})^2} = \frac{\sqrt{2008}+\sqrt{2004}}{2008-2004} \\ &= \frac{\sqrt{2008}+\sqrt{2004}}{4}.\end{aligned}$$

Observe que

$$\sqrt{500} = \frac{\sqrt{2000}}{2} < \frac{\sqrt{2008}+\sqrt{2004}}{4} < \frac{\sqrt{2025}}{2} = \frac{45}{2} = 22,5$$

e $\sqrt{500} = 10\sqrt{5} > 10 \times 2.2 = 22$. Portanto o inteiro mais próximo é 22.

Questão 9) Alternativa **B)**

Para garantir sua vitória, o jogador 1 deve deixar para o jogador 2 apenas a opção de retirar o último palito. Isso pode ser feito caso o jogador 1 tenha em sua jogada 2, 3, 4 ou 5 palitos na caixa. Portanto na jogada anterior o jogador 2 tinha exatamente 6 palitos e o jogador 1 em sua jogada tinha de 7, 8, 9 ou 10 palitos para retirar. Através do uso repetido desse mesmo raciocínio, chegamos à conclusão de que o jogador 1 garante a sua vitória se conseguir deixar o jogador 2 com $5n + 1$ palitos. O número dessa forma que está mais próximo de 2008 é 2006. Logo, o jogador 1 deve retirar 2 palitos para garantir a vitória.

Questão 10) Alternativa **C)**

Todos os caminhos mais curtos têm 10 quadrados, pois só se pode andar para baixo ou para direita. Numerando os quadrados de 1 a 36, sendo que a primeira linha contém os números de 1 a 6 e a última os números de 31 a 36, teremos os possíveis caminhos:

Caminho 1) 1-2-3-4-10-11-12-18-24-30-36
Caminho 2) 1-7-8-9-10-11-12-18-24-30-36
Caminho 3) 1-7-8-9-15-21-22-23-24-30-36
Caminho 4) 1-7-13-14-15-21-22-23-24-30-36
Caminho 5) 1-7-13-14-20-21-22-23-24-30-36
Caminho 6) 1-7-13-14-20-26-27-28-29-30-36
Caminho 7) 1-7-13-14-20-26-27-33-34-35-36
Caminho 8) 1-7-13-14-20-26-32-33-34-35-36
Caminho 9) 1-7-13-19-25-31-32-33-34-35-36

Questão 11) Alternativa **C)**

Para que os números da seqüência passem a ser negativos, a soma $1 + 2 + 3 + \cdots +$

$(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ deve ser maior que 2008. Logo, $n(n+1) > 4016$. Observe que $\sqrt{4016} \approx \sqrt{4000} = 20\sqrt{10} \approx 63$. Como $62 \times 63 = 3906$ e $63 \times 64 = 4032$, temos que $n = 63$. Sendo assim, o primeiro número negativo será

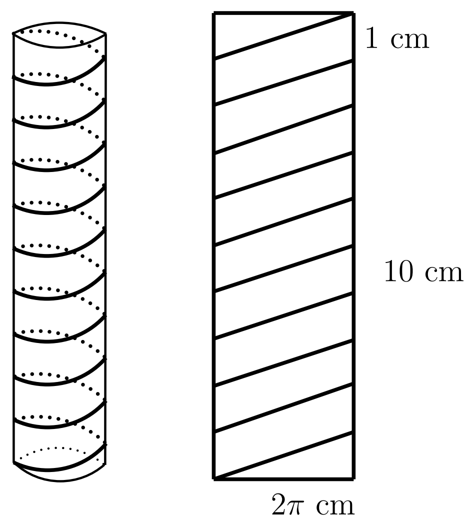
$$2008 - \frac{n(n+1)}{2} = 2008 - \frac{63 \times 64}{2} = 2008 - 2016 = -8.$$

Questão 12) Alternativa **A)**

O primeiro marco é da forma ab, o segundo é da forma ba e o terceiro é da forma $a0b$. Como a velocidade do viajante é constante e o intervalo de tempo entre os marcos é igual, temos que as distâncias entre os marcos são iguais. Chamemos essa distância de D. Observe que D deve ser um número de 2 algarismos, pois $ba - ab = D$. Além disso, como $ba + D = a0b$, temos que $a = 1$, pois a soma de dois números de dois algarismos não pode ser maior do que 198. Assim, como $a0b - ab = 2D$, temos que $2D = 10b - 1b = 90$, ou seja, $D = 45$ e portanto a velocidade do viajante é $v = \dfrac{45\,\text{km}}{1\,\text{h}} = 45$ km/h.

Questão 13) Alternativa **D)**

Observe a planificação da lateral do cilindro. O comprimento de cada volta tem medida l igual à da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 1 cm e 2π cm. Pelo Teorema de Pitágoras temos que $l^2 = 1^2 + (2\pi)^2$ e portanto $l = \sqrt{4\pi^2+1}$ cm. Como o fio completou 10 voltas em torno do cilindro, temos que seu comprimento C é igual a dez vezes o comprimento de uma volta. Logo, $C = 10\sqrt{4\pi^2+1}$ cm.



Questão 14) Alternativa **B)**

Como cada jogador deve ter pelo menos 2 cartas em sua mão, o primeiro jogador pode ter de 2 a 8 cartas. Logo, sendo N o número de possíveis jogos de cartas que o jogador 1 pode receber, temos que:

$$\begin{aligned} N &= \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{10}{8} \\ &= \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \cdots + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right] - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{9} - \binom{10}{10} \\ &= 2^{10} - 1 - 10 - 10 - 1 \\ &= 1002 \end{aligned}$$

Questão 15) Alternativa **D)**

Seja d o máximo divisor comum de $4AB9$ e $2AB1$. Observe que como d divide os dois números, d deve dividir a diferença entre eles, ou seja, d divide $4AB9 - 2AB1 = 2008$. Além disso, como esses dois números são ímpares, d deve ser ímpar. Fatorando-se 2008, obtemos que $2008 = 2^3 \times 251$. Portanto, d deve ser 251, pois o enunciado diz que $d > 1$. Precisamos de um múltiplo de 251 que tenha 4 dígitos, que comece em 2 e termine em 1 e de outro múltiplo de 251 com 4 dígitos que comece em 4 e termine em 9. Veja que $11 \times 251 = 2761$ e que $19 \times 251 = 4769$. Logo, $A = 7$ e $B = 6$, e portanto a soma $A + B$ é igual a 13.