Resolução da prova - Nível III - Segunda Fase

Questão 1)

Para calcular a velocidade mínima da lancha, devemos primeiramente calcular qual é o tempo que o barco ainda possui antes de afundar. Como ao mesmo tempo água está entrando no barco e saindo água dele, devemos calcular o saldo de quanta água está realmente entrando no barco por unidade de tempo. Seja v a velocidade com que a água entra no barco. Temos que:

$$v = \frac{180\,\mathrm{L}}{15\,\mathrm{min}} - \frac{9\,\mathrm{L}}{5\,\mathrm{min}} = \frac{180\,\mathrm{L}}{15\,\mathrm{min}} - \frac{27\,\mathrm{L}}{15\,\mathrm{min}} = \frac{153\,\mathrm{L}}{15\,\mathrm{min}} = \frac{(4 \times 153)\,\mathrm{L}}{60\,\mathrm{min}} = 612\,\mathrm{L/h}.$$

Como são necessários 765 L de água para que o barco afunde, o tempo t que o barco leva para afundar é:

$$t = \frac{765\,\mathrm{L}}{v} = \frac{765\,\mathrm{L}}{\frac{612\,\mathrm{L}}{1\,\mathrm{h}}} = \frac{765}{612}\,\mathrm{h} = \frac{5}{4}\,\mathrm{h}$$

Sendo assim, a lancha de socorro precisa percorrer os 150 Km de distância entre ela e o barco em no máximo $\frac{5}{4}\,\mathrm{h}$ e portanto a velocidade mínima V dela deve ser:

$$V = \frac{150\,\mathrm{Km}}{t} = \frac{150\,\mathrm{Km}}{\frac{5}{4}\,\mathrm{h}} = \frac{150 \times 4}{5}\,\mathrm{Km/h} = 120\,\mathrm{Km/h}$$

Questão 2)

a) Seja a_n o n-ésimo termo à direita do 1. Pela análise dessa sequência, podemos conjecturar que $a_n = (n+1)^2$. Façamos portanto uma demonstração por indução para provar esse resultado auxiliar:

Vemos que a afirmação é válida para $n = 1$.

Hipótese de Indução: $a_n = (n+1)^2$

Demonstração: Considere a pirâmide formada por todos o números naturais até $a_n = (n+1)^2$. Sua base é formada pelo 1, por n números à direita do 1 e por n números à esquerda do 1. Logo, sua base possui $2n+1$ colunas. Para se formar a pirâmide que possui todos os números até a_{n+1} é necessário acrescentar um número à esquerda da primeira coluna, um número à direita da última coluna e um número acima de cada coluna. Concluímos então que:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 1 + 1 + (2n+1) \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

Como $a_1 = 4$ e $a_n = (n+1)^2$ implica que $a_{n+1} = (n+2)^2$, pelo Princípio da Indução Finita concluímos que $a_n = (n+1)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, de posse desse resultado, podemos mais facilmente encontrar uma fórmula que expresse o n-ésimo termo que está acima do 1 (que denotaremos por b_n) em função de n.

Para isso, considere agora a pirâmide que possui todos os naturais até a_n. Nessa pirâmide, b_n é o elemento que está no topo. Para, partindo do valor de a_n, chegarmos ao valor de b_n, podemos perceber que entre a_n e b_n há exatamente $(n-1)$ números, um para cada coluna à direita do 1 (excetuando-se a coluna em que está a_n). Por isso, chegamos ao fato que:

$$
\begin{aligned}
a_n - b_n &= (n-1)+1 \\
(n+1)^2 - b_n &= n \\
b_n &= (n^2+2n+1)-n \\
b_n &= n^2+n+1
\end{aligned}
$$

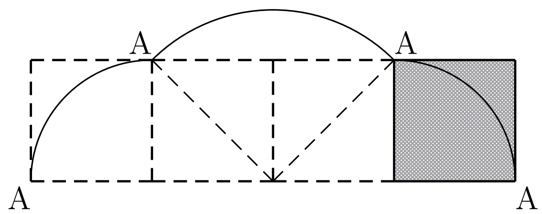
Sendo assim, o número que está 40 posições acima do número 1 é $b_{40} = (40)^2 + (40) + 1 = 1641$.

b) Seja c_n o n-ésimo número na reta (1-8-23-...). Observe que a menor pirâmide que contém c_2 é a que possui todos os naturais até a_2, a menor pirâmide que contém c_3 é a que possui todos os naturais até a_4 e assim sucessivamente. Generalizando, obtemos que a menor pirâmide que contém c_n é a que tem todos os naturais até a_{2n-2}. Da letra **a)**, sabemos que b_{2n-2} está no topo dessa pirâmide e também conhecemos fórmulas para a_n e b_n em função de n. Mas c_n é o número natural que está à mesma distância de b_{2n-2} e a_{2n-2}. Dessa informação, obtemos que:

$$
\begin{aligned}
c_n - b_{2n-2} &= a_{2n-2} - c_n \\
2c_n &= a_{2n-2} + b_{2n-2} \\
2c_n &= [(2n-2)+1]^2 + [(2n-2)^2 + (2n-2) + 1] \\
2c_n &= (2n-1)^2 + (4n^2 - 8n + 4) + 2n - 1 \\
2c_n &= (4n^2 - 4n + 1) + 4n^2 - 6n + 3 \\
2c_n &= 8n^2 - 10n + 4 \\
c_n &= 4n^2 - 5n + 2
\end{aligned}
$$

Logo, $c_{20} = 4(20)^2 - 5(20) + 2 = 1600 - 100 + 2 = 1502$.

Questão 3)



a) Como o lado do quadrado mede 1, após 3 giros o vértice A estará 4 unidades à direita do seu ponto de partida.

b) Observe inicialmente que, após o quarto giro, o ponto A permanece no mesmo local em que estava após o terceiro giro. Além disso, podemos notar que a posição resultante dos quatro giros é igual a um deslocamento do quadrado inicial de 4 unidades para a direita. Como $365 = 364+1$ e 364 é múltiplo de 4, temos que depois de 364 giros o quadrado estará 364 unidades à direita do ponto de partida. Após mais um giro, o vértice A estará 365 unidades à direita e 1 unidade acima do ponto inicial.

c) A curva descrita pelo ponto A é composta de vários arcos de circunferência. Como o movimento do ponto A se repete a cada 4 giros do quadrado, vamos calcular o comprimento de sua trajetória após esse período.

Tanto no primeiro quanto no terceiro giros, o ponto A percorre um arco de circunferência de 90^o e raio igual ao lado do quadrado, ou seja, 1 unidade. No segundo giro, ele percorre um arco de circunferência de 90^o também, mas de raio igual à diagonal do quadrado. Como o lado do quadrado mede 1, sua diagonal mede $\sqrt{2}$. Finalmente, no quarto giro o ponto A não muda a sua posição, pois o quadrado gira sobre o ponto A. Logo, o comprimento l da trajetória do ponto A após quatro giros é:

$$l = 2 \times \left(\frac{1}{4} \times 2\pi(1)\right) + \frac{1}{4} \times 2\pi(\sqrt{2}) = \pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Após 365 giros, o ponto A terá percorrido 91 vezes a trajetória de comprimento l e mais um arco de circunferência de 90^o e raio 1. Sendo assim, o comprimento total L da curva descrita pelo ponto A após 365 giros é:

$$L = 91 \times l + \frac{1}{4} \times 2\pi(1) = 91 \times \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi\left(\frac{183 + 91\sqrt{2}}{2}\right)$$

Questão 4)

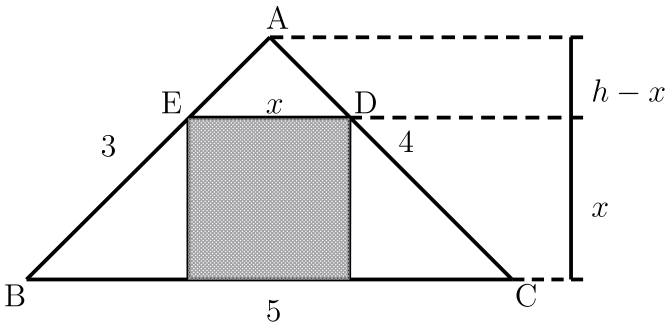
Suponhamos, por absurdo, que nenhuma das duas equações possui solução. Algebricamente, isso significa que nas duas equações o discriminante é menor do que zero. Sendo assim, temos que existem a e b inteiros distintos tais que o sistema de duas desigualdades abaixo é satisfeito.

$$\begin{cases} a^2 - 4b < 0 \\ b^2 - 4a < 0 \end{cases}$$

Façamos uma análise gráfica dessas duas desigualdades. No plano cartesiano ab, a primeira inequação representa a área acima de uma parábola vertical cuja equação é $b = a^2/4$. Já a segunda, representa a área delimitada pela parábola horizontal de equação $a = b^2/4$. A região formada pela interseção dessas duas áreas representa todos os pontos do plano que satisfazem às duas inequações simultaneamente e está representada pela figura abaixo:

Observe agora que os únicos pares de pontos (a, b) com coordenadas inteiras que pertencem a essa interseção são os pontos (1,1), (2,2) e (3,3). Apesar de os pontos (1,2), (2,1), (0,0) e (4,4) pertencerem às parábolas, eles não pertencem à região delimitada por elas. Mas, por hipótese, os valores de a e b são inteiros e distintos. Então a nossa suposição de que nenhuma das duas equações originais possuía solução era falsa, o que conclui a demonstração.

Questão 5)



Inicialmente, vamos calcular a altura do triângulo em relação à hipotenusa, que denotaremos por h. Para isso, vamos calcular a área desse triângulo de duas maneiras diferentes.

$$\text{Área} = \frac{5 \times h}{2} = \frac{3 \times 4}{2}$$

Logo, obtemos que $h = \dfrac{12}{5}$. Observe agora que os triângulos ABC e AED são semelhantes. De fato, como a figura inscrita no triângulo ABC é um quadrado, temos que o segmento DE é paralelo à reta que contém o lado BC e por isso $\hat{B} = A\hat{E}D$ e $\hat{C} = A\hat{D}E$.

Se o lado do quadrado mede x, usando a relação de semelhança entre os triângulos ABC e AED nós obtemos:

$$\frac{h - x}{h} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow 5h - 5x = hx \Leftrightarrow x = \frac{5h}{5 + h}$$

Substituindo o valor de h obtido, chegamos ao valor de $x = \dfrac{60}{37}$. Logo, a área do quadrado é $\left(\dfrac{60}{37}\right)^2$.