Questão 1

Solução:

a) Efetuando a divisão, temos que:

$$20099 = 18 \times 1116 + 11 \text{ e } 200999 = 18 \times 11116 + 11$$

b) Observando os resultados da letra **a)** e verificando que o resto da divisão de 2009 por 18 também é 11, conjecturamos que o resto da divisão de $200\underbrace{9\ldots9}_{n \text{ vezes}}$ por 18 é sempre 11.

De fato, números da forma $200\overbrace{9\ldots9}^{n \text{ vezes}}88$ são sempre divisíveis por 18, pois são divisíveis simultâneamente por 2 (pois terminam em 8) e por 9 (pois a soma de seus algarismos é $2+8+8+9n = 18+9n = 9 \times (n+3)$).

Como $200\overbrace{9\ldots9}^{n \text{ vezes}} = 200\overbrace{9\ldots9}^{n-2 \text{ vezes}}88 + 11$, temos assim que o resto da divisão de $200\overbrace{9\ldots9}^{n \text{ vezes}}$ por 18 é 11 para todo $n \geq 2$. Assim, podemos reescrever a soma:

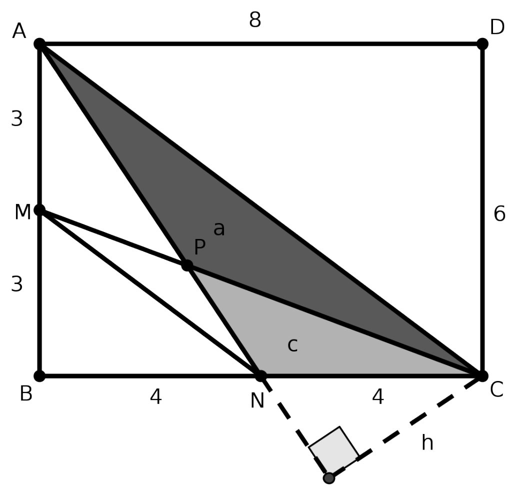
$$\begin{aligned} 2009 + 20099 + ... + 200\overbrace{9\ldots9}^{100 \text{ vezes}} &= (18a_1 + 11) + (18a_2 + 11) + ... + (18a_{100} + 11) \\ &= 18(a_1 + a_2 + ... + a_{100}) + 100 \times 11 \end{aligned}$$

Então, o resto da divisão dessa soma por 18 é o resto da divisão de 1100 por 18, ou seja, 2.

Questão 2)

Solução 1:

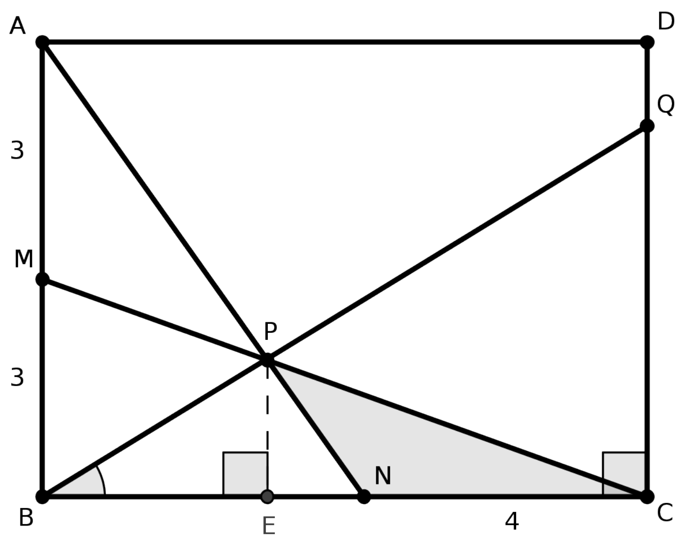
a) Na construção a seguir as letras minúsculas a e c representam as áreas das regiões em tons de cinza.



Note que AN e CM são medianas do triângulo ABC, e por isso seu encontro, o ponto P, é o baricentro do triângulo. Sabemos, entretanto, que o baricentro de um triângulo divide as medianas na razão 2 para 1, e então podemos dizer que $AP = 2\,PC$. Além disso os triângulos ACP e PCN têm a mesma altura h relativa ao lado AN, e então a razão de suas áreas é igual à razão de suas bases, logo, $a = 2c$. Entretanto, a área do triângulo ANC (que corresponde à soma $a + c$) pode ser calculada, pois sabemos os valores de sua base e de sua altura. Fazendo as contas, temos:

$$a + c = \frac{4 \times 6}{2} \Longrightarrow 3c = 12 \Longrightarrow c = 4 \text{ e } a = 8$$

b)



A área do triângulo PNC pode ser calculada a partir das medidas de sua base $NC = 4$ e sua altura PE. Efetuando os cálculos e igualando esse resultado ao valor $c = 4$, que obtivemos no item anterior, temos:

$$\frac{NC \times PE}{2} = 4 \Longrightarrow 4PE = 8 \Longrightarrow PE = 2$$

Note, entretanto, que ΔCPE e ΔCMB são semelhantes pelo caso AAA, e então:

$$\frac{PE}{EC} = \frac{MB}{BC} \Longrightarrow \frac{2}{8 - BE} = \frac{3}{8} \Longrightarrow BE = \frac{8}{3}$$

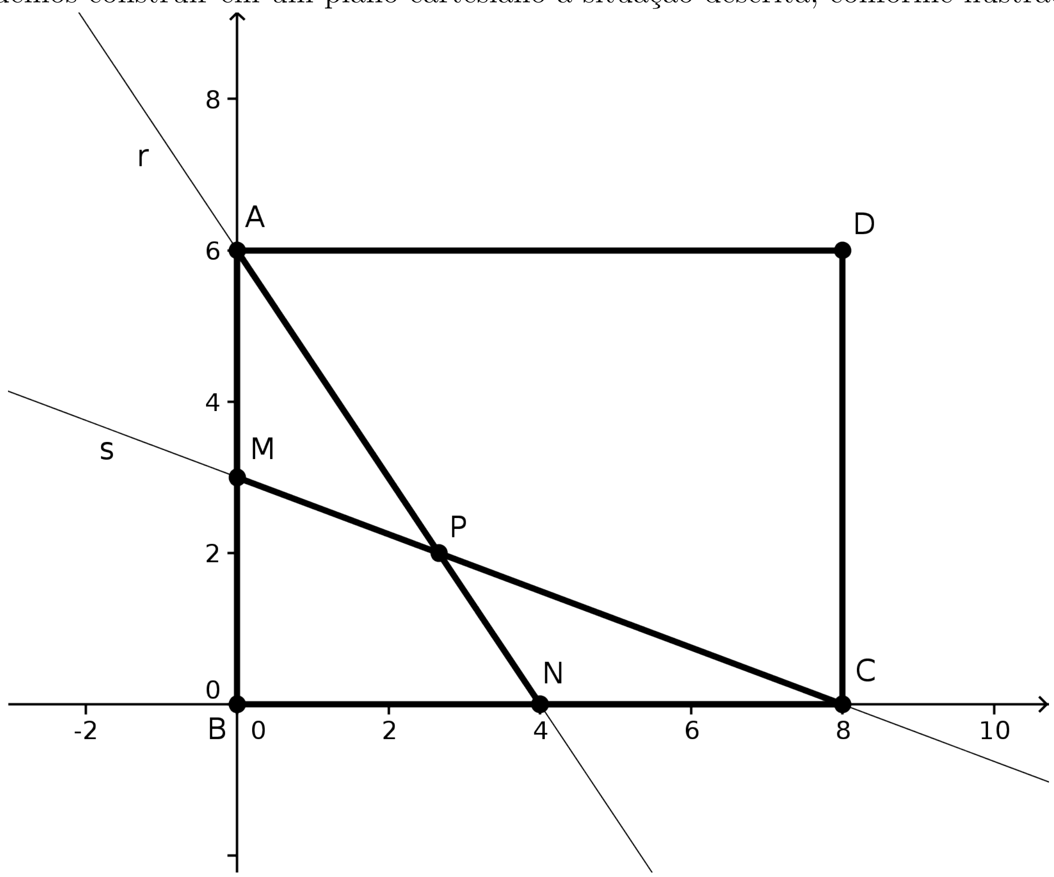
Por fim, note que ΔPBE e ΔQBC são semelhantes pelo caso AAA, e então:

$$\frac{QC}{BC} = \frac{PE}{BE} \Longrightarrow \frac{QC}{8} = \frac{2}{\left(\frac{8}{3}\right)} \Longrightarrow QC = 6$$

E então o ponto Q coincide com o ponto D, o que faz com que a distância QD seja nula; e como ela é o denominador da razão cujo valor foi pedido, a referida razão não está definida.

Solução 2:

a) Podemos construir em um plano cartesiano a situação descrita, conforme ilustrado a seguir:



As retas r, s são as retas que passam por $A(0, 6)$ e $N(4, 0)$, e por $C(8, 0)$ e $M(0, 3)$, respectivamente. Assim, calculando suas equações, temos:

$r : y = ax + b$

$$\begin{aligned} A \in r \Longrightarrow 6 &= 0 \cdot a + b \Longrightarrow b = 6 \\ N \in r \Longrightarrow 0 &= 4 \cdot a + 6 \Longrightarrow a = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$s : y = cx + d$

$$\begin{aligned} M \in s \Longrightarrow 3 &= 0 \cdot c + d \Longrightarrow d = 3 \\ C \in s \Longrightarrow 0 &= 8 \cdot c + 3 \Longrightarrow c = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Fazendo a interseção entre r e s, obtemos P. Portanto:

$$\begin{cases} -\frac{3}{8}x_P + 3 = -\frac{3}{2}x_P + 6 \\ y_P = -\frac{3}{2}x_P + 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{8}{3} \\ y_P = -\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}\right) + 6 = 2 \end{cases}$$

E então a área pedida pode ser calculada por:

$$A_{\Delta APC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 6 & 1 \\ \frac{8}{3} & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2}|48 - 16 - 16| = 8$$

b) Seja t a reta que passa por B e P. Sua equação é dada por:

$t : y = ex + f$

$$\begin{aligned} B \in t \Longrightarrow 0 &= 0 \cdot e + f \Longrightarrow f = 0 \\ P \in t \Longrightarrow 2 &= \frac{8}{3} \cdot e + 0 \Longrightarrow e = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

O ponto Q de interseção entre t e a reta suporte do lado CD (que tem equação $x = 8$) é então dado por

$$y_Q = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6 \Longrightarrow Q = (8, 6)$$

E então o ponto Q coincide com o ponto D, o que faz com que a distância QD seja nula; e como ela é o denominador da razão cujo valor foi pedido, a referida razão não está definida.

Questão 3)

Solução: Suponha por absurdo que exista uma solução racional x. Se x é um racional, então ele pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, p e q números inteiros e primos entre si (ou seja, sem fatores primos comuns). Se $p = 0$, ficamos com $c = 0$, o que é um absurdo pois c é ímpar. Se $p \neq 0$, temos substituindo x na equação dada:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0 \Longrightarrow ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Daí segue que $p(ap+bq) = -cq^2$. Como p divide o número à esquerda da igualdade (lembre-se que $p \neq 0$), p deve dividir também o número à direita. Mas sabemos que p e q são primos entre si e portanto concluímos que p divide c. Sendo c um número ímpar, concluímos que p também é ímpar.

Observando agora que $q(cq + bp) = -ap^2$, podemos pelo mesmo raciocínio acima concluir que q é ímpar também, pois divide a. Mas então descobrimos que $ap^2 + bpq + cq^2$, soma de três inteiros ímpares, é igual a zero, absurdo. $\square$

Questão 4)

Solução: Separamos a demonstração em duas partes.

Parte 1: Valor máximo: $k = 2^{12}$.

Primeiramente, observe que $a_n \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Note também que $a_{n+1} \geq \frac{a_n}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$ pois $a_n + 1 \geq \frac{a_n}{2}$. Assim, se $k > 2^{12}$ então:

$$1 = a_{12} \geq \frac{a_{11}}{2} \geq \frac{a_{10}}{2^2} \geq \ldots \geq \frac{a_1}{2^{11}} \geq \frac{a_0}{2^{12}} = \frac{k}{2^{12}} > 1$$

o que é um absurdo! De fato, para $k = 2^{12}$ segue que a sequência é $a_0 = 2^{12}, a_1 = 2^{11}, a_2 = 2^{10}, a_3 = 2^9, a_4 = 2^8, a_5 = 2^7, a_6 = 2^6, a_7 = 2^5, a_8 = 2^4, a_9 = 2^3, a_{10} = 2^2, a_{11} = 2$ e $a_{12} = 1$, o que mostra que o valor máximo para k é 2^{12}.

Parte 2: Valor mínimo: $k = 66$.

Como $a_{12} = 1$ é ímpar, devemos ter $a_{11} = 2$. Assim, para a_{10} temos dois possíveis valores: $4 = 2.a_{11}$ ou $1 = a_{11} - 1$. Mas $a_{10} = 1$ não pode ocorrer pois a_{12} é o primeiro termo igual a 1. Logo, $a_{10} = 4$. Considere os seguintes casos:

1) Se a_n é ímpar, então $a_{n+1} = a_n + 1$ é par $\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n+1}{2}$.

2) Se a_n é par mas não é múltiplo de 4, então $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ é ímpar $\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{2} + 1$.

3) Se a_n é múltiplo de 4, então $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ é par $\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{4}$.

A partir disso, concluimos que $a_{n+2} \leq \frac{a_n+2}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Logo:

$$4 = a_{10} \leq \frac{a_8 + 2}{2} \leq \frac{\frac{a_6+2}{2} + 2}{2} = \frac{a_6 + 6}{4} \leq \frac{\frac{a_4+2}{2} + 6}{4} = \frac{a_4 + 14}{8} \leq \frac{\frac{a_2+2}{2} + 14}{8} = \frac{a_2 + 30}{16} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{a_0+2}{2} + 30}{16} = \frac{a_0 + 62}{32} \Rightarrow a_0 \geq 4.32 - 62 \Rightarrow k \geq 66$$

Com efeito, para $k = 66$ a sequência é $a_0 = 66, a_1 = 33, a_2 = 34, a_3 = 17, a_4 = 18, a_5 = 9, a_6 = 10, a_7 = 5, a_8 = 6, a_9 = 3, a_{10} = 4, a_{11} = 2$ e $a_{12} = 1$, o que mostra que o valor mínimo para k é 66. $\square$

Questão 5)

Solução:

a) As sequências suaves de 1, 2, 3 e 4 estão listadas abaixo:

$$\begin{array}{ll} 1,2,3,4 & 3,1,2,4 \\ 1,2,4,3 & 3,4,2,1 \\ 1,3,2,4 & 4,2,1,3 \\ 1,3,4,2 & 4,2,3,1 \\ 2,1,3,4 & 4,3,1,2 \\ 2,4,3,1 & 4,3,2,1 \end{array}$$

Logo, há 12 sequências suaves formadas com os números 1, 2, 3 e 4.

b) Para contar as sequências suaves com n elementos (os números de 1 a n), iremos primeiramente analisar as sequências suaves de n elementos em que o primeiro elemento da sequência é n. Chamemos de P_n o conjunto das sequências deste tipo e de p_n o número de elementos de P_n.

Dentre as sequências de P_{n+1}, podemos analisar a posição relativa do número n. Há quatro casos que veremos:

1) n está na segunda posição: nesse caso, a sequência é da forma $(n+1), \overbrace{n\ ,\ \ \dots}^{n \text{ números}}$ e portanto o número de sequências deste tipo é p_n.

2) n está na terceira posição: aqui, devemos ter necessariamente que $(n-1)$ está entre n e $n+1$ pois nenhum número menor poderia ocupar tal posição. Sendo assim, a sequência é da forma $(n+1), (n-1), n, \dots$ e o único número que pode ficar na quarta posição é $(n-2)$. Logo a sequência é da forma $(n+1), (n-1), n, \underbrace{(n-2),\ \dots}_{(n-2) \text{ números}}$ e portanto o número de sequências deste tipo é p_{n-2}.

3) n está na última posição: então a sequência é da forma $(n+1), \dots, n$. Veja que neste caso as posições de todos outros números ficam determinadas, pois $(n-1)$ deve ocupar a segunda posição, $(n-2)$ a penúltima, $(n-3)$ a terceira, $(n-4)$ a antepenúltima, e assim sucessivamente. Logo, há apenas uma sequência deste tipo.

4) n está entre a quarta e a penúltima posição: observamos que nesse caso não é possível formar uma sequência. De fato, $(n-1)$ deve ficar na segunda posição. Mas então o único número que pode ficar ao lado de n é $(n-2)$, enquanto n possui 2 vizinhos.

Após essa análise, chegamos na seguinte relação:

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-3} + 1, \text{ válida para } n \geq 4, \text{ e onde } p_1 = 1,\ p_2 = 1 \text{ e } p_3 = 2.$$

Estudaremos agora como formar sequências suaves de $(n+1)$ elementos a partir de sequências suaves de n elementos. Dada um sequência suave de n elementos, podemos formar sequências suaves de $(n+1)$ elementos adicionando o número $(n+1)$ em uma das três posições:

1) Entre n e $(n-1)$, quando eles estão juntos. Chamaremos portanto o número de sequências suaves de n elementos em que $(n-1)$ e n estão juntos de a_n.

2) Em uma extremidade, ao lado de um $(n-1)$. Então, denominaremos o número de sequências suaves em que $(n-1)$ está em uma extremidade por b_n.

3) Em uma extremidade, ao lado de um n. Para nós, o número de sequências suaves em que n está em uma extremidade será c_n.

Observe então que o número de sequências suaves de n elementos, que denotaremos por S_n, é tal que $S_{n+1} = a_n + b_n + c_n$. Segundo o processo de construção acima, podemos também encontrar relações para a_{n+1} e c_{n+1}:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + c_n \quad \text{para } n \geq 2 \quad (\text{I}) \\ c_{n+1} &= b_n + c_n \quad \text{para } n \geq 2 \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Mas devido à análise anterior sobre sequências suaves começadas por 1, podemos encontrar uma relação de recorrência para c_n. Para tal basta observarmos os seguintes fatos:

- O número de sequências suaves de n elementos começadas por 1 é o mesmo que o número de sequências suaves de n elementos começadas por n. Para ver isso, basta associar sequências da forma $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a sequências da forma $(n+1-x_1), (n+1-x_2), \ldots, (n+1-x_n)$.
- O número de sequências suaves de n elementos que começam com n é igual ao número daquelas que terminam com n. De fato, basta ver que se invertemos a ordem de uma sequência que começa com n, formamos uma que termina com n.

Daí, concluímos que $c_n = 2p_n$ e também que $p_n = p_{n-1} + p_{n-3} + 1 \Longrightarrow c_n = c_{n-1} + c_{n-3} + 2$, onde observamos que a recursão é válida para $n \geq 5$. Sendo assim, conseguimos através da recursão obter qualquer valor de c_n e portanto, se escrevermos S_n em função apenas de valores de c_i, poderemos calcular também os valores de S_n recursivamente. Vejamos:

De (I), obtemos $a_n = c_{n-1} + a_{n-1} = c_{n-1} + c_{n-2} + a_{n-2} = c_{n-1} + \ldots + c_2 + a_2$, onde $a_2 = 2$.

De (II), obtemos $b_n = c_{n+1} - c_n$.

Logo,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = a_n \quad + \ b_n \quad + c_n \quad &= \quad 2 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{n-1} + c_{n+1} \\
S_n \ = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \quad &= \quad 2 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{n-2} + c_n \\
\Longrightarrow \qquad S_{n+1} - S_n \quad &= \quad c_{n-1} - c_n + c_{n+1} \\
\Longrightarrow \qquad S_{n+1} \quad &= \quad S_n + c_{n+2} - c_n - 2
\end{aligned}$$

Com isso em mãos, podemos encontrar S_n para qualquer valor de n. Construimos abaixo uma tabela com os valores de c_n e S_n para valores pequenos de n:

n	c_n	$c_{n+2} - c_n - 2$	S_n
2	2	4	2
3	4	6	6
4	8	8	12
5	12	14	20
6	18	22	34
7	28	32	56
8	42	48	88
9	62	72	136
10	92	106	208
11	136	156	314
12	200	230	470
13	294	338	700
14	332	496	1038
15	534	728	1534

Em particular, o valor que procurávamos é $S_8 = 88$.