Gabarito da Prova do Nível II

Questão 1: resposta (a)

Justificativa: no primeiro corte obtemos 9 pedaços. Separa-se um dos pedaços e corta-se novemente, obtendo $8 + 9 = 17$ pedaços.

Repetimos a operação: separa-se um pedaço e corta-se novamente, obtendo-se $2 \times 8 + 9$ pedaços.

Prosseguindo dessa forma, obtém-se em cada etapa $8 \times n + 9$ pedaços em $n + 1$ operações de corte.

Portanto, para obtermos 2009 pedaços, é necessário calcular n de modo que $2009 = 8 \times n + 9$.

Ou seja $n = 250$, com o número de etapas igual a 251

Questão 2: resposta (a)

Justificativa: Basta contar os cubinhos situados nas extremidades de cada uma das faces (ou que contém uma aresta), excluindo os que contém 8 que contém os vértices do cubo: 12 +12+6+6=36

Questão 3: resposta (c)

Justificativa: Em 100 peças fabricadas 15 são consideradas defeituosas. Dessas 15 peças, 80% são descartadas. Istoé, $\frac{80}{100} \times 15 = 12$ peças.

Logo, em 100 peças, 12 peças defeituosas são descartadas, ou seja , 12%.

Questão 4: resposta (c)

Justificativa: Ao dividirmos 13 por 333 encontramos a seguinte dízima periódica composta: $\frac{13}{333} = 0,0393393939...$

Ou seja a parte periódica possui dois algarismos (período 2).

Portanto, para determinar o algarismo da 2009^a casa decimal de $\frac{13}{333}$, basta subtrair o número de algarismos da parte não periódica $2009 - 4 = 2005$ e verificar que,sendo um número ímpar então o algarismo que procuramos é igual a 3.

Questão 5: veja a Questão 14 do Nível I; resposta (c)

Questão 6: resposta (a)

Justificativa: Observe que podemos colocar a expressão em um denominador comum:

$$\frac{(2\times3\times4\times5\times6)\pm(3\times4\times5\times6)\pm(2\times4\times5\times6)\pm(2\times3\times5\times6)\pm(1\times2\times3\times4\times6)\pm(2\times3\times4\times5)}{(2\times3\times4\times5\times6)} = 0$$

Cada parcela do numerador é um múltiplo de 5 **exceto** a quinta. Portanto não há combinação de soma ou diferença das parcelas que anule o numerador.

Questão 7: resposta (a)

Justificativa: Sejam L o lado do quadrado original e l o lado do único quadrado da subdivisão que não é unitário. Então, comparando as áreas temos: $L^2 = 24 + l^2$. Observe que temos uma subdivisão (ladrilhamento) do quadrado maior por quadrados menores, portanto, os lados dos quadrados menores são paralelos aos lados do quadrado maior.

Portanto, pelo menos um dos lados do quadrado maior necessariamente fica subdividido em um número inteiro de quadrados unitários. Portanto L é um número inteiro positivo bem como. $L - l$. Logo, temos que l também é um número inteiro positivo.

A partir disso, vemos que $L^2 - l^2 = 24$. Fatorando $(L + l)(L - l) = 24 = 2^3 \times 3$.

Comparando os fatores, como $L + l > L - l$ temos as seguintes possibilidades:

L+l	L-l	L	l
24	1	$\frac{25}{2}$	$\frac{23}{2}$
12	2	7	5
8	3	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$
6	4	5	1

Como L e l são inteiros positivos, mas $l \neq 1$, resta apenas a opção $L = 7$ e $l = 5$.

Questão 8: resposta (c)

Justificativa: $a^3 - a^2 - 1 = 0$ implica $a^3 = a^2 + 1$

Portanto podemos escrever a expressão:

$$(a+\frac{1}{a})[a-(1-\frac{3}{a^2})] = (\frac{a^2+1}{a})[\frac{a^3-a^2+3}{a^2}]$$

Susbstituindo temos:

$$\frac{a^3}{a}[\frac{1+3}{a^2}] = 4$$

Questão 9: veja a Questão 7 do Nível I; resposta (a)

Questão 10: veja a Questão 13 do Nível I; resposta (a)

Questão 11: resposta (c)

Justificativa: Seja x a medida do segmento AX sobre o lado AB. Então $área(ACX) = \frac{bx}{2}$ e $área(XBD) = \frac{(a-x)b}{2}$

Logo

$$\frac{área(ACX)}{área(XBD)} = \frac{2}{3} = \frac{bx}{(a-x)b} = \frac{x}{a-x}$$

Ou seja $\frac{2}{3} = \frac{x}{a-x}$, o que nos dá a equação $2a - 2x = 3x$ cuja solução é $x = \frac{2a}{5}$.

Questão12: resposta (b)

Justificativa: Calculemos quantos são os números de quatro algarismos que possuem todos os algarismos pares$= 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$.

Quantos são os números de quatro algarismos? $9 \times 10 \times 10 = 9000$

Portanto existem $9000 - 500 = 8500$ números de quatro algarismos que possuem pelo meno um algarismo ímpar.

Questão 13: resposta (b)

Justificativa: usamos o fato de que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $180(n-2)$ graus.

Em hexágono regular todos os ângulos internos possuem a mesma medida igual a $\frac{(6-2)\times 180}{6} = 120$ graus.

O triângulo FAH é isósceles, portanto os ângulos da base possuem a mesma medida ou seja $A\hat{F}H = A\hat{H}F$.

Além disso, o ângulo $F\hat{A}H$ mede $360^o - 90^o - 120^o = 150^o$

Portanto, o ângulo $A\hat{F}H$ mede $\frac{180-150}{2} = 15$ graus.

Questão 14: resposta (d)

Justificativa: Calculemos a probabilidade de Samuel e Carlos ficarem **no mesmo grupo**:

O número de pares de bolas distintas é igual a 40×39.

Para Samuel e Carlos ficarem no mesmo é preciso que as cores sejam iguais. Mas o conjunto de pares de bolas de mesma cor (eventos favoráveis) possui $10(cores) \times 4(bolas) \times 3(bolas)$ elementos.

Logo a probabilidade dos dois jogadores ficarem no mesmo grupo é igual a $\frac{120}{1560} = \frac{1}{13}$

Portanto a probabilidade de Samuel e Carlos ficarem em grupos distintos é igual a $\frac{12}{13}$

Questão 15: resposta (a)

Justificativa: Afirmação: o triângulo da figura é formado por quatro triângulos equiláteros de lado igual a 1.

Portanto, sua área do triângulo da figura é igual a 4 vezes a área do triângulo equlátero de lado 1. A base é igual a 1 e usando-se o Teorema de Pitágoras, sua altura é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ou seja, a do triângulo equilátero de lado 1 é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Portanto, a área do triângulo da figura é igual a $\sqrt{3}$

Provemos agora a afirmação:

Denotemos por D, E e F os pontos sobre os lados AC, AB e CB, respectivamente.

É fácil ver que a figura é formada por quatro triângulos isósceles:

ADE, DFE,DCF e EFB, pois temos a seguinte igualdade:

$AE = AD = DF = FE = CF = FB = 1$

Assim, como os ângulos da base de um triângulo isósceles possuem a mesma medida,temos as seguintes igualdades:

$A\hat{E}D = A\hat{D}E$, $F\hat{E}D = F\hat{D}E$, $F\hat{E}B = F\hat{B}E$, $F\hat{C}D = F\hat{D}C$.

Além disso, segue do caso LLL que os triângulos ADE e DEF são congruentes, logo:

$A\hat{E}D = F\hat{E}D = F\hat{D}E = A\hat{D}E$.

Mas a medida de um ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes, logo:

$F\hat{D}C + F\hat{D}E = D\hat{A}E + A\hat{E}D$ e $B\hat{E}F + F\hat{E}D = E\hat{A}D + A\hat{D}E$

Usando as igualdades acima e fazendo os cancelamentos obtemos:

$F\hat{D}C = D\hat{A}E$ e $B\hat{E}F = E\hat{A}D$. Conclui-se desta forma que o tringulo ABC é equilátero pois seus ângulos são iguais:

$A\hat{C}B = D\hat{C}F = F\hat{D}C = F\hat{D}C = D\hat{A}E = E\hat{A}D = B\hat{E}F = E\hat{B}F = A\hat{B}C$

Assim sendo, vemos que todos os ângulos envolvidos na figura medem 60^o e portanto, todos os triângulos são equiláteros.