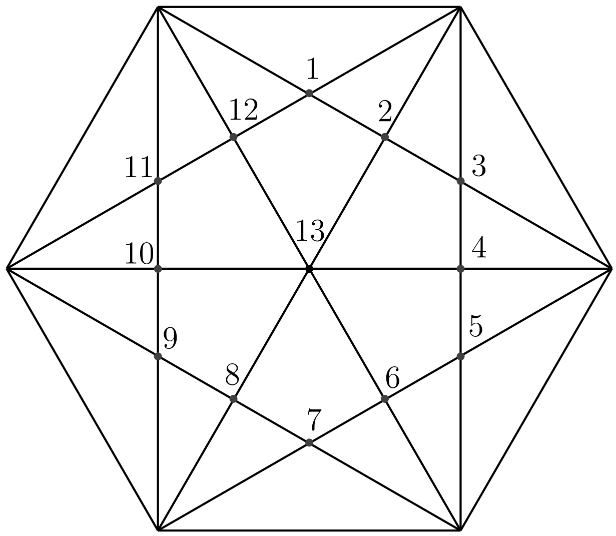
Gabarito - Nível III

Questão 1) Os cubinhos que possuem exatamente duas de suas faces pintadas de branco são aqueles que formam as arestas do cubo maior mas não são vértices dele. Como o cubo maior possui 12 arestas e cada aresta possui 3 cubinhos que têm duas faces pintadas de branco, temos que o número total de cubinhos com essa propriedade é igual a $12 \cdot 3 = 36$.

Alternativa: **A)**

Questão 2) Desenhando o hexágono e contando os pontos de interseção, chegamos que suas diagonais se intersectam em 13 pontos distintos.



Alternativa: **A)**

Questão 3) Vamos calcular inicialmente a coordenada x do ponto desejado. Para isso note que x é a soma de uma progressão geométrica infinita com termo inicial 1 e razão $-\left(\frac{9}{10}\right)^2$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^4 - ... \\
x &= \frac{1}{1 - \left(-\left(\frac{9}{10}\right)^2\right)} \\
x &= \frac{100}{181}
\end{aligned}
$$

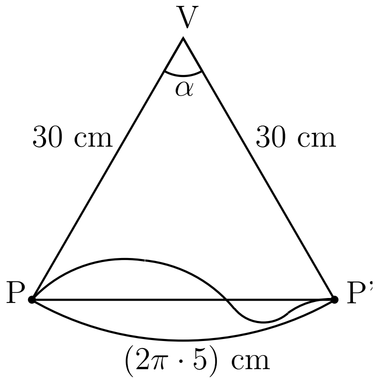
Para calcular y, notamos que y também pode ser calculado como a soma de uma progressão geométrica:

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\frac{9}{10}\right) - \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - ... \\
y &= \left(\frac{9}{10}\right)\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^4 - ...\right) \\
y &= \frac{9x}{10} \\
y &= \frac{10}{181}
\end{aligned}
$$

Sendo assim, o final da poligonal tende para o ponto $\left(\dfrac{100}{181}, \dfrac{90}{181}\right)$.

Alternativa: **D)**

Questão 4) Cortando o cone em sua geratriz que passa pelo ponto P e planificando-o, obtemos a seguinte figura:



A figura acima é um setor circular. Seu raio tem comprimento igual ao da geratriz, ou seja, 30 cm. O seu arco PVP' tem comprimento igual ao da circunferência da base do cone original. Como o raio da base do cone mede 5 cm, concluímos que $PVP' = (2\pi \cdot 5) = 10\pi$ cm. Sendo assim, o ângulo α é dado por $\dfrac{10\pi}{30} = \dfrac{\pi}{3} = 60°$.

Desenhamos na figura uma curva qualquer que contorna o cone. Observando a planificação, percebe-se que a curva que faz tal percurso por uma distância mínima é o segmento de reta que une P a P'. Como $\alpha = 60°$ e $VP = VP' = 30$ cm, concluímos que o triângulo PVP' é equilátero e portanto $PP' = 30$ cm.

Alternativa: **B)**

Questão 5) Seja L o lado do quadrado original e l o lado do único quadrado entre os 25 quadrados menores que não é unitário. Como a soma das áreas dos 25 quadradinhos é igual à área do quadrado original, temos que $L^2 = l^2 + 24 \Rightarrow L^2 - l^2 = 24 \Rightarrow (L+l)(L-l) = 24$. Observe que tanto L quanto l são necessariamente números inteiros positivos, pois de outra forma não seria possível construir um quadrado de lado L usando o quadrado de lado l e 24 quadrados unitários. Então, os números $L+l$ e $L-l$ são divisores de 24. Além disso, observe que $L+l > L-l$. Vejamos os possíveis valores para os dois:

$L+l$	$L-l$	L	l
24	1	$\frac{25}{2}$	$\frac{23}{2}$
12	2	7	5
8	3	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$
6	4	5	1

Como l deve ser inteiro e diferente de 1, concluímos que $l = 5$ e portanto $L = 7$.

Alternativa: **A)**

Questão 6) O total de números entre 100 e 500 é $500-100+1 = 401$. Vamos contar quantos deles não possuem nenhum algarismo 1. Considerando os números entre 100 e 499, concluímos que o algarismo das centenas pertence a $\{2,3,4\}$ e que os outros dois algarismos pertencem a $\{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Há portanto $3 \cdot 9^2 = 243$ números entre 100 e 499 que não possuem o algarismo 1. Como 500 também não possui um em sua representação, segue que há 244 números entre 100 e 500 não possuem nenhum algarismo 1.

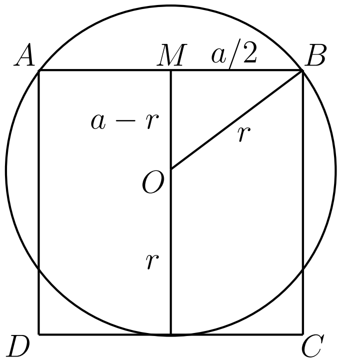
Agora, para descobrir quantos são os números do conjunto dado que possuem algum 1 em sua representação, basta subtrairmos 244 de 401, o que é igual a 157.

Alternativa: **B)**

Questão 7) Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer pertecente à parábola resultante da rotação. Então, o ponto $P' = (-x, -y)$, que é obtido girando-se o ponto P 180° em torno da origem, pertence à parábola $y = x^2 - 3x + 3$. Substituindo P' na equação da parábola, obtemos que $(-y) = (-x)^2 - 3(-x) + 3 \Rightarrow y = -x^2 - 3x - 3$.

Alternativa: **C)**

Questão 8) Seja M o ponto médio do segmento AB e O o centro do círculo que desejamos descobrir o raio.



Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo BMO, obtemos:

$$r^2 = (r - a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$r^2 = r^2 - 2ar + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$2ar = \frac{5a^2}{4}$$
$$r = \frac{5a}{8}$$

Alternativa: **D)**

Questão 9) Seja x o número de vezes que o preço de venda do produto foi aumentado de R$ 2,50 e $f(x)$ a função que representa o faturamento mensal da empresa. De acordo com o enunciado, temos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\text{Quantidade de produtos vendidos})(\text{Preço unitário}) \\ f(x) &= (1200 - 20x)(40 + \frac{5x}{2}) \\ f(x) &= (600 - 10x)(80 + 5x) \end{aligned}$$

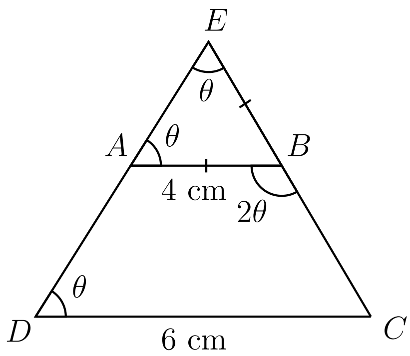
Observe que o coeficiente de x^2 é negativo, o que implica que a parábola tem concavidade voltada para baixo. Além disso, as raízes do polinômio $f(x)$ são 60 e -16. O valor máximo de f ocorre para o x do vértice, que é igual a $\dfrac{60+(-16)}{2} = 22$. Logo, o preço do produto que maximiza o faturamento é: $40 + \dfrac{5 \cdot 22}{2} = 95$ reais.

Alternativa: **A)**

Questão 10) Fatorando-se o número 29!, obtemos que ele possui 5^6 como divisor. Sendo assim, seus últimos 6 algarismos são zero e portanto $B = 0$. Notando agora que 29! é múltiplo de 9, segue a soma de todos os seus algarismos é também um múltiplo de 9. Como a soma de todos os algarismos que já conhecemos de 29! é 121 e 126 é múltiplo de 9, o valor de A só pode ser 5.

Alternativa: **C)**

Questão 11) Seja E o ponto de interseção entre os prolongamentos dos segmentos BC e DA. Como a figura original é um trapézio, temos que AB é paralelo a DC e portanto o ângulo $B\hat{A}E = \theta$ (pois é correspondente ao ângulo $C\hat{D}A$). Observe agora que $B\hat{A}E + A\hat{E}B = 2\theta$ (pois o ângulo de medida 2θ é externo ao triângulo ABE), o que implica que $A\hat{E}B = \theta$.



Como o triângulo ABE é isósceles, temos que $BE = AB = 4$ cm. O triângulo CDE também é isósceles, o que implica que $CE = DC = 6$ cm. Sendo assim, o segmento BC tem medida igual a $CE - BE = 6 - 4 = 2$ cm.

Alternativa: **D)**

Questão 12) Observe que o número de maneiras de Bernardo e Carlos estarem atrás de Alberto e na frente de Daniel, com Bernardo na frente de Carlos, é o mesmo do que o número de maneiras de isso acontecer com Carlos na frente de Bernardo. De fato, para qualquer posição relativa entre os quatro, o número de maneiras de se formar uma fila de 10 pessoas é igual.

Há $4! = 24$ posições relativas diferentes no total. O número total de filas, sem qualquer restrição, que podem ser feitas é 10!. Sendo assim, o número de maneiras de se formar filas diferentes para uma dada posição relativa é $\dfrac{10!}{24}$. Como o enunciado permite apenas duas posições relativas entre Alberto, Bernardo, Carlos e Daniel, o número de maneiras é dado por:

$$2 \cdot \frac{10!}{24} = \frac{10!}{12}$$

Alternativa: **C)**

Questão 13) Sejam x e y números reais positivos. Como $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ para quaisquer valores das duas variáveis, temos que $\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{xy} + \left(\sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Aplicando essa desigualdade aos pares de números (a, b), (b, c) e (c, a) e multiplicando as três desigualdades encontradas, obtemos:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq \sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}$$
$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2} = abc = 1$$
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8$$

Alternativa: **A)**

Questão 14) Se $\dfrac{30-n}{3n+1}$ é um número inteiro, então ele vezes três também é. Então:

$$\frac{3(30-n)}{3n+1} = \frac{90-3n+1-1}{3n+1} = \frac{91}{3n+1} - 1 \in \mathbb{Z}$$

Logo, $3n+1$ deve ser um divisor de 91. Fatorando-se 91, obtemos que $91 = 7 \cdot 13$ e portanto $3n+1$ pode ser 7, 13 ou 91 (se $3n+1$ fosse igual a 1, n seria 0, contradizendo o enunciado). Sendo assim, n pode ser 2, 4 ou 30.

Alternativa: **C)**

Questão 15) Sabemos que a, b e c são inteiros positivos distintos. Considerando $a < b < c$, temos que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$. Utilizando essa última desigualdade e a expressão dada, segue que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ \Rightarrow \frac{3}{a} > 1 \ \Rightarrow a < 3$$

Observe que a não pode ser 1, pois senão a soma dos inversos de a, b e c seria maior do que 1. Logo, o único valor possível para a é 2. Substituindo o valor de a na igualdade e utilizando um raciocínio análogo para b:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} > \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ \Rightarrow \frac{2}{b} > \frac{1}{2} \ \Rightarrow b < 4$$

Como b é maior do que a e menor do que 4, concluímos que $b = 3$. Então:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} = 1 \ \Rightarrow c = 6$$

Sendo assim o valor da soma é $a + b + c = 2 + 3 + 6 = 11$.

Alternativa: **B)**