

GABARITO DA PROVA DA OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2005

Nível I

1) b 2) b 3) b 4) d 5) d 6) c 7) d 8) c 9) c 10) d

Problema 1

Solução:

Sejam a o número de questões que Mário errou e b o número de questões que ele deixou em branco. Como o número máximo de pontos que alguém pode obter nessa prova é de 150 (acertando todas as questões), podemos concluir faltaram 58 pontos para Mário (perdeu e/ou deixou de ganhar). A cada questão em branco Mário deixa de ganhar 5 pontos e para cada errada ele deixa de ganhar 5 e perde 2 pontos. Portanto temos:

$$58 = 5b + 7a \quad (1)$$

$$58 - 7a = 5b \quad (2)$$

$$b = \frac{58 - 7a}{5}$$

Como b é um número natural, segue que $58 - 7a$ é divisível por 5. Nesse caso o único valor possível para a é $a = 4$ e, portanto $b = 6$. Logo, Mário deixou em branco 6 questões.

- Montar as equações (1) e (2) (0,8 ponto)
- Encontrar $a = 4$ (0,6 ponto)
- Encontrar $b = 6$ (0,6 ponto)

Problema 2

Solução:

Queremos que a soma dos pontos nas faces do cubo seja menor possível. Portanto devemos colocar nas faces os menores valores dos dados. Observe que num dado os números 1, 2 e 3 nunca estão em faces opostas e, portanto, as faces que contém esses números compartilham um mesmo vértice. Assim podemos colocar os dados dos vértices do cubo de forma que eles mostrem as faces 1, 2 e 3. Como temos 8 vértices e a soma dos vértices é $1 + 2 + 3 = 6$, temos $8 \cdot 6 = 48$ pontos.

Da mesma forma com os dados que estão no centro da aresta. Como eles mostram duas faces, podemos fazer com que elas sejam as faces 1 e 2. Como temos 12 arestas e a soma dos centros das arestas (observe que os outros 2 dados da aresta já foram contados) é $1 + 2 = 3$, temos $12 \cdot 3 = 36$. E os dados que estão no centro das faces mostram apenas uma face que podemos fazer com que seja a 1. Como são 6 faces, temos $6 \cdot 1 = 6$.

Somando os 3 resultados encontrados temos: $48 + 36 + 6 = 90$.

- Encontrar a soma dos dados dos vértices igual a 48 pontos (0,8 ponto)
- Encontrar a soma dos dados do centro das arestas igual a 36 pontos (0,8 ponto)
- Encontrar a soma dos dados do centro das faces igual a 6 pontos (0,4 ponto)

Problema 3

Solução:

Se o número do topo é 44, então, $E = 29$, pois, $E + 15 = 44$. Observe que: $O + U = I$ e $C + O = A$. Logo, I é primo e A é ímpar. Como $A + I = 29$, I deve ser par. Logo, $I = 2$. Daí, é fácil ver que $A = 27$, $H = 13$, $U = 1$, $O = 1$ e $C = 26$.

- Encontrar I (1 ponto)
- Encontrar A (0,5 ponto)