GABARITO DA OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2006
Nível I

TESTES

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	b	b	c	d	c	a	d	b	b

Cada teste vale 0,4 ponto.

PROBLEMAS

1. a) Se a cidade produz 318 toneladas em um dia, em 7 dias produzirá $7 \times 318 = 2226$ toneladas.

   b) A cada viagem um caminhão transporta de 2 a 3 toneladas. Para se ter certeza de que o lixo semanal será recolhido, temos que considerar a pior hipótese: todas as viagens levarão 2 toneladas. Assim: $2226 \div 2 =$ 1113 viagens.

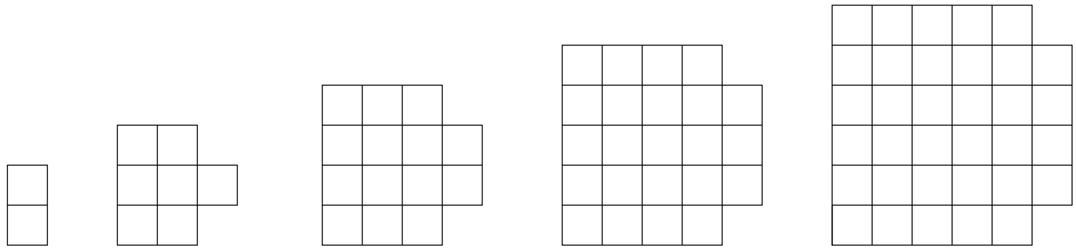
   c) Cada caminhão faz 12 viagens por dia, 3 dias por semana. Então, cada caminhão faz $3 \times 12 = 36$ viagens por semana. Como queremos saber o número mínimo de caminhões necessário, devemos agora considerar a melhor hipótese, em que cada caminhão transportára 3 toneladas. O número mínimo de caminhões que a prefeitura deve ter pode então ser calculado:

   2226 toneladas por semana $\div$ 3 toneladas por viagem $=$ 742 viagens. 742 viagens $\div$ 36 viagens por caminhão $=$ 20 caminhões, mas esta conta tem resto 22.

   A prefeitura precisa, portanto, de 20 caminhões realizando 36 viagens e 1 fazendo 22 necessitando, no mínimo de 21 caminhões.

   - Item a) (0,5 ponto)
   - Item b) (0,5 ponto)
   - Item c) (1 ponto)

2. a)



1ª figura | 2ª figura | 3ª figuna | 4ª figuna | 5ª figuna

b) A 2ª figura possui 3 linhas e 3 colunas, sendo a terceira coluna com dois quadradinhos a menos, totalizando $3 \times 3 - 2 = 7$ quadradinhos. A 3ª possui 4 linhas, 4 colunas e $4 \times 4 - 2 = 14$ quadradinhos. Seguindo esse padrão, a figura n terá $n + 1$ linhas, $n + 1$ colunas e $(n + 1) \times (n + 1) - 2$ quadrados. Assim, a figura 2006 ficará com: $(2006 + 1) \times (2006 + 1) - 2 = 2007^2 - 2 = 4028047$ quadrados.

Obs.: Não é necessário efetuar $2007^2 - 2$

c) Para o ítem c) temos duas opções de resolução:

1ª opção

Teremos que verificar se existe um n inteiro que satisfaça $(n+1)^2 - 2 = 300$.

$(n + 1)^2 = 298$
$(n + 1)^2 = 2 \times 149$

O número 298 não é quadrado perfeito. Então, não existe n inteiro que satisfaça $(n + 1)^2 = 2 \times 149$. Portanto, não existe figura que obedeça o padrão com 300 quadradinhos.

2ª opção

Considerando os quadrados de números inteiros menos dois, mais próximos de 300, temos:

$17^2 - 2 = 287$ quadradinhos ou

$18^2 - 2 = 322$ quadradinhos,

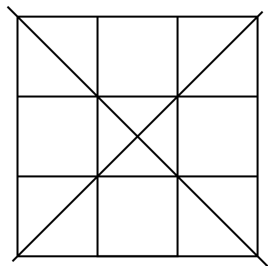
ou seja, não existe número inteiro X que satisfaça $X^2 - 2 = 300$.

- Item a) (0,2 ponto)
- Encontrar o padrão das figuras no item b) (0,6 ponto)
- Encontrar o número de quadrados da figura 2006 no item b) (0,2

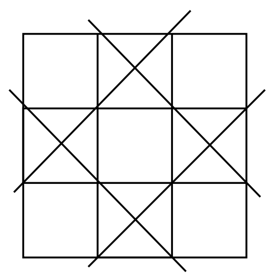
ponto)

- Item c) (1 ponto)

3. Consideraremos duas interpretações do enunciado. Na primeira consideramos que cada cor não pode se repetir na linha, coluna ou nas diagonais principais. Representamos abaixo as diagonais consideradas:

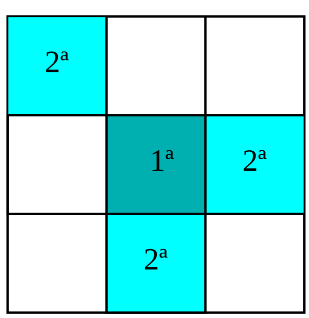


Na segunda solução são consideradas, além das diagonais principais, as seguintes diagonais:



1ª solução:

A cor da casa central (1ª cor na figura abaixo) não pode ser repetida em nenhuma outra casa, pois linhas, colunas ou diagonais, não podem ter mesmas cores. Para incluir a segunda cor no maior número de casas possível, podemos começar pintando uma casa de esquina ou uma casa "não-esquina". De qualquer modo que começamos, a conclusão é que se pode ter (no máximo) três casas com a mesma cor da seguinte forma:



depois colocamos a 3ª cor, pensando do mesmo modo como colocamos a 2ª:

2ª	3ª	
3ª	1ª	2ª
	2ª	3ª

Observe que não é possível preencher com 4 cores, pois a 4ª cor se repetiria nas duas esquinas não preenchidas. Portanto, resta-nos preencher com duas outras cores diferentes:

2ª	3ª	4ª
3ª	1ª	2ª
5ª	2ª	3ª

Nesta solução, outras disposições de cores são possíveis e serão aceitas.

2ª solução:

Começamos pintando a casa central com a primeira cor, que, como já vimos na 1ª solução, não pode ser repetida em nenhuma outra casa. Além disso, não é possível colorir três casas com a mesma cor, porque a 3ª casa necessariamente estará na mesma linha, coluna ou diagonal. As cores subseqüentes só podem ser usadas em no máximo duas casas.

2ª	3ª	4ª
5ª	1ª	2ª
3ª	4ª	5ª

Não é possível colorir com apenas 4 cores, pois só se pode repetir uma cor em apenas duas casas. O mínimo de cores é, portanto, 5. Neste caso só é possível esta disposição de cores, a menos de simetrias. Chega-se à esta disposição observando que para pintar a próxima cor, deve-se começar por uma esquina ou uma “não-esquina”, depois concluindo que tanto faz onde se começa, pois cada cor fora da casa central estará exatamente numa esquina e numa ”não-esquina”.

- Mostrar uma configuração com 5 cores. (1 ponto)
- Mostrar que não é possível colorir com 4 cores. (1 ponto)