

GABARITO DA PROVA DA OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2005

Nível II

Testes:

1) b 2) c 3) a 4) a 5) b 6) c 7) b 8) d 9) b 10) a

Problema 1

Solução:

Para que um número não seja primo, ele deve ser o produto de no mínimo dois primos (que podem ser iguais), mas como o menor produto de primos que não envolve 2, 3, 5 ou 7 é $11^2 = 121$, que é maior do que 100, temos que os números da forma procurada são todos primos.

- Explicar que um número não-primo pode sempre ser fatorado em dois ou mais primos (iguais ou não) (1 ponto)
- Mostrar que o menor número não-primo sem os fatores 2, 3, 5 e 7 é $11^2 = 121$ (0,8 ponto)
- Usar o fato acima para chegar à conclusão do problema (0,2 ponto)

Problema 2

Solução:

Pela opção (a), João percorre $15km$ com uma velocidade de $30km/h$ e mais $15km$ com a velocidade de $60km/h$. Ou seja, o tempo decorrente da escolha da primeira opção é:

$$t_1 = \frac{15}{30} + \frac{15}{60} = \frac{3}{4}, \text{ o que dá três quartos de hora, ou 45 minutos.}$$

Seguindo o trajeto (b), João deve esperar 5 minutos, ou um doze avos de hora, e depois percorrer $30km$ a $40km/h$.

$$t_2 = \frac{1}{12} + \frac{30}{40} = \frac{10}{12}, \text{ o que dá 50 minutos. A trajetória (a) é portanto mais rápida do que a (b)}$$

- Descobrir o tempo da trajetória (a) (1 ponto)
- Descobrir o tempo da trajetória (b) (1 ponto)

Problema 3

Solução:

No primeiro segundo a única ameba se divide em 7. No segundo todas se dividem alcançando 49. E no terceiro segundo, novamente, todas se dividem em 343. No próximo segundo, se todas se dividessem alcançariam 2401 amebas e seriam necessários mais 396 segundos para que o número de amebas fosse igual a 2005. Conclui-se, então, que somente uma parte das 343 amebas devem se dividir e as outras não. Chamando de x o número de amebas que devem se dividir no próximo segundo, x deve satisfazer $343 - x + 7 \cdot x = 2005$, e assim $x = 277$. Ou seja, se o número de amebas que se dividirem for 277 no próximo segundo haverá exatamente 2005 amebas dentro do tubo. Portanto, o tempo mínimo necessário para atingirmos 2005 amebas é $1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

- Chegar a 343 em 3 segundos (0,5 ponto)
- Argumentar que será 4 segundos determinando que o número de amebas que se dividirá no último segundo é 277 (1,5 ponto) e, se apenas argumentar que o tempo mínimo procurado é 4 segundos, a partir do 343 encontrado no terceiro segundo (0,3 ponto).