

GABARITO DA OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2006

Nível II

TESTES

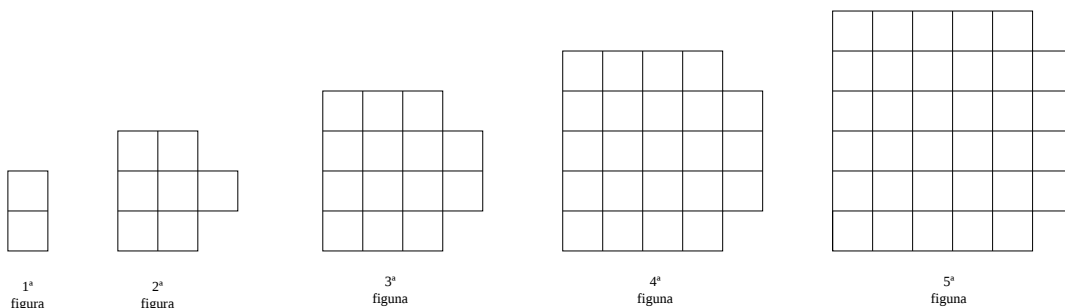
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	b/d*	a	b	c	c	d	d	a	a

Cada teste vale 0,4 ponto

*A questão 2 foi redigida com duas respostas corretas, considerem qualquer uma das duas.

PROBLEMAS

1. a)



b) A 2ª figura possui 3 linhas e 3 colunas, sendo a terceira coluna com dois quadradinhos a menos, totalizando $3 \times 3 - 2 = 7$ quadradinhos. A 3ª possui 4 linhas, 4 colunas e $4 \times 4 - 2 = 14$ quadradinhos. Seguindo esse padrão, a figura n terá $n+1$ linhas, $n+1$ colunas e $(n+1) \times (n+1) - 2$ quadrados. Assim, a figura 2006 ficará com: $(2006 + 1) \times (2006 + 1) - 2 = 2007^2 - 2 = 4028047$ quadrados.

Obs.: Não é necessário efetuar $2007^2 - 2$

c) Para o item c) temos duas opções de resolução:

1ª opção

Teremos que verificar se existe um n inteiro que satisfaça $(n + 1)^2 - 2 = 300$.

$$(n + 1)^2 = 298$$

$$(n + 1)^2 = 2 \times 149$$

O número 298 não é quadrado perfeito. Então, não existe n inteiro que satisfaça $(n + 1)^2 = 2 \times 149$. Portanto, não existe figura que obedeça o padrão com 300 quadradinhos.

2ª opção

Considerando os quadrados de números inteiros menos dois, mais próximos de 300, temos:

$$17^2 - 2 = 287 \text{ quadradinhos ou}$$

$$18^2 - 2 = 322 \text{ quadradinhos,}$$

ou seja, não existe número inteiro X que satisfaça $X^2 - 2 = 300$.

- Item a) (0,2 ponto)
- Encontrar o padrão das figuras no item b) (0,6 ponto)
- Encontrar o número de quadrados da figura 2006 no item b) (0,2 ponto)
- Item c) (1 ponto)

2. 1ª parte da solução

Considerando os triângulos ABC e ADC, temos, pela desigualdade triangular, que (sendo p o perímetro):

$$AC < AB + BC \text{ (I)}$$

$$AC < AD + DC \text{ (II)}$$

somando (I) e (II) :

$$2AC < AB + BC + AD + DC. \text{ Como foi dado que } AC = 6, \text{ segue portanto}$$

$$\Rightarrow 2 \times 6 < AB + BC + AD + DC = p$$

$$\Rightarrow 12 < p.$$

2ª parte da solução

Para 2ª parte da solução, temos duas opções de resolução:

1ª opção:

Divide-se as diagonais do quadrilátero como na figura abaixo:

Então, também pela desigualdade triangular, temos que:

$$y + z > a \quad (\text{I})$$

$$x + y > d \quad (\text{II})$$

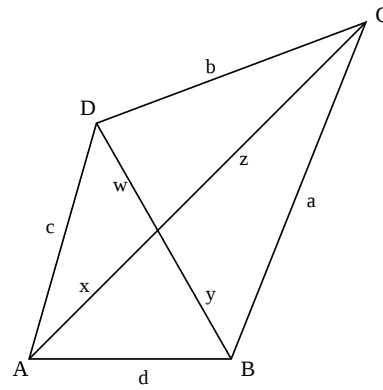
$$x + w > c \quad (\text{III})$$

$$w + z > b \quad (\text{IV}).$$

Somando (I) + (II) + (III) + (IV), temos:

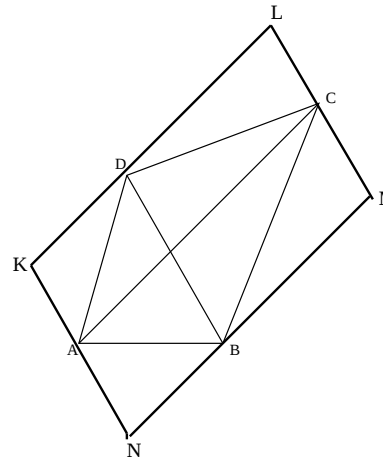
$$\underbrace{a + b + c + d}_p < 2 \cdot (\underbrace{x + z}_6 + \underbrace{y + w}_5)$$

$$p < 22$$



2ª opção:

Montando um paralelogramo KLMN, exterior ao quadrilátero ABCD dado, de lados paralelos às diagonais AC e DB e de modo que A, B, C e D fiquem nos lados KN, NK, ML e LK, respectivamente. Temos que o perímetro de KLMN é $2AC + 2BD = 22m$. Como ABCD é interior a KLMN, temos que seu perímetro é obrigatoriamente menor que $22m$.



- Montar o 1º sistema de desigualdades (0,4 ponto) (0,2 ponto para cada inequação).
- Resolver o 1º sistema de desigualdades e concluir que $p > 12$ (0,4 ponto)

Para 1ª opção de resolução da 2ª parte:

- Montar o segundo sistema (1,0 ponto)
- Resolver o 2º sistema e concluir que $p < 22$ (0,2 ponto)

Para 2ª opção de resolução da 2ª parte:

- Montar a figura de um quadrilátero KLMN (1 ponto)
- Concluir que $p < 22$ (0,2 ponto)

3. a) Para letra a, temos várias formas de resolução, abaixo seguem dois exemplos, mas qualquer outra maneira resolução pertinente deve ser considerada.
1º exemplo:

Podemos separar os números em duplas da seguinte forma: o primeiro com o último, o segundo com o penúltimo e assim por diante. Então:

$$(1 \quad 33) \quad (3 \quad 30) \quad (6 \quad 27) \quad (9 \quad 24) \quad (12 \quad 21) \quad (15 \quad 18)$$

A soma de cada dupla é igual a 33, com exceção da primeira, que é 34. Se colocarmos os sinais + e - alternados a soma das duplas duas a duas será zero, exceto o primeiro com o segundo que será 1.

$$(1 + 33) - (3 + 30) + (6 + 27) - (9 + 24) + (12 + 21) - (15 + 18) =$$

$$(34) - (33) + (33) - (33) + (33) - (33) =$$

$$1 + 0 + 0 = 1$$

2º exemplo:

Colocando os sinais + e - alternados e separando os números positivos e negativos, teremos:

$$1 - 3 + 6 - 9 + 12 - 15 + 18 - 21 + 24 - 27 + 30 - 33$$

$$(1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30) + (-3 - 9 - 15 - 21 - 27 - 33)$$

$$91 - 108 = -17$$

Se passarmos o algarismo 9 do conjunto negativo para o conjunto positivo, teremos:

$$(1 + 6 + 9 + 12 + 18 + 24 + 30) + (-3 - 15 - 21 - 27 - 33)$$

$$100 - 99 = 1$$

b) Não. Observe que a soma de um número par com outro par resulta em par, um número ímpar com ímpar resulta em par e um par com ímpar em um ímpar. Como na sequência são sete números ímpares e seis pares, então, a soma de todos os números da sequência resulta em um número ímpar independente da forma de como os sinais são dispostos.

- item a) (1 ponto)
- item b) (1 ponto)