

GABARITO DA PROVA DA OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA
Nível III

Testes:

- 1) a 2) c 3) c 4) a 5) d 6) c 7) b 8) b 9) a 10) b

Problema 1

Solução:

a) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5}) \cdots (1 - \frac{1}{100}) = (\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{3}{4})(\frac{4}{5}) \cdots (\frac{99}{100}) = \frac{1}{100}$

b) Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, temos $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{5^2}) \cdots (1 - \frac{1}{2005^2}) =$
 $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{5}) \cdots (1 + \frac{1}{2005}) \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5}) \cdots (1 - \frac{1}{2005}) =$
 $(\frac{3}{2})(\frac{4}{3})(\frac{5}{4})(\frac{6}{5}) \cdots (\frac{2006}{2005}) \cdot \frac{1}{2005} = \frac{2006}{2} \cdot \frac{1}{2005} = \frac{1003}{2005}$

- Chegar à resposta correta da letra a (0,8 ponto)
- Usar a identidade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ na letra b do exercício. (0,8 ponto)
- Chegar à solução correta da letra b (0,6 pontos)

Problema 2

Solução:

Seja O o ponto de onde se encontram os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$. O triângulo $\triangle BCD$ é isóceles e portanto sua altura $\overline{OC}$ intercepta o lado $\overline{BD}$ dividindo-o em duas partes iguais de 60 m. Pelo teorema de Pitágoras, temos que a altura do triângulo $\triangle BCD$ é $h_1^2 = 100^2 - 60^2$ e portanto $h_1 = 80$ m. Por equivalência entre os ângulos retos e lados $\triangle DCO = \triangle BCO = \triangle DEO = \triangle BEO$. Traçando o segmento $\overline{BE}$ e usando o teorema de Pitágoras novamente, obtemos $\overline{BE} = 100$ m. A altura do triângulo $\triangle ABE$ corta o lado $\overline{BE}$ em duas partes de 50 m cada, também por ser este um triângulo isóceles. Usando o teorema de Pitágoras por mais uma vez, temos $h_2^2 = 130^2 - 50^2$. As áreas de cada triângulo podem ser calculadas e consequentemente: $A = 2 \cdot 60 \text{ m} \cdot 80 \text{ m} + 50 \text{ m} \cdot 120 \text{ m} = 15600 \text{ m}^2$

- Mostrar que $\overline{CO}$ é a mediana do lado $\overline{BD}$ (0,5 ponto)
- Mostrar que os triângulos $\triangle DCO$, $\triangle BCO$, $\triangle DEO$ e $\triangle BEO$ são equivalentes (0,5 ponto)
- Calcular as alturas dos triângulos $\triangle CDB$ e $\triangle DEB$ pelo teorema de Pitágoras (0,5 ponto)
- Descobrir a altura do triângulo $\triangle ABE$ (0,3 ponto)
- Achar a área total correta. (0,2 ponto)

Problema 3

Solução:

(a) Como M acompanha S, se S dá 30 voltas em torno de T, M também dá 30 voltas.

(b) Para S dar 30 voltas em torno de T foram gastas 10 horas. Nesse mesmo tempo, M dá 50 voltas em torno de S.

(c) Se M dá 5 voltas por hora em torno de S sendo que uma volta equivale a 360° e uma hora a 60 minutos, ele anda 30° a cada minuto. Em 22 minutos ele percorre 660° . Dando uma volta completa e parando a 60° do ponto sobre a reta que liga S e T (ver figura ao lado). Como $\overline{ST}$ é igual a 3 cm, $\overline{SM}$ igual a 1 e $\angle MST$ é igual a 60° a distância entre M e T é igual $\sqrt{7}$ (definição de seno e teorema de Pitágoras).

- Fazer a letra (a) (0,2 ponto)
- Fazer a letra (b) (0,3 ponto)
- Letra (c): perceber que a posição de M em relação ao segmento que liga S a T não depende da posição de S em relação a T: 0,3 ponto; determinar a posição correta de M em relação a esse segmento: 0,4 ponto; calcular a altura do triângulo $\triangle MST$ em relação à base $\overline{ST}$: 0,4 ponto e, calcular a distância procurada: 0,4 ponto.

