GABARITO DA OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2006
Nível III

TESTES

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	a	b	c	a	c	a	b	c

Cada teste vale 0,4 ponto.

PROBLEMAS

1. a) Considerando o triângulo APB temos,
$AP^2 + PB^2 = AB^2$
$AP^2 = AB^2 - PB^2$, como $AB = 10cm$ e $PB = 6cm$ então,
$AP^2 = 10^2 - 6^2 \implies AP = \sqrt{64} \implies AP = 8cm$

b)A área do triângulo ABC, com base BC é,

$\dfrac{BC.AP}{2} = 48$ para obter RB calculamos a área do $\triangle ABC$ com base em AC

$\dfrac{AC.RB}{2} = 48$ como $AC = 10cm \implies RB = 9,6cm$

c) No $\triangle BCR$ temos,

$RC^2 + RB^2 = CB^2$, como $BC = 12cm$ e $RB = 9,6cm$ então,

$RC = \sqrt{12^2 - 9,6^2} \implies RC = 7,2cm$

$AC = AR + RC \implies AR = 2,8cm$

Seja $AP \cap RQ = F$ temos que o $\triangle AFR \equiv \triangle ACP$

$\dfrac{AR}{AC} = \dfrac{AF}{AP} \implies \dfrac{2,8}{10} = \dfrac{AF}{8} \implies AF = 2,24cm$

$AP = AF + FP \implies FP = 5,76cm$

como $\triangle AFR \equiv \triangle ACP$

$\dfrac{AF}{AP} = \dfrac{RQ}{12}, \implies \dfrac{2,24}{8} = \dfrac{RQ}{12} \implies RQ = 3,36cm$

a área do $\triangle RQP = \dfrac{RQ.FP}{2}$

$\triangle RQP = 9,68cm^2$

- Item a) Aplicar pitágoras no triângulo RBC e achar RC (0,2 ponto).
- Item b) (0,8 ponto).

- Item c) Fazer a semelhança de triangulos entre $\triangle\ ARO$ e o $\triangle\ ACP$ (0,3 ponto).
  Achar OA (0,3 ponto).
  Concluir a área (0,4 ponto).

2. a)Como uma progressão aritmética de segunda ordem é tal que a diferença de termos sucessivos é uma progressão aritmética,temos que a diferença dos termos da sequência dada é
   $2, 5, 8, 11, 14$. Esta é uma progressão aritmética de razão 3, portanto a seqência $4, 6, 11, 19, 30, 44$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.

   b)$4, 6, 11, 19, 30, 44, 61, 81, 104, 130$. O décimo termo da progressão é 130.

   c)Vamos chamar de $a_1, a_2, a_3, ...$ a progressão aritmética de $2^{\underline{a}}$ ordem, e de $b_1, b_2, b_3, ...$ a progressão aritmética formada pela diferença dos termos da primeira progressão.Desta forma temos que

   $1^{\underline{a}}: \ a_2 - a_1 = b_1$

   $2^{\underline{a}}: \ a_3 - a_2 = b_2 \quad \text{como} \quad b_2 = b_1 + r \quad \text{então} \quad a_3 - a_2 = b_1 + r$

   $3^{\underline{a}}: \ a_4 - a_3 = b_3 \quad \text{como} \quad b_3 = b_2 + r \quad \text{então} \quad a_4 - a_3 = b_1 + 2r$

   $4^{\underline{a}}: \ a_5 - a_4 = b_4 \quad \text{como} \quad b_4 = b_3 + r \quad \text{então} \quad a_5 - a_4 = b_1 + 3r$

   generalizando temos:

   $n^{\underline{a}}: \ a_{n+1} - a_n = b_1 + (n-1)r$

   somando-se a $1^{\underline{a}}$ igualdade com a $2^{\underline{a}}$, temos

   $a_2 - a_1 + a_3 - a_2 = b_1 + b_2 \quad \Rightarrow a_3 - a_1 = b_1 + b_2$

   a partir daí somamos o resultado à $3^{\underline{a}}$ igualdade, temos

   $a_3 - a_1 + a_4 - a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \quad \Rightarrow a_4 - a_1 = b_1 + b_2 + b_3$

   fazendo assim até a última igualdade, temos:

   $a_{n+1} - a_1 = nb_1 + r[1 + 2 + \cdots + (n-1)]$

   $a_{n+1} - a_1 = nb_1 + r\dfrac{n(n-1)}{2}$

   $a_{n+1} = \dfrac{n.(n-1)}{2}.r + nb_1 + a_1$

   $a_{n+1} = \dfrac{r}{2}.n^2 - \dfrac{r}{2}.n + nb_1 + a_1$

   $a_{n+1} = \dfrac{r}{2}.n^2 + (b_1 - \dfrac{r}{2}).n + a_1$

   Agora podemos nomear os termos da seguinte forma: $a = \dfrac{r}{2}$, $\quad b = b_1 - \dfrac{r}{2}$ e $\quad c = a_1$
   Assim, temos:

   $a_{n+1} = an^2 + bn + c$, onde a, b e c são constantes

   - Item a) (0,6 ponto).

- Item b) (0,4 ponto).
- Item c) (1,0 ponto).

3. A estratégia a ser usada para se ganhar este jogo é a seguinte:
   Tire primeiro 2 palitos. Depois que o adversário jogar, tire um número de palitos, tal que a soma da jogada dele e a sua dê 6. Dessa forma, o número de palitos retirados depois das suas jogadas é sempre um número que deixa resto 2 quando dividido por 6. Quando estiverem terminando os palitos, depois da sua penúltima jogada, terão sido retirados 2000 palitos restando apenas 6. Como o seu adversário poderá retirar no máximo 5 palitos sua vitória está garantida.
   Para se chegar ao número de palitos da primeira jogada, ou seja, 2, basta fazer a divisão de 2006 por 6 e observar o resto, que é 2.

   - (2,0 pontos)