

GABARITO DA PROVA DA OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA Nível I

Testes: Cada teste correto 0,4 pontos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	a	c	a	d	a	c	d	b

A NOTA DADA NO PROBLEMA NÃO PODE ULTRAPASSAR 2 PONTOS; SE O ALUNO UTILIZAR AS DUAS FORMAS DE RESOLUÇÃO, PREVALECE A QUE OBTIVER MAIS PONTOS E A PONTUAÇÃO DA OUTRA TENTATIVA É DESCARTADA. QUALQUER OUTRA RESPOSTA, MATEMATICAMENTE CORRETA E QUE NÃO APARECE AQUI, DEVE SER CONSIDERADA ADAPTANDO O GABARITO RELATIVO AO PROBLEMA

Problema 1

Para formar uma sequência de números, as regras são:

- Se o número é par, o próximo é a sua metade
- Se o número é ímpar, o próximo é a soma de seu triplo com uma unidade.

Por exemplo, começando com o 7, os cinco primeiros termos serão: 7, 22, 11, 34, 17, ...

Para essa sequência começando com o 7, calcule o 2004º termo.

Solução: Montagem da sequência. O aluno deverá montar a sequência e descobrir que a partir do 14º termo da sequência, ela começa a se comportar de maneira periódica. Assim:

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, | 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Como a seqüência começa a ser periódica a partir do 14º termo, é conveniente analisá-la a partir desse termo. Ou seja, queremos, agora, calcular não mais o 2004º termo e, sim, o termo 1990º ($2004^\circ - 14^\circ$). Como a cada três números a seqüência se repete, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1... para calcular o 1990º termo é necessário apenas dividir esse número por três. Fazendo a divisão, encontramos resto 1, portanto, o termo 2004º é igual a 4.

- Montagem correta da seqüência (0,5 ponto)
- Citar que a partir do 14º termo a seqüência é periódica com período igual a 3 (0,5 ponto)
- Identificar que a seqüência periódica tem 1990 termos (0,5 ponto)
- Concluir e obter a resposta para o problema (0,5 ponto)

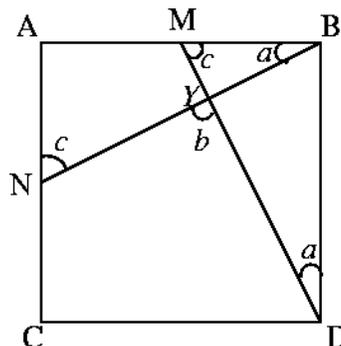
Problema 2

Num quadrado $ABCD$, M é o ponto médio do lado AB e N o ponto médio do lado AD . Os segmentos CM e BN se encontram em Y . Calcule \widehat{CYN} .

Solução:

Vamos chamar o ângulo \widehat{CYN} de b . Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , temos que $a + c = 90^\circ$ (ver desenho). Por simetria podemos perceber que o ângulo $\widehat{BMC} = c$ e que $\widehat{BYM} = 180^\circ - (a + c) = 90^\circ$

O ângulo b é oposto pelo vértice ao ângulo \widehat{BYM} e, portanto, também vale 90° .



- Mostrar que $a + c = 90^\circ$ (0,5 ponto)
- Mostrar que por simetria $\widehat{BMC} = c$ (0,5 ponto)
- Mostrar que $\widehat{BYM} = 180^\circ - (a + c) = 90^\circ$ (0,5 ponto)
- Chegar à solução correta mostrando que O ângulo b é oposto pelo vértice ao ângulo \widehat{BYM} (0,5 ponto)

Problema 3

Uma mistura do tipo I contém suco de limão, óleo e vinagre na proporção 1:2:3. Numa segunda mistura, do tipo II, a proporção é 3:4:5. Qual é a proporção de suco de limão, óleo e vinagre numa mistura composta de 1 litro da mistura do tipo I mais 1 da mistura do tipo II?

Solução:

Consideremos a mistura I. A proporção 1 : 2 : 3 significa que em 1 ℓ teremos: $\frac{1}{6}$ ℓ de suco de limão; $\frac{2}{6}$ ℓ de óleo; e $\frac{3}{6}$ ℓ de vinagre. Já na mistura II, a proporção é 3 : 4 : 5. Portanto, temos: $\frac{3}{12}$ ℓ de suco de limão; $\frac{4}{12}$ ℓ de óleo; e $\frac{5}{12}$ ℓ de vinagre. Ao juntarmos I e II, teremos: $\frac{5}{12}$ ℓ de suco de limão; $\frac{2}{3}$ ℓ de óleo; e $\frac{11}{12}$ ℓ de vinagre. Colocando as três frações em um denominador comum obteremos: $\frac{5}{24}$ ℓ de suco de limão; $\frac{8}{24}$ ℓ de óleo; e $\frac{11}{24}$ ℓ de vinagre. Este resultado foi encontrado somando-se as quantidades de cada líquido em cada mistura e levando em consideração que temos agora 2 litros no total. Então, a proporção da mistura final é: 5 : 8 : 11.

- Explicitar o volume de cada um dos líquidos em qualquer uma das misturas (0,6 ponto). Se explicitar o volume de cada um dos líquidos nas duas misturas (0,8 ponto)
- Somar os volumes de cada um dos líquidos (0,4 ponto)
- Colocar as três frações em um denominador comum (0,4 ponto)
- Concluir e responder corretamente à pergunta (0,4 ponto)