

GABARITO DA PROVA DA OLIMPIÁDA MINEIRA DE MATEMÁTICA

Nível II

Testes: Cada teste correto 0,4 pontos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	b	d	c	Anulada	a	b	d	b	d

A NOTA DADA NO PROBLEMA NÃO PODE ULTRAPASSAR 2 PONTOS; SE O ALUNO UTILIZAR AS DUAS FORMAS DE RESOLUÇÃO, PREVALECE A QUE OBTIVER MAIS PONTOS E A PONTUAÇÃO DA OUTRA TENTATIVA É DESCARTADA. QUALQUER OUTRA RESPOSTA, MATEMATICAMENTE CORRETA E QUE NÃO APARECE AQUI, DEVE SER CONSIDERADA ADAPTANDO O GABARITO RELATIVO AO PROBLEMA

Problema 1

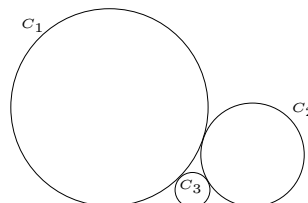
Uma mistura do tipo I contém suco de limão, óleo e vinagre na proporção 1:2:3. Numa segunda mistura, do tipo II, a proporção é 3:4:5. Qual é a proporção de suco de limão, óleo e vinagre numa mistura composta de 1 litro da mistura do tipo I mais 1 da mistura do tipo II?

Solução:

Veja solução do problema 3 do nível I.

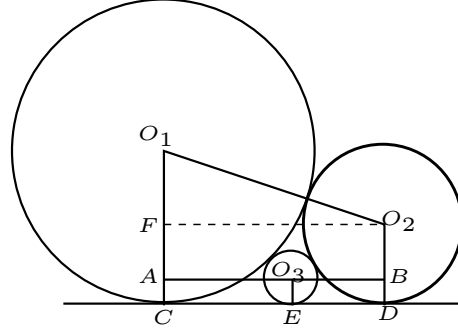
Problema 2

Na figura abaixo, C_1 , C_2 e C_3 são três circunferências tangentes entre si e também tangentes à reta. Sabendo-se que o raio da circunferência C_1 é 9 e o raio de C_2 é 4, calcule o raio da circunferência C_3 .



Solução:

Sejam O_1 o centro da circunferência C_1 , O_2 o centro de C_2 , O_3 o centro de C_3 e r o raio de C_3 . Como C_1 e C_2 são tangentes entre si, o segmento de reta que une O_1 e O_2 é igual a soma do raio r_1 de C_1 e o raio r_2 de C_2 . Ou seja, $\overline{O_1O_2} = 4 + 9 = 13$. Consideremos o retângulo CFO_2M da figura. Temos, então que: $\overline{O_1F} = 9 - 4 = 5$.



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo O_1FO_2 , temos:

$$\begin{aligned} 13^2 &= 5^2 + \overline{CD}^2 \\ \overline{CD} &= 12 \end{aligned}$$

O triângulo AO_1O_3 é retângulo, pois $O_3\hat{A}O_1$ é igual a 90° . Analogamente, BO_2O_3 também é retângulo. O segmento $\overline{AC}$ mede r , assim $\overline{AO_1} = 9 - r$. Já que C_1 e C_3 são tangentes $\overline{O_1O_3} = 9 + r$. Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (9 + r)^2 &= (9 - r)^2 + \overline{CO_3}^2 \\ 81 + 18r + r^2 &= 81 - 18r + r^2 + \overline{CO_3}^2 \\ 36r &= \overline{CO_3}^2 \\ 6\sqrt{r} &= \overline{CO_3} \end{aligned}$$

Analisando, agora, o triângulo O_2BO_3 , temos, analogamente, $\overline{O_2O_3} = 4 + r$ e $\overline{O_2B} = 4 - r$. Novamente, pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (4 + r)^2 &= (4 - r)^2 + \overline{O_3D}^2 \\ 16 + 8r + r^2 &= 16 - 8r + r^2 + \overline{O_3D}^2 \\ 16r &= \overline{O_3D}^2 \\ \overline{O_3D} &= 4\sqrt{r} \end{aligned}$$

Podemos ver na figura que $\overline{CD} = \overline{CO_3} + \overline{O_3D}$. Então:

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{CO_3} + \overline{O_3D} \\ 12 &= 6\sqrt{r} + 4\sqrt{r} \\ 12 &= 10\sqrt{r} \\ \frac{12}{10} &= \sqrt{r} \\ 1,44 &= r \end{aligned}$$

- Concluir que $\overline{O_1F} = 5$ (0,2 ponto)
- Concluir que $\overline{O_2F}$, ou outro segmento equivalente, = 12 (0,5 ponto)
- Demonstrar as **duas** relações: $\overline{CO_3} = 6\sqrt{r}$ e $\overline{O_3D} = 4\sqrt{r}$ (0,8 ponto)
- Demonstrar **somente uma** das relações: $\overline{CO_3} = 6\sqrt{r}$ ou $\overline{O_3D} = 4\sqrt{r}$ (0,5 ponto)
- Concluir o problema dando, como resposta, uma relação correta (0,3 ponto)
- Concluir o problema dando, como resposta, o **número** 1,44. (o item anterior não se acumula a esse)(0,5 ponto)

Problema 3

Seja x um número que satisfaz a equação $x^2 + x - 1 = 0$, determine o valor da expressão:

$$x^8 - 7x^4 + 1$$

Solução I:

Da equação $x^2 + x + 1 = 0$, temos que: $x^2 = 1 - x$. Queremos simplificar a expressão: $x^8 - 7x^4 + 1$. Podemos colocar x^4 em evidência. Assim:

$$x^4(x^4 - 7) + 1 = x^2x^2(x^2x^2 - 7) + 1$$

Substituindo x^2 por $1 - x$ de acordo com a primeira relação, temos:

$$(1 - x)(1 - x)[(1 - x)(1 - x) - 7] + 1 = (1 - 2x + x^2)(1 - 2x + x^2 - 7) + 1$$

Novamente, substituindo x^2 por $1 - x$:

$$\begin{aligned} (1 - 2x + 1 - x)(1 - 2x + 1 - x - 7) + 1 &= (2 - 3x)(-3x - 5) + 1 \\ &= -6x + 9x^2 - 10 + 15x + 1 \\ &= 9(x^2 + x - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Mostrar que $x^2 = 1 - x$ (0,3 ponto)
- Substituir $x^2 = 1 - x$ na expressão $x^8 - 7x^4 + 1$ uma vez (0,7 ponto)

- Substituir $x^2 = 1 - x$ na expressão $x^8 - 7x + 1$ outra vez (0,5 ponto)
- Substituir $x^2 = 1 - x$ novamente e chegar na resposta (0,5 ponto)

Solução II:

Podemos resolver a equação $x^2 + x - 1 = 0$ através da fórmula de Bháskara.

Portanto, temos $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Consideremos $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_1^4 &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{9-6\sqrt{5}+5}{4} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ x_1^8 &= \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{49-42\sqrt{5}+45}{4} = \frac{47-21\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Substituindo x_1 em $x^8 - 7x^4 + 1$, temos:

$$x^8 - 7x^4 + 1 = \frac{47 - 21\sqrt{5}}{2} - 7 \frac{(7 - \sqrt{5})}{2} + 1 = \frac{47 - 21\sqrt{5} - 49 + 21\sqrt{5} + 2}{2} = 0$$

Se considerarmos agora x_2 teremos, ao fazer os mesmos cálculos: $x^8 - 7x^4 + 1 = 0$. Concluimos, então, que o valor de $x^8 - 7x^4 + 1$ é zero.

- Achar as raízes (0,3 ponto)
- Calcular x^2 (0,3 ponto)
- Calcular x^4 (0,3 ponto)
- Calcular x^8 (0,3 ponto)
- Se mostrar que a expressão vale zero para os **dois** valores de x (0,8 ponto)

Se mostrar que a expressão vale zero para **apenas um** dos valores de x (0,2 ponto)

Solução III:

Se $x^2 + x - 1 = 0$, então: $x^2 = 1 - x$. Para calcular o valor de x^4 basta elevar x^2 ao quadrado. Assim,

$$x^4 = (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + 1 - x = 2 - 3x.$$

Analogamente, para calcular x^8 :

$$x^8 = (2 - 3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2 = 4 - 12x + 9 - 9x = 13 - 21x$$

Substituindo os valores de x^2 , x^4 e x^8 na equação:

$$(13 - 21x) - 7(2 - 3x) + 1 = 21x - 21x + 13 - 14 + 1 = 0$$

- Obter x^2 (0,3 ponto)
- Obter x^4 (0,7 ponto)
- Obter x^8 (0,5 ponto)
- Concluir e responder corretamente (0,5 ponto)