GABARITO DA PROVA DA OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA
Nível III

Testes: Cada teste correto $0,4$ pontos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	d	a	b	c	b	a	d	b	d

A NOTA DADA NO PROBLEMA NÃO PODE ULTRAPASSAR 2 PONTOS; SE O ALUNO UTILIZAR AS DUAS FORMAS DE RESOLUÇÃO, PREVALECE A QUE OBTIVER MAIS PONTOS E A PONTUAÇÃO DA OUTRA TENTATIVA É DESCARTADA. QUALQUER OUTRA RESPOSTA, MATEMATICAMENTE CORRETA E QUE NÃO APARECE AQUI, DEVE SER CONSIDERADA ADAPTANDO O GABARITO RELATIVO AO PROBLEMA

Problema 1

Considere a função f dada por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$
(a) Para $n \in \mathbb{N}$, calcule $f(2^n \cdot \pi)$
(b) Ache os valores de $x \in [0, 2\pi]$ tais que $f(x) = f(-x)$
(c) Mostre que o valor máximo da função é 5.

a) **Solução:**
O seno de qualquer múltiplo inteiro de π é sempre nulo. O cosseno de $K\pi$ é sempre 1 se K for ímpar, e sempre -1 se K for par. Assim temos dois casos

1. se $n = 0$ temos que $\operatorname{sen}(2^n \cdot \pi) = 0$, e $\cos(2^n \cdot \pi) = -1$ logo $f(2^n \cdot \pi) = 4 \cdot -1 = -4$

2. Se $n > 0$, temos que $\operatorname{sen}(2^n \cdot \pi) = 0$, $\cos(2^n \cdot \pi) = 1$ e $f(2^n \cdot \pi) = 4 \cdot 1 = 4$

- Mostrar que para $n = 0$, $3 \operatorname{sen}(2^n \cdot \pi) = -4$ (0,2 ponto)

- Mostrar que para $n > 0$, $3 \operatorname{sen}(2^n \cdot \pi) = 4$ (0,3 ponto)

- Caso o aluno escreva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, a resposta $f(2^n \cdot \pi) = 4$ deve ser pontuada com 0,5 ponto.

b) **Solução:**
Como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(-x) = \cos(x)$, então

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(-x) \\
3\operatorname{sen} x + 4\cos x &= 4\cos(-x) - 3\operatorname{sen}(-x) \\
3\operatorname{sen} x + 4\cos x &= 4\cos x - 3\operatorname{sen} x \\
3\operatorname{sen} x &= -3\operatorname{sen} x \\
\operatorname{sen} x &= 0
\end{aligned}$$

Portanto $f(x) = f(-x)$, para $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

- Demonstrar que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(-x) = \cos(x)$ (0,3 ponto)
- Responder corretamente (os três valores) (0,2 ponto)
- Caso o aluno escreva apenas um ou dois valores corretos de x (0,1 ponto)

c) **Solução:**
$f(x) = 3\operatorname{sen} x + 4\cos x$
Dividindo os dois lados da equaçào por 5:

$$\frac{f(x)}{5} = \frac{3}{5}\operatorname{sen} x + \frac{4}{5}\cos x$$

Nota-se que $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, ou seja, $\frac{3}{5}$ é o cosseno de um ângulo a qualquer, e $\frac{4}{5}$ é o seno desse mesmo ângulo a. Substituindo na equação:

$$\frac{f(x)}{5} = \operatorname{sen}(x)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(x) = \operatorname{sen}(x + a)$$

, ou $f(x) = 5\operatorname{sen}(x + a)$.
Como o seno tem valor máximo igual a 1, a função $f(x)$ tem valor máximo igual a 5.

- Mostrar que $\frac{3}{5}$ é seno de um ângulo a qualquer assim como $\frac{4}{5}$ é o cosseno do mesmo ângulo (0,5 ponto)

- Chegar à expressão $f(x) = 5 \cdot \operatorname{sen}(a + x)$ ou $f(x) = 5 \cdot \cos(a - x)$)(0,3 ponto)

- Concluir e responder corretamente a questão (0,2 ponto)

As duas pontuações abaixo não acumulam entre si nem com as anteriores.

- Mostrar, considerando $x = a$, que o valor máximo é maior ou igual a cinco. (a é o ângulo citado na resolução) (0,4 ponto)

- Mostrar, considerando $cos(x) = 1$, que o valor máximo é maior ou igual a quatro (0,2 ponto)

- Caso o caminho para chegar à solução difira dos dados, pontuar de forma análoga ao critério dado.

Problema 2

De quantas maneiras pode-se numerar as faces de um dado de 6 faces iguais
(a) usando-se todos os números de 1 a 6, sem repetí-los?
(b) como no item anterior, mas também de forma que pelo menos um dos pares de faces opostas tenha soma 7?

a) **Solução:**
As faces do dado são iguais, portanto se ele for girado, ainda que os números estejam em posições diferentes, o dado permanece o mesmo. Um número é colocado em uma das faces. Dessa forma, existem 5 possibilidades para o número que será colocado na face oposta à sua. Os últimos quatro números são então permutados circularmente entre as quatro posições (Há 4 possibilidades para a primeira das faces, 3 para a segunda, 2 para a terceira e 1 para a quarta mas cada disposição dos números se repete 4 vezes já que a rotação do dado não faz com que ele mude; consequentemente, há a necessidade da divisão por 4) restantes, ou seja :

$$1 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{4} = 5 \cdot 3! = 30.$$

• Listar as 30 possibilidades ou chegar à expressão correta que leva à solução (1,0 ponto)

b) **Solução I:**

Consideram-se os casos em que há 1 par de faces opostas cuja soma é 7 e o em que há todos os 3 pares satisfazendo essa condição (2 pares somando 7 implicam o outro par também somando 7) e somam-se os resultados. No primeiro caso há inicialmente três possibilidades para o par que terá soma igual a 7: $(1,6);(2,5);(3,4)$
Os outros devem então ser colocados nas faces de maneira que não somem 7 com suas faces opostas. Há 2 opções para se associar um número a outro que não resulte em 7 e alternando as posições do último par um outro dado pode ser gerado: $3 \cdot (2 \cdot 2)$
Há apenas 2 maneiras de numerar um cubo para que todos seus pares de lados opostos somem 7 entre si. A solução final do problema é portanto:
$3 \cdot (2 \cdot 2) + 2 = 14$

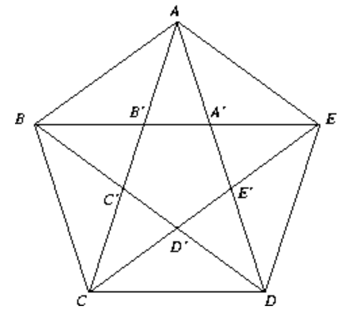
b) **Solução II:**
Tomam-se todos os dados possíveis obtidos na item a do problema e subtraem-se os casos em que nenhum par de faces opostas somado valha 7. Para isso, são fixados em lados adjacentes números cuja soma é 7. Há então 4 possibilidades para o número que estará na face oposta a uma das faces com um elemento fixo e 2 para a outra, já que o par restante estará em faces opostas e portanto não pode somar 7. Alternando o último par de lados opostos, geramos mais duas possibilidades. Assim:

$$5 \cdot 3! - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 14$$

• Listar todas as possibilidades corretamente ou chegar à expressão que leva à solução (1 ponto)
A pontuação abaixo não acumula com a anterior.
•• Explicitar a escolha de uma das estratégias corretas (0,4 ponto)
• • • O item (b) não deverá ser desvalorizado pelo uso do resultado obtido no item (a) ainda que este esteja errado.

A nota dada no item não pode ultrapassar 1 ponto; Se o aluno utilizar as duas formas de resolução, prevalece a que obtiver mais pontos e a pontuação da outra tentativa é descartada

Problema 3



O pentágono $ABCDE$ é regular.
(a) Prove que os ângulos $E\hat{A}D$, $D\hat{A}C$ e $C\hat{A}B$ são congruentes.
(b) Prove que o triângulo ABA' é semelhante ao triângulo $A'AB'$
(c) Calcule a razão entre as áreas dos pentágonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ (nesta ordem)

a) **Solução I:**
Considerando uma circunferência, onde o pentágono esteja inscrito, os arcos ED, DC e CB são congruentes e, portanto, os ângulos $E\hat{A}D$, $D\hat{A}C$ e $C\hat{A}B$ também o são.

a) **Solução II:**
Por simetria,

$$A\hat{E}B = A\hat{B}E = B\hat{A}B' = E\hat{A}A' = a \qquad A\hat{B}'E = A\hat{A}'B = b = 2a$$

(ângulo externo).
O ângulo interno de um pentágono regular é $108°$, portanto $2a + 108° = 180°$ (soma dos ângulos internos de $\triangle ABE$). Com isso $a = 36°$.
$4a + B'\hat{A}A' = 180°$ (soma dos ângulos internos de $\triangle AB'A'$).
$B'\hat{A}A' = 36° = a$

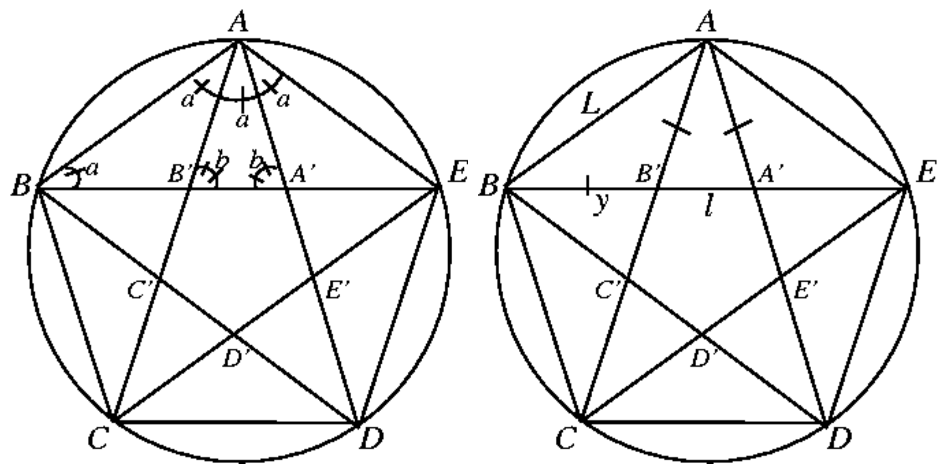
- Resolução do item (0,5 ponto)

b) **Solução:**
Como o pentágono é regular, podemos dizer que os triângulos $\triangle ABB'$ e $\triangle A'AB'$ são isóceles, que os ângulos $A\hat{B}A'$ e $B'\hat{A}A'$ são iguais a a e que $B\hat{A}'A$ e $A\hat{B}'E$ são iguais a $b = 2a$. E pelo caso AA os triângulos são semelhantes.

- Resolução do item (0,5 ponto)

c) **Solução:**
A razão das áreas de polígonos regulares semelhantes é o quadrado da razão entre seus lados. Por semelhança, mostra-se que: $\frac{AA'}{l} = \frac{L}{AA'}$
Como o triângulo BAB' é isósceles (o ângulo $B\hat{A}B$ é igual ao $A\hat{B}B'$) e de forma análoga, o triângulo $AB'A'$ também o é, segue que
$AB' = AA'$ e definindo y como $y = AA'$, $L = y + l$

Substituindo AA' por $y = L - l$ na primeira relação obtém-se:



$\frac{(L-l)^2}{l^2} = \frac{L}{l}$. Chamando $\frac{L}{l}$ de p, a equação torna-se $p^2 - 3p + 1 = 0$, cujas soluções são $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e como deseja-se obter uma razão maior do que 1, a solução é finalmente:
$p^2 = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{4}$ = a razão entre as áreas.

- Explicitar que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão entre os lados (0,3 ponto)
- Obter a relação $\frac{AA'}{l} = \frac{L}{AA'}$ (0,2 ponto)
- Mostrar que $AA' = L - l$ onde L e l são os lados do pentágono grande e pequeno respectivamente (0,1 ponto)
- Chegar à equação de segundo grau $\left(\frac{L}{l}\right)^2 - 3\frac{L}{l} + 1 = 0$ (0,1 ponto)
- Obter a solução correta (0,3 ponto)

A pontuação abaixo não se acumula com a anterior.
•• Obter somente o valor de $\frac{L}{l}$ (0,2 ponto)